

УДК 919.24

Ю.В. Куц, канд. техн. наук
Л.М. Щербак, д-р техн. наук

ІМОВІРНІСНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВУЗЬКОСМУГОВИХ ПРОЦЕСІВ ПРИ ФАЗОВИХ ВИМІРЮВАННЯХ

Інститут інформаційно-діагностичних систем НАУ, e-mail: iidsu@ukrpost.net

Запропоновано ймовірнісну модель фазових характеристик вузькосмугових процесів. Наведено геометричну інтерпретацію моделі, яка описує широкий клас сигналів. Результати дослідження ймовірнісної моделі можна застосовувати при статистичній обробці фазових вимірювань.

Вступ

У рамках науково-технічної проблеми статистичної фазометрії розглянемо ймовірнісні моделі фазових характеристик випадкових процесів.

Актуальність питання визначається тим, що існуючий науково-методичний апарат фазометрії не повною мірою відповідає вимогам щодо точності вимірювань при низьких співвідношеннях сигнал/завада.

Крім того, спрощеність існуючих моделей фазових характеристик сигналів не дозволяє в повному обсязі виконати дослідження і аналіз фазовимірювальних систем в умовах дії завад.

У праці [1] розглядалась ймовірнісна модель фазових зсувів гармонічних сигналів. Однак така модель сигналів не охоплює всіх можливих реалізацій циклічних процесів або їх сукупностей.

Дослідження реальних фізичних процесів і полів потребує обробки сигналів більш складної структури. До таких сигналів належать вузькосмугові випадкові процеси. Більш глибоке теоретичне осмислення випадкової природи фазових характеристик потребує введення моделі, яка більшою мірою відповідає складним реальним процесам.

У фазових інформаційно-вимірювальних системах (ІВС) інформаційний сигнал найчастіше являє собою гармонічний сигнал виду:

$$u(t) = U \cos(2\pi f_0 t + \theta_u) = U_c \cos(2\pi f_0 t) - U_s \sin(2\pi f_0 t), \quad U > 0, \quad t \in T_c, \quad (1)$$

де U – амплітуда сигналу:

$$U = \sqrt{U_c^2 + U_s^2};$$

f_0 , T_c – частота та інтервал спостереження сигналу; U_c , U_s – квадратурні компоненти сигналу:

$U_c = U \cos \theta_u$, $U_s = U \sin \theta_u$; $\theta_u \in [0, 2\pi)$ – початковий фазовий зсув, пов'язаний з квадратурними компонентами сигналу U_c , U_s співвідношенням

$$\theta_u = \mathbf{L}[U_s, U_c] = \arctg\left(\frac{U_s}{U_c}\right) + \frac{\pi}{2} \{2 - [\text{sign}(U_s)][1 + \text{sign}(U_c)]\},$$

де $\mathbf{L}[U_s, U_c]$ – оператор однозначного в інтервалі $[0, 2\pi)$ визначення кута θ_u , $\text{sign}(\cdot)$ – знакова функція.

Опорний сигнал, відносно якого здійснюється вимірювання початкового фазового зсуву сигналу (1), має вигляд:

$$u_0(t) = U_0 \cos(2\pi f_0 t), \quad U_0 > 0, \quad t \in T_c,$$

де U_0 – амплітуда опорного сигналу.

Початковий фазовий зсув взято за нуль, що не суперечить умовам проведення фазовимірювального експерименту.

Формування і передача інформаційного сигналу у фазових ІВС супроводжується впливом завад типу білого шуму. З урахуванням того, що вхідними ланцюгами ІВС є лінійні ланки з обмеженою смугою пропускання $\Delta f \ll f_0$, можна вважати, що на вході ІВС разом з інформативним сигналом присутня завада у вигляді вузькосмугового випадкового процесу. Такі процеси мають характерну властивість – їх енергетичний спектр зосереджений в смузі частот Δf , яка задовольняє умову $f_0 \gg \Delta f$ [2]. У фазометрії [3; 4], як правило, значення f_0 відоме або може бути визначено як частота опорного, детермінованого сигналу.

Вузькосмуговий стаціонарний дійсний випадковий процес можна подати у вигляді:

$$\xi(\omega, t) = A_\xi(\omega, t) \cos \Phi_\xi(\omega, t), \quad \omega \in \Omega, t \in (-\infty, \infty), \quad (2)$$

де ω – елементарна подія з простору подій Ω ; $A_\xi(\omega, t)$, $\Phi_\xi(\omega, t)$ – відповідно обвідна і фаза (амплітудна і фазова характеристики) процесу $\xi(\omega, t)$.

Модель (4) виглядає штучною, тому її застосування потребує певного обґрунтування. Якщо задані випадкові процеси $A(\omega, t)$ і $\Phi(\omega, t)$, то мо-

дель (2) визначається однозначно. Якщо заданий випадковий процес $\xi(\omega, t)$, однозначно визначення процесів $A(\omega, t)$ і $\Phi(\omega, t)$ у загальному випадку немає. Далі досліджуємо саме цей випадок, оскільки він має важливе значення для застосування у фазометрії, використовуючи такі позначення:

$\varphi(\omega)$ – випадковий кут в інтервалі $[0, 2\pi)$;

θ – реалізація випадкового кута $\varphi(\omega)$;

$\xi(\omega)$ – випадкова величина;

$\bar{\eta}(\omega)$ – випадковий вектор;

$\bar{\rho}$ – реалізація випадкового вектора $\bar{\eta}(\omega)$;

\mathbf{M} – оператор математичного сподівання;

\mathbf{D} – оператор дисперсії;

$R(\tau)$ – кореляційна функція стаціонарного процесу (2);

$P(\xi < x)$ – ймовірність події $\xi(\omega) < x$;

R – множина дійсних чисел;

N – множина натуральних чисел.

У даній статті пропонується і досліджується ймовірнісна модель фазових зсувів вузькосмугових процесів, використання якої дозволить підвищити точність і вірогідність оцінки їх фазових характеристик у реальних умовах дії завод.

Постановка задачі

На скінченному інтервалі часу T_c досліджуються процеси

$$\eta(\omega, t) = u(t) + \xi(\omega, t);$$

$$u_0(t) = U_0 \cos(2\pi f_0 t), \quad t \in [0, T_c]. \quad (3)$$

Перший процес $\eta(\omega, t)$ є випадковим. Він визначається як адитивна суміш інформаційного сигналу (1) та стаціонарного випадкового гауссівського процесу $\xi(\omega, t)$ (2) з характеристиками $\mathbf{M}\xi(\omega, t) = 0$ і $\mathbf{D}\xi(\omega, t) = \sigma^2$, який є відгуком вузькосмугової лінійної системи з резонансною частотою f_0 .

Випадковий процес $\xi(\omega, t)$ належить до класу процесів другого порядку, тобто $\mathbf{M}\xi^2(\omega, t) < \infty, \forall t \in T_c$, що дозволяє застосувати до нього перетворення Гільберта [5].

Випадковий процес $\eta(\omega, t)$ має фазову характеристику $\Phi_\eta(\omega, t)$.

Необхідно побудувати ймовірнісну модель різниці фазових зсувів $\Delta\varphi(\omega, t) \in [0, 2\pi)$, яка визначається за фазовими характеристиками процесів (5) як

$$\Delta\varphi(\omega, t) = [\Phi_\eta(\omega, t) - \Phi_0(t)] \bmod 2\pi,$$

де $\Phi_0(t) = 2\pi f_0 t$ – фазова характеристика опорного сигналу $u_0(t)$.

Розв'язок

Досліджуємо процес $\eta(\omega, t)$, який задано виразом (3). Випадкова компонента $\eta(\omega, t)$ – процес $\xi(\omega, t)$, допускає представлення моделлю (2), де функції $A_\xi(\omega, t), \Phi_\xi(\omega, t)$ однозначно визначаються на основі перетворення Гільберта як

$$A_\xi(\omega, t) = \sqrt{\xi^2(\omega, t) + \hat{\xi}^2(\omega, t)},$$

$$\Phi_\xi(\omega, t) = \mathbf{L}[\xi(\omega, t), \hat{\xi}(\omega, t)] + \mathbf{K}[\xi(\omega, t), \hat{\xi}(\omega, t)],$$

де $\mathbf{K}[\cdot]$ – оператор, що усуває стрибки фазової характеристики в точках $2\pi n, n \in N$; $\hat{\xi}(\omega, t)$ – спряжений випадковий процес, пов'язаний з процесом $\xi(\omega, t)$ перетворенням Гільберта:

$$\hat{\xi}(\omega, t) = \mathbf{G}[\xi(\omega, t)],$$

де $\mathbf{G}[f(t)]$ – оператор перетворення Гільберта:

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{f(t+\tau) - f(t-\tau)}{\tau} d\tau.$$

У збіжні моменти часу випадкові процеси $\xi(\omega, t)$ та $\hat{\xi}(\omega, t)$ некорельовані, що впливає з аналізу їх скалярного добутку:

$$\mathbf{M}\{\xi(\omega, t), \hat{\xi}(\omega, t)\} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{R_\xi(\tau)}{\tau} d\tau = 0.$$

Оскільки процеси $\xi(\omega, t)$ та $\hat{\xi}(\omega, t)$ за умови задачі є гауссівськими, то з їх некорельованості випливає і їх статистична незалежність.

При проходженні процесу $\xi(\omega, t)$ через вузькосмугову лінійну систему з центральною частотою f_0 його фазова характеристика може бути подана як [2]

$$\Phi_\xi(\omega, t) = 2\pi f_0 t + \varphi(\omega, t), \quad (4)$$

а сам процес

$$\xi(\omega, t) = \xi_c(\omega, t) \cos(2\pi f_0 t) - \xi_s(\omega, t) \sin(2\pi f_0 t), \quad (5)$$

де $\xi_c(\omega, t)$ і $\xi_s(\omega, t)$ – дійсні незалежні стаціонарні гауссівські випадкові процеси з нульовими математичними сподіваннями і дисперсією σ^2 :

$$\xi_c(\omega, t) = A(\omega, t) \cos \varphi(\omega, t);$$

$$\xi_s(\omega, t) = A(\omega, t) \sin \varphi(\omega, t).$$

Отже, з урахуванням виразів (1) і (5) вимірний процес набуває вигляду

$$\eta(\omega, t) = [U_c + \xi_c(\omega, t)] \cos(2\pi f_0 t) - [U_s + \xi_s(\omega, t)] \sin(2\pi f_0 t). \quad (6)$$

Побудуємо спряжений з процесом $\eta(\omega, t)$ випадковий процес

$$\hat{\eta}(\omega, t) = [U_s + \xi_s(\omega, t)] \cos(2\pi f_0 t) + [U_c + \xi_c(\omega, t)] \sin(2\pi f_0 t). \quad (7)$$

Для здійснення переходу від випадкових процесів до випадкових величин розглянемо множини значень процесів (6), (7) у дискретні моменти часу $t_j = jT$, $j = \overline{0, T_c/T}$, які можна визначити за характерними точками, наприклад, максимумами опорного гармонічного сигналу $u_0(t)$. З урахуванням того, що випадковий процес $\xi(\omega, t)$ за умови задачі є стаціонарним, то і його складові $\xi_c(\omega, t)$ і $\xi_s(\omega, t)$ також стаціонарні процеси. Тому вибіркові значення $\xi_c(\omega, t)$ і $\xi_s(\omega, t)$, отримані у фіксовані моменти часу t_j , можна розглядати як випадкові величини. Тоді для моменту часу t_j маємо випадкову величину:

$$\eta_j(\omega) = U_c + \xi_c(\omega); \quad \hat{\eta}_j(\omega) = U_s + \xi_s(\omega).$$

Отримані в збіжні моменти часу пари миттєвих значень процесів $\eta(\omega, t)$ і $\hat{\eta}(\omega, t)$ утворюють випадкові вектори $(\eta_j(\omega), \hat{\eta}_j(\omega))$, $j = \overline{0, T_c/T}$, які відображаються на площині в декартовій системі координат xOy відрізками прямих ліній. Вектори починаються в центрі системи координат і закінчуються в точках з координатами $(\eta_j(\omega), \hat{\eta}_j(\omega))$. На рис. 1 зображено реалізацію $\bar{\rho}_j$ випадкового вектора і позначено окіл радіуса 3σ , якому з ймовірністю 0,997 належать всі точки з координатами $(\eta_j(\omega), \hat{\eta}_j(\omega))$ для початкового фазового зсуву

$$\theta_u = \mathbf{L}[U_s, U_c].$$

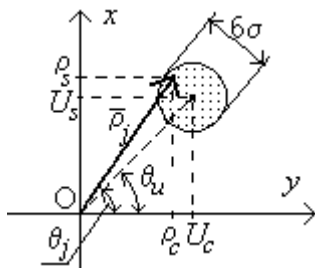


Рис. 1. Графічне уявлення реалізації випадкового вектора $\bar{\rho}_j(\omega)$ на площині xOy

Кут даного вектора $\theta'_j = \arg[\bar{\rho}_j]$ визначає напрям вектора $\bar{\rho}_j$ у просторі xOy . Він відраховується від осі Oy в зворотному напрямку ходу годинникової стрілки (можна побудувати і симе-

тричну систему підрахунку кутів за ходом годинникової стрілки).

Якщо змінювати значення θ_u в інтервалі $[0, 2\pi)$, то кут $\phi'_j(\omega) = \arg[\bar{\eta}_j(\omega)]$ набуває всіх значення в інтервалі $[0, 2\pi)$, а 3σ -окіл утворює кільце з внутрішнім радіусом $U - 3\sigma$, зовнішнім радіусом $U + 3\sigma$ і середнім радіусом U , тобто кільце товщиною 6σ , як зображено на рис. 2.

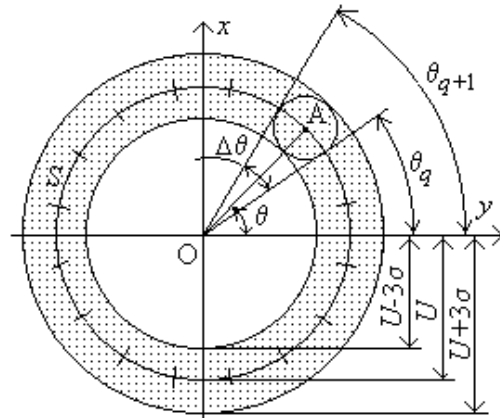


Рис. 2. Графічна побудова ймовірнісної моделі аргументу випадкового вектора

Середній радіус U має зміст математичного сподівання модуля випадкового вектора $\bar{\eta}(\omega)$. Площа кільця становить $S = 12\pi U\sigma$. Кінці випадкових векторів $\bar{\eta}_j(\omega)$ можуть займати довільне положення в межах площі кільця. Ці вектори характеризуються двома компонентами, отже, і ймовірнісну модель треба розглядати і для кутів, і для модулів випадкових векторів (або квадратурних компонент векторів).

Отже, визначаючи ймовірнісну модель фазових зсувів сигналів, необхідно розглядати сукупність двох випадкових величин – випадкового модуля і випадкового фазового зсуву.

Ймовірнісна модель початкового фазового зсуву випадкового вузькосмугового процесу

Для побудови ймовірнісної моделі випадкових кутів розділимо кільце на скінченне число l рівних за площею частин. З цією метою спочатку розділимо коло середнього радіуса U на скінченне число l рівних дуг точками кола $\frac{\pi}{l}(2q+1)$, $q = \overline{0, (l-1)}$, почавши відлік q від осі Oy у напрямку проти годинникової стрілки. На рис. 2 літерою A позначена одна з точок розбиття. Оскільки вузькосмуговий випадковий процес (7) припускає коливання обвідної на величину $\pm 3\sigma$, то немає сенсу виконувати розбиття кола

на дуги, значно менші 6σ . Тому кількість інтервалів розбиття виберемо як найближче до $\frac{\pi U}{\sigma}$ ціле число. Вказані точки утворюють скінченне розбиття D_θ кола радіуса U .

Тепер виконаємо розбиття кільця. Якщо з'єднати початок координат з точками розбиття кола, то утворяться центральні кути величиною $\Delta\theta$. Цим кутам відповідає розбиття кільця на l рівних частин площею $s = 6\Delta\theta U\sigma$.

Зафіксуємо елементарну подію ω_q . При цьому відбувається така сукупність умов: для довільних дійсних θ_q та θ_{q+1} , таких, що $0 \leq \theta_{q+1} - \theta_q < 2\pi$, в інтервалі $[\theta_q, \theta_{q+1})$ знайдеться число θ , порівняне за модулем 2π зі значенням $\varphi'(\omega)$. Це твердження можна записати як

$$\omega_q = \{E\varphi' : \varphi'(\omega) \equiv \theta \pmod{2\pi}, \theta \in [\theta_q, \theta_{q+1})\}$$

$$q = \overline{1, l-1}.$$

Отже, континууму значень напрямків $\arg[\bar{\eta}(\omega)]$ в інтервалі $[0, 2\pi)$ відповідає скінченна множина елементарних подій $\Omega = \{\omega_q, q = \overline{0, l-1}\}$, яку отримано розбиттям D_θ кільця на скінченне число l рівних його частин. Операції з усіма підмножинами Ω утворюють алгебру $\mathfrak{R} = \beta(D_\theta)$.

Для завершення побудови моделі потрібно задати ймовірності P_q подій ω_q з простору Ω . З урахуванням циклічної природи кутів визначимо ймовірності:

$$P_q = \begin{cases} P\{\theta_q \pmod{2\pi} \leq \varphi < \theta_{q+1} \pmod{2\pi}\} & \text{для } \theta_{q+1} > \theta_q, \\ P\{0 \leq \varphi < \theta_{q+1} \pmod{2\pi}\} + & \\ + P\{\theta_q \pmod{2\pi} \leq \varphi < 2\pi\} & \text{для } \theta_{q+1} < \theta_q. \end{cases} \quad (8)$$

Для ймовірностей (8) виконується умова нормування:

$$\sum_{l=0}^{l-1} P_q = 1. \quad (9)$$

Ймовірність довільної події $B \in \mathfrak{R}$ у загальному вигляді визначається як

$$P(B) = \sum_{\{\omega_q \in B\}} P(\omega_q).$$

Для обчислення ймовірностей (8) необхідно ввести функцію, яка породжує ймовірнісну міру. На відміну від функції розподілу ймовірностей випадкових величин, функції розподілу ймовірностей випадкових кутів мають складніший вигляд [6]. Зокрема, щільності ймовірності випадкових кутів $p(\theta)$ мають такі властивості:

$$p(\theta) \geq 0, \text{ для } \theta \in (-\infty, \infty);$$

$$p(\theta + 2\pi) \equiv p(\theta);$$

$$\int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta = 1.$$

Якщо щільність ймовірності випадкових кутів $p(\theta)$ відома, ймовірність (8) обраховують

$$P(\theta_q \leq \varphi < \theta_{q+1}) = \begin{cases} 0 & \text{для } \theta_{q+1} < \theta_q, \\ \int_{\theta_q}^{\theta_{q+1}} p(\theta) d\theta & \\ \text{для } \theta_q \leq \theta_{q+1} < \theta_q + 2\pi, & \\ 1 & \text{для } \theta_{q+1} > \theta_q + 2\pi. \end{cases} \quad (10)$$

Ймовірнісний простір $\{\Omega, \mathfrak{R}, P\}$, де $P = P(B)$, $B \in \mathfrak{R}$ – ймовірність події B , визначає ймовірнісну модель кутових спостережень сигналів при статистичному вимірювальному експерименті.

На множині Ω побудуємо ймовірнісну міру $s(\omega_q)$, яка дорівнює довжині дуги середнього радіуса

$$s(\omega_q) = \frac{2\pi}{l} q U, \quad q = \overline{1, (l-1)}.$$

Отже $i(\omega_q)$, $q = \overline{0, (l-1)}$ є функцією від розбиття D_θ . Таким чином, множина подій Ω відображається на числову множину $x = \{s(\omega_q), q = \overline{0, (l-1)}\}$, $x \in R$. На x будується алгебра \mathfrak{S} .

Для обчислення ймовірності $P(A \in \mathfrak{S})$ довільних подій A необхідно обґрунтувати вибір щільності розподілу кутів. Оскільки випадковий вектор $\bar{\eta}_j(\omega)$ розглядається як вектор з незалежними гауссівськими квадратурними компонентами, розподіл фази такого вектора має щільність ймовірності [2]:

$$p_\varphi(\theta) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{U^2}{2\sigma^2}\right) + \frac{U \cos(\theta - \theta_u)}{2\pi\sigma^2} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{U^2 \sin^2(\theta - \theta_u)}{2\sigma^2}\right) \int_{-U \cos(\theta - \theta_u)}^{\infty} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right) d\rho, \quad (11)$$

де $(\theta - \theta_u) \in [0, 2\pi)$.

Графіки функції (11) для різних значень θ_0 та U/σ показано на рис. 3.

З рис. 3 видно, що розподіл (11) є парною функцією відносно θ_u . Зі збільшенням відношення U/σ збільшується значення щільності ймовірності для середнього кута $\theta = \theta_u$.

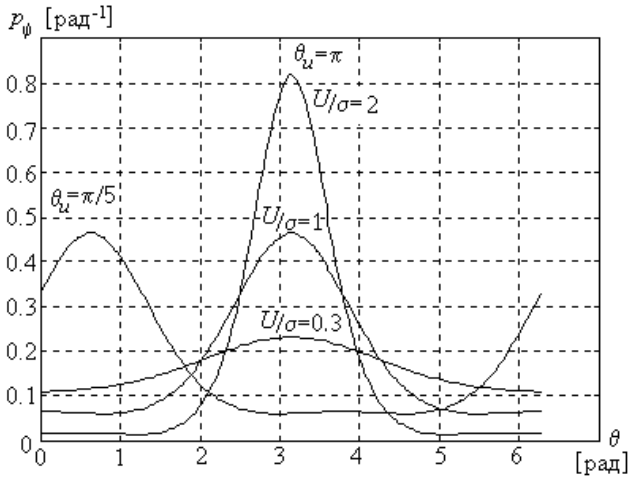


Рис. 3. Щільність ймовірності $p_\phi(\theta)$

Моделюванням щільності ймовірності (11) доведено, що розподіл (11) в широкому діапазоні значень $\frac{\sigma}{U} \in (0,04, \infty)$ задовільно апроксимується розподілом випадкових кутів Мізеса [6], для якого щільність ймовірності визначають за формулою

$$p_M(\theta) = \frac{1}{2\pi I_0(k)} \exp\{k \cos(\theta - \theta_u)\}; \quad (12)$$

$$|\theta_u| < \infty, \quad k > 0,$$

де k – параметр концентрації розподілу в околі θ_u , $I_0(k)$ – модифікована функція Бесселя першого роду нульового порядку.

Цей розподіл є одновіршинним, симетричним відносно точки $\theta = \theta_u$ і має дві точки перегину. З ростом k розподіл Мізеса концентрується навколо моди θ_u . При $k \rightarrow 0$ розподіл (12) перетворюється на рівномірний зі щільністю $p_M = \frac{1}{2\pi}$.

Для практичного застосування більш придатний вираз (12), який має спрощену аналітичну форму і дозволяє отримати простіші оцінки для визначення параметрів розподілу. Для апроксимації розподілу (11) розподілом (12) необхідно вибрати значення k з отриманої залежності $k = f\left(\frac{\sigma}{U}\right)$, яка показана на рис. 4.

На рис. 5 показано приклади виконаної на інтервалі $[0, 2\pi)$ апроксимації функцій (11) функціями (12) для $\theta_u = 0, 2\pi$ і різних значень k .

Розглянемо ймовірності $P(A \in \mathfrak{Z})$ довільних подій A для розподілу Мізеса. Графіки функцій $p(\theta/\theta_u, k)$ для різних k в діапазоні значень $\theta' \in (0, 2\pi)$ показано на рис. 6.

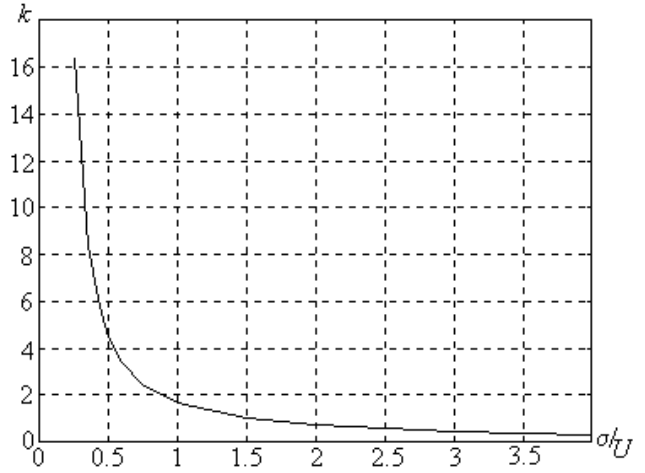


Рис. 4. Залежність $k = f\left(\frac{\sigma}{U}\right)$

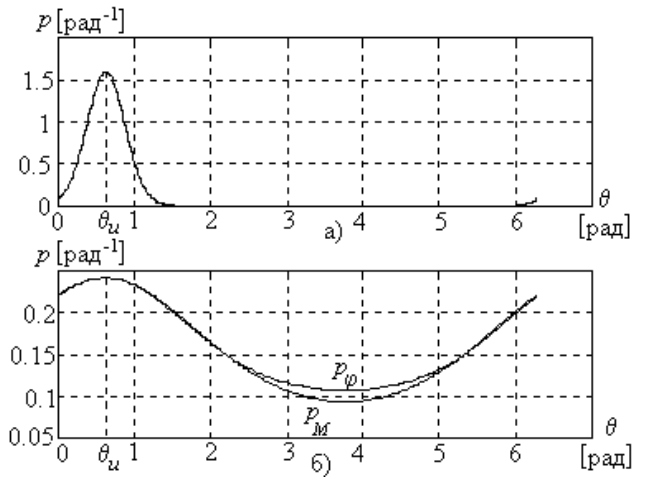


Рис. 5. Щільність ймовірності p_ϕ та Мізеса p_M для різних параметрів:
а – $\sigma/U = 0,25$, $k = 16,3$; б – $\sigma/U = 3$, $k = 0,47$

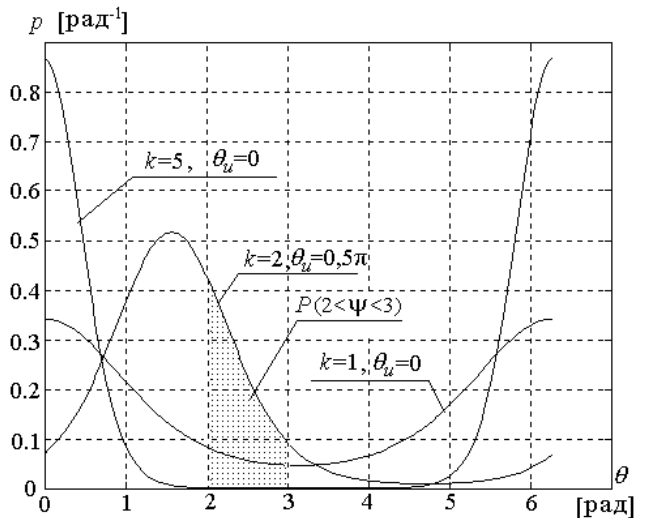


Рис. 6. Щільність ймовірності Мізеса для різних значень параметрів k та θ_u

На основі використання формул (10), (12) неважко знайти ймовірності $P(A \in \mathfrak{Z})$ для закону (12). Наприклад, для розподілу Мізеса з параметрами $k = 2$, $\theta_u = 0,5\pi$ ймовірності $P(2 < \varphi' < 3)$ відповідає площа заштрихованої частини (рис. 6).

Отриманий ймовірнісний простір $\{X, \mathfrak{Z}, P_\varphi\}$, де $P_\varphi = \{P(A), A \in \mathfrak{Z}\}$, визначає ймовірнісну модель випадкового кута $\varphi'(\omega)$.

Ймовірнісна модель модуля випадкового вектора

Усі випадкові вектори мають модулі, що належать інтервалу $|\bar{\rho}_j(\omega)| \in (U + 3\sigma, U - 3\sigma)$, тобто закінчуються в площині кільця, зображеного на рис. 2. Побудуємо систему $(m-1)$ концентричних кіл з радіусами

$$\rho_g = U + 3\sigma \left(\frac{2g}{m} - 1 \right), \quad g = \overline{1, (m-1)}.$$

Суміжні кола разом із внутрішнім і зовнішнім колами утворюють систему m кругових кілець товщиною $2\Delta\rho = \frac{6\sigma}{m}$ і середнім радіусом

$$\rho_{g, \text{cp}} = U + 3\sigma \left(\frac{2g+1}{m} - 1 \right), \quad g = \overline{1, (m-1)}.$$

Два таких суміжних концентричних кола зображено на рис. 7.

Виділимо елементарну подію ω_g , яка настає внаслідок реалізації такої сукупності умов: для довільних дійсних ρ_g та ρ_{g+1} таких, що

$$\rho_{g+1} \in [U - 3\sigma, U + 3\sigma), \quad g = \overline{0, (m-1)},$$

в інтервалі $[\rho_g, \rho_{g+1})$ знайдеться число ρ , яке дорівнює $|\bar{\eta}(\omega)|$, тобто довжині вектора $\bar{\eta}(\omega)$.

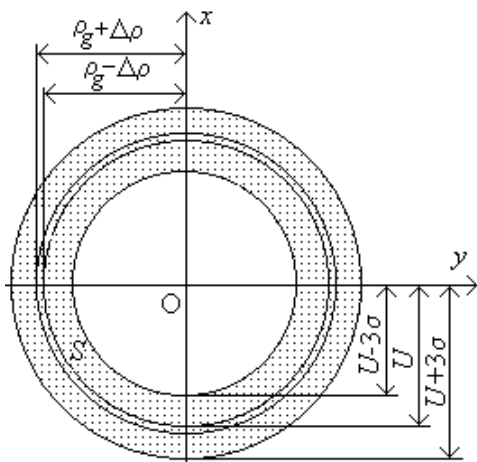


Рис. 7. Розбиття кільця системою концентричних кіл

Це твердження можна записати як $\omega_g = \{E\eta : \eta(\omega) = \rho, \rho \in [\rho_g, \rho_{g+1})\}$, $g = \overline{0, (m-1)}$.

Отже, континууму значень модулів $|\bar{\eta}(\omega)|$ в інтервалі $[U - 3\sigma, U + 3\sigma)$ відповідає скінченна множина елементарних подій $\Omega_\rho = \{\omega_g, g = \overline{0, (m-1)}\}$, яку отримано розбиттям D_ρ кільця товщиною 6σ на скінченне число m кілець рівної товщини $6\sigma/m$. Усі можливі об'єднання ω_g разом з порожньою множиною \emptyset утворюють алгебру $\mathfrak{R}_\rho = \beta(D_\rho)$.

Для завершення побудови моделі визначимо ймовірності P_ρ подій ω_g з простору Ω_ρ :

– ймовірність елементарної події;

$$P_\rho = P[\rho_g \leq |\bar{\eta}(\omega)| < \rho_{g+1}], \quad g = \overline{0, (m-1)}; \quad (13)$$

– ймовірність довільної події $B_\rho \in \mathfrak{R}_\rho$:

$$P(B_\rho) = \sum_{\{j: \omega_j \in B_\rho\}} P_j.$$

Для ймовірностей (13) виконується умова нормування (9).

Для обчислення ймовірностей (13) необхідно ввести функцію, яка породжує ймовірнісну міру. Якщо щільність ймовірності $p_\rho(x)$ модуля випадкового вектора відома, ймовірність (13) обраховується як

$$P_\rho(\rho_g \leq |\bar{\eta}(\omega)| < \rho_{g+1}) = \int_{\rho_g}^{\rho_{g+1}} p_\rho(x) dx.$$

Ймовірнісний простір $\{\Omega_\rho, \mathfrak{R}_\rho, P_\rho\}$, де $P_\rho = P(B_\rho)$, $B_\rho \in \mathfrak{R}_\rho$ – ймовірність події B_ρ , визначає ймовірнісну модель для модуля випадкового вектора при статистичному вимірювальному експерименті.

На множині Ω_ρ побудуємо ймовірнісну міру $\rho(\omega_g)$, яка визначається величиною середнього радіуса:

$$\rho_{g, \text{cp}} = U + 3\sigma \left(\frac{2g+1}{m} - 1 \right), \quad g = \overline{1, (m-1)}.$$

Отже, $\rho(\omega_g)$, $g = \overline{0, (l-1)}$ є функцією розбиття D_ρ . Таким чином, множина подій Ω_ρ відображається на числову множину

$$x = \{\rho(\omega_g), g = \overline{0, (l-1)}\} \quad x \in R.$$

На x будується алгебра \mathfrak{Z}_ρ .

Для отримання ймовірності $P(A \in \mathfrak{T}_\rho)$ довірливих подій A необхідно обґрунтувати вибір щільності розподілу модулів випадкового вектора. Оскільки випадковий вектор $\vec{\eta}_j(\omega)$ розглядається як вектор з незалежними гауссівськими квадратурними компонентами, розподіл модуля вектора має щільність імовірності [2]:

$$p_\zeta(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{\rho^2 + U^2}{2\sigma^2}\right] I_0\left(\frac{U\rho}{\sigma^2}\right), \quad (14)$$

яка називається узагальненим розподілом Релея.

Функція (14) дозволяє оцінити ймовірність модуля випадкового вектора, координати якого розподілені за гауссівським законом. Щільності ймовірності узагальненого розподілу Релея для різних значень параметра U/σ показано на рис. 8.

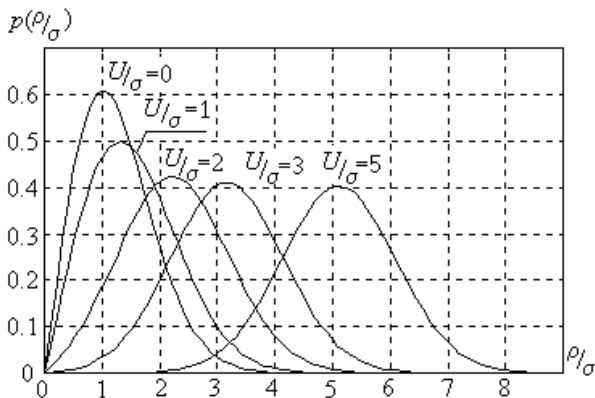


Рис. 8. Щільність імовірності узагальненого розподілу Релея для різних значень U/σ

З рис.8 видно, що зі збільшенням U/σ щільність імовірності узагальненого розподілу Релея наближається до щільності ймовірності гауссівського розподілу.

Отже, отримані трійки об'єктів $\{X, \mathfrak{T}, P_\varphi\}$ та $\{X, \mathfrak{T}_\rho, P_\rho\}$ визначають ймовірнісну модель при вимірюванні фазових зсувів вузькосмугових випадкових процесів.

Висновки

Запропонована ймовірнісна модель фазових характеристик сигналів, яка представляє сукупність двох випадкових величин – модуля і фази випадкового вектора, однозначно пов'язаних з обвідною і фазою досліджуваного випадкового вузькосмугового процесу.

У моделі враховано особливості фазових вимірювань, пов'язані з циклічним характером зміни фазових зсувів і випадковою природою вимірюваних сигналів.

Розглянуто геометричну інтерпретацію моделі. Дана геометрична інтерпретація дозволяє подолати труднощі розуміння аналітичного опису моделі.

Доведена можливість представлення щільності ймовірності розподілу фази вузькосмугового випадкового гауссівського процесу розподілом Мізеса.

Отримані результати можуть бути використані у фазометрії для статистичної обробки результатів вимірювань та дослідження фазових характеристик циклічних процесів.

Список літератури

1. Куц Ю.В., Щербак Л.М. Статистична обробка результатів кутових вимірювань сигналів // Вісн. НАУ. – 2003. – №3–4. – С. 27–32.
2. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 1. – М.: Сов. радио, 1969. – 752 с.
3. Галахова О.П., Колтик Е.Д., Кравченко С.А. Основы фазометрии. – Л.: Энергия, 1976. – 256 с.
4. Чмыч М.К. Цифровая фазометрия. – М.: Радио и связь, 1993. – 184 с.
5. Дёч Р. Нелинейные преобразования случайных процессов. – М.: Сов. радио, 1965. – 206 с.
6. Мардиа К. Статистический анализ угловых наблюдений. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. – 240 с.

Стаття надійшла до редакції 02.06.04.

Ю.В. Куц, Л.Н. Щербак

Вероятностные характеристики узкополосных процессов при фазовых измерениях

Предложена вероятностная модель фазовых характеристик узкополосных процессов. Приведена геометрическая интерпретация модели, которая описывает широкий класс сигналов. Результаты исследования вероятностной модели можно применять при статистической обработке фазовых измерений.

U.V. Kuts, L.M. Scherbak

Probabilistic characteristics of narrow-band processes at phase measurements

The probabilistic model of narrow-band process phase characteristics is offered and investigated. The geometrical interpretation of model is given. The model describes a wide class of signals, and the results of its research can find application at statistical processing of phase measurements results.