УДК 623.46; 681.513.5

В.Н.Казак

МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ СОВМЕСТНОГО ОЦЕНИВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ ВЫСОКОСКОРОСТНЫМИ И ИНТЕНСИВНО МАНЕВРИРУЮЩИМИ ЛЕТАТЕЛЬНЫМИ АППАРАТАМИ

Предложено решение задачи совместного оценивания и управления высокоскоростными и интенсивно маневрирующими летательными аппаратами путем совместного решения задачи Коши и двухточечной краевой задачи для дифференциальных уравнений в частных производных.

Процесс траекторного управления летательным аппаратом (ЛА) при сближении с высоскоростным интенсивно маневрирующим воздушным объектом в общем случае является стохастическим. В этих условиях решающую роль в создании возмущений играет маневр объекта сближения (ОС), поскольку он, как правило, заранее не известен для ЛА. Однако при решении задач оптимизации процесса траекторного сближения в настоящее время применяется детерминированный подход. При этом вместо реального маневра ОС задаются гипотезой наиболее вероятной траектории его движения. Это связано с тем, что оптимизация стохастической системы является более сложной задачей по сравнению с детерминированной. Но детермированный подход менее гибок, поскольку оптимальное управление ЛА в этом случае определяется для заданной гипотезы движения объекта сближения, и построение алгоритма траекторного сближения может быть осуществлено на основе теории совместного оценивания и управления.

Поскольку детермированный подход можно рассматривать как частный случай стохастического, в работе сделана попытка объединения обоих подходов на основе теории стохастической оптимизаци [1].

В дальнейшем предполагается, что процесс траекторного сближения достаточно адекватно описывается математической моделью в виде векторного стохастического дифференциального уравнения в форме Ланжевена [2]:

$$\dot{X}_i = \varphi_i(x,u,t) + \sum_{k=1}^{m} \sigma_{ik}(x,t)\xi_k(t);$$

$$X_i(t_0) = X_{i0} \tag{1}$$

$$t \in [t_0;t_1]; i = 1,\ldots,n; k = 1,\ldots,m;$$

$$x \in \Omega_x \subset R^n; u \in \Omega_u \subset R^l; l \le n,$$

где $\varphi_i(x,u,t), \sigma_{ik}(x,t)$- функции, определяющие динамику процесса траекторного сближения; $x^T(t) = \|x_1 \cdots x_n\|$ – вектор состояния системы; $u^T(t) = \|u_1 \cdots u_n\|$ вектор управления системы; $t \in [t_0;t_1]$ – время функционирования системы; $\xi^T(t) = \|\xi_1 ... \xi_u\|$ – векторный гауссов белый шум, для которого справедливо:

$$M[\xi_k(t)] = 0; M[\xi_k(t)\xi_i(\tau)] = E_\delta(t-\tau). \tag{2}$$

Форма представления (1) может быть применена для описания детерминированных процессов при:

$$\delta_{ik}(x,t) = 0; i = 1,\cdots,n; k = 1,\cdots,m.$$

Для информационного обеспечения траекторного сближения ЛА в состав ЛА входят датчики-измерители параметров процесса сближения, общая модель которых может быть описана системой вида

$$Z_i(t) = h_i(x,t) + \sum_{k=1}^{s} g_{ik}(x,t)\xi_k(t), \tag{3}$$

$$i = 1,\cdots,r; s = r,$$

где $Z^T(t) = \|z_1 \cdots z_r\|$ – вектор измерений системы; $h_i(x,t), g_{ir}(x,t)$ – функции, определяющие измерительные свойства датчиков; $\xi^T(t) = \|\xi_1 ... \xi_s\|$ – векторный гауссов шум, для которого справедливо соотношение (2).

Уравнение (4) предполагает безынерционность датчиков, при необходимости учета инерционных свойств пространство состояний пополняется соответствующими компонентами для системы уравнений (1).

Как известно[1,2,3], траектории движения вектора состояния для уравнения (1) являются векторным марковским процессом. Для исследования и анализа общих закономерностей этих процессов удобно рассматривать их вероятностные характеристики. Обобщим модель (1), рассмотрев вместо точки пространства состояний $x(t)$ плотность ее распределения в этом пространстве $p(x,t)$. Для марковских процессов справедливо дифференциальное уравнение Колмогорова-Фоккера – Планка, которое при выполнении условий гладкости функций и может быть представлено в виде [2,3,4]:

$$\frac{d}{dt}P(x,t) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\varphi_i(x,u,t)p(x,t) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sigma_{ik}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j k}(x,t)p(x,t)\right]\right]; \tag{4}$$

$$p(x,t_0) = p_0(x); u = u(t); t \in [t_0;t_1],$$

где $p(x,t)$ – априорная функция плотностивероятности марковского процесса (1); $p(x,t_0) = p_0 x$ – начальная плотность вероятности процесса в момент $t = t_0$; $u^T(t) = \|u_1 \cdots u_e\|$ – векторная функция управления на интервале $t \in [t_0,t_1]$.

В отличие от выражения (1) уравнение (4) является детерминированным и при задании начальной плотности вероятности полностью определяет вероятностные свойства процесса (1).

При известном векторе измерений, определенном на интервале времени $t \in [t_0, \tau], \tau \le t_1$, для системы (3) справедливо уравнение Стратоновича для апостериорной вероятности, которое при принятых для выражения (4) допущениях может быть представленно в виде [1,2]:

$$\frac{d}{dt} p(x,t,/z^\tau) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\varphi_i(x,u,t)p(x,t/z^\tau)\right] + \frac{1}{2}\sum_{i,g=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left[\sigma_{ik}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{jk}(x,t)p(x,t/z^\tau))\right] +$$

$$p(x,t/z^\tau)\left[h(x,t) - \bar{h}(t/z^\tau)\right];$$

$$R^{-1}(x,t)\left[z(t) - \bar{h}(t/z^\tau)\right];$$

$$R(x,t) = [r_{ij}] \tag{5}$$

$$r_{ij} = \sum_{m=1}^{s} g_{im}(x,t) g_{jm}(x,t); i,j = 1,\cdots,r;$$

$$\hat{h}(x,t_0/z^\tau) = \int_{\Omega_x} h(y,t)p(y,t/z^\tau)\,dy;$$

$$p(x,t_0/z^\tau) = p(x,t_0) = p_0(x);$$

где $p(x,t_0/z^\tau)$ – апостериорная условная плотность вероятности при наличии z^τ; z^τ – совокупность измерений $z(t)$ для $\varphi_i(x,u,t)$, $\sigma_{ir}(x,t), t \in [t_0, \tau]$, $\tau \le t_1$; $h_i(x,t), g_{ik}(x,t)$ – функции, определенные для уравнений (1) и (3).

Уравнение (5) позволяет построить вероятностную модель процесса, описываемого системой уравнений (1), при наличии измерений, полученных в соответствии с зависимостью при (3), т.е. при наличии всей доступной информации на интервале $t \in [t_0, \tau], \tau \le t_1$.

Поскольку детерминированная модель может быть представлена как частный случай стохастической, уравнения (4) и (5) справедливы и для нее.

Для детализации модели траекторного управления ЛА с целью определения функций $\varphi_i(x,u,t)$ и $\sigma_{ik}(x,t)$ принята плоская кинематическая модель движения центра масс ЛА и объекта сближения [5]. При составлении математической модели движения объекта сближения приняты следующие допущения:

$$j_{npy} = 0; \quad j_{\delta y} = j_g = w_y v_y; \; v_y = \sqrt{v^2_{xy} + v_{yy}}; \tag{7}$$

$$\dot{w}_u = -\frac{1}{T_w} w_y + \frac{K_v}{T_w}\eta_y(t),$$

j_{npy}, $j_y = j_{\delta y}$ – перегрузки объекта сближения в проекциях на оси скоростной системы координат; $w_y = \frac{j_y}{v_y}$ – угловая скорость вращения вектора скорости ОС; T_w – постоянная времени контура управления ОС; K_y-коэффициент усиления контура управления ОС; $\eta_y(t)$-гауссов белый шум с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Летательный аппарат и его система управления моделируются безынерционными звеньями.

С учетом принятых допущений, а также динамических особенностей движения ЛА[5] модель процесса сближения принята в следующем виде:

$$\dot{v}_{xy} = -w_y v_{yy}; \dot{v}_{xp} = j_{npp}\cos\varphi_p + j_{\delta p}\sin\varphi_p;$$

$$\dot{v}_{yg} = w_y v_{xy}; \dot{v}_{xp} = j_{npp}\sin\varphi_p - j_{\delta p}\cos\varphi_p;$$

$$\dot{\mu}_{xy} = v_{xy}; \dot{\mu}_{xp} = v_{xp}; \dot{\mu}_{yy} = v_{yy}; \dot{\mu}_{yp} = v_{yp};$$

$$\dot{\varpi}_y = -\frac{1}{T_\varpi}\varpi_y + \frac{k_Y}{T_\varpi}\eta_y(t); \varpi_y = \frac{j_y}{v_y};$$

$$j_{npp} = j_g(t) - (k_{pxo} = k_{px}{}^2\ \alpha^2{}_p)v_p{}^2$$

$$j_{\delta p} = k_{py}{}^2\alpha_p v_p{}^2$$

$$j_{g(t(} = \frac{p_g}{m_p} = \frac{G_g}{m_{p(t)}} m_{p(t)}; \tag{6}$$

$$K_{px0} = C_{x0}A(t); K^2{}_{px} = C_x{}^2 A(t); K^2{}_{py} = C_y{}^2 A(t);$$

$$A = \frac{\rho}{2m_p(t)} S_p;$$

$$m_p = \begin{cases} m_{p0}, m_p(t) \rangle m_p(t_0) - m_T; \\ 0, m_p(t) = m_p(t_0) - m_T; \end{cases}$$

$$\dot{v}_y = \sqrt{v^2{}_{xy} + v_{yy}{}^2} = const; \varphi_y = arctg\frac{v_{yy}}{v_{yy}};$$

$$v_p = \sqrt{v^2{}_{xp} + v_{yp}{}^2}; \theta_p = arctg\frac{v_{yp}}{v_{xp}};$$

$$\dot{D}_x = \mu_{xy} - \mu_{xp}; D_y = \mu_{yy} - \mu_{yp}; \varepsilon = arctg\frac{D_y}{D_x};$$

$$\dot{D}_x = v_{xy} - v_{xp}; \dot{D}_y = v_{yy} - v_{yp};$$

$$\dot{D}_{np} = D_x\cos\varepsilon - D_y\sin\varepsilon;$$

$$\dot{D}_\delta = D_y\sin\varepsilon - D_x\cos\varepsilon;$$

$$D = \sqrt{D^2{}_x + D_y{}^2}; \dot{D} = \sqrt{\dot{D}^2{}_x + \dot{D}_y{}^2} = \sqrt{\dot{D}^2{}_{np} + \dot{D}_\delta{}^2};$$

где $v_{xy}, v_{yy}, v_{xp}, v_{yp}$ – проекции скорости объекта сближения и ЛА на оси земной инерциальной системы координат; $j_{\delta p}, j_{npp}, j_y$ – проекции ускорений ЛА и объекта сближения на оси скоростных систем координат ЛА и объекта сближения; $\mu_{xy}, \mu_{yy}, \mu_{xp}, \mu_{yp}$ – проекции радиусов-векторов объекта сближения и ЛА на оси земной системы координат; $\varphi_y, \varphi_p, \varepsilon$ – углы поворота скоростных систем координат ОС, ЛА, а также системы координат ГСМ относительно земной системы; k_y – коэффициент усиления системы управления ЛА (СУЛА); α_p – угол атаки ЛА; p_g – тяга двигателя ЛА; G_g – удельный импульс двигателя ЛА; $\dot{m}_p(t)$ – секундный расход топлива двигателя ЛА; $C_{x_0}, C_x{}^2, C_y{}^2$ – аэродинамические коэффициенты ЛА; S_p – характерная площадь ЛА; $m_p(t)$ – текущая масса ЛА; ρ - плотность воздуха; $D_x, D_y, \dot{D}_x, \dot{D}_y$ -проекции вектора дальности и его производной на оси земной системы координат; $\dot{D}_{np}, \dot{D}_\delta$ -проекции производной вектора дальности на оси системы координат головки самонаведения (ГСМ) ЛА.

Под инерциальной земной системной координат будем понимать систему, центр которой находится в точке старта ЛА, ось OXa направлена по направлению вектора скорости ЛА в момент старта, а ось OYa перпендикулярна оси OXa.

Управление ЛА в процессе сближения осуществляется путем создания ускорения в направлении, перпендикулярном вектору скорости ЛА. Для современных ЛА управляющая перегрузка ограничена по следующим причинам:

– прочности корпуса ЛА;

– возможности создания аэродинамической силы при техническом ограничении углов отклонения управляющих поверхностей для больших высот и малых скоростей.

Следует, однако, отметить, что для ЛА с газодинамическими органами создания управляющей силы ограничения второго рода снимаются [5].

Кроме того, для всех ЛА характерны ограничения, связанные с общей ограниченностью энергетических ресурсов ЛА, в том числе и энергетических затрат на управление.

Сформулированные выше ограничения могут быть записаны в виде квадратичных неравенств:

$$U^T B_i U \le U_{i\max}{}^2; i = 1, \cdots, s_0 \le n; \quad (7)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} U_{\max}{}^T CU dt \le E_{\max},$$

где $B_i, i = 1, \cdots, s_0, c$ – симметричные матрицы весов управляющих воздействий; $U_{\max} = \left\| U_{1\max} \cdots U_{s_0\max} \right\|$ – вектор граничных значений управляющих воздействий; $E_{\max}$ - максимальные энергетические затраты на управление;

Для модели (6) ограничения вида (7) могут быть записаны так:

$$U^2(t) \le U^2 \max; t \in [t_0; t_1],$$

$$\int_{t_0}^{t_1} U^2 dt \le E_{\max}.$$

В качестве критерия оптимальности принят терминальный критерий в виде квадратичной формы вектора состояния, являющийся оценкой рассогласования между достигнутыми и желаемым конечным состоянием системы:

$$J(x) = x^T(t_1)Ax(t_1),$$

где A – симметричная матрица относительных весов координат состояния.

Наиболее распространенным критерием, используемым для оценки качества процесса траекторного сближения является квадрат вектора пролета ЛА-квадрат промаха [2;5]:

$$J(x) = D^2(t_1) = (\mu_{xy}(t_1) - \mu_{xp}(t_1))^2 + \ (\mu_{yy}(t_1) - \mu_{yp}(t_1)). \tag{8}$$

Для стохастического процесса критерий оптимальности является случайной величиной. В постановке задачи стохастической оптимизации [6] осуществляется минимизация математического ожидания функционала:

$$\hat{J}(u) = M[J(x)] = \int_{\Omega_x} j(x)p(x,t_1)dx,$$

где $p(x,\ t)$- плотность вероятности распределения процесса в конечный момент времени.

Для поиска необходимых условий оптимальности воспользуемся принципом множителей Лагранжа, преобразовав ограничения неравенства (7) в ограничения равенства путем введения дополнительных переменных [7,8]:

$$U^2(t) - U^2{}_{\max} + \varepsilon_u{}^2 = 0; \varepsilon_u \in R(t_0;t_1)\,; \tag{9}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} U^2 dt - E_{\max} + \varepsilon_E{}^2 \ = 0; \varepsilon_E \in \ R,$$

где $\varepsilon_u(t), \varepsilon_E$ – дополнительные переменные для задачи минимизации.

Функционал Лагранжа для выражения (8) при наличии ограничений (9) может быть записан так:

$$F(u,\alpha,\beta,\varepsilon_{u_1},\varepsilon_E) = M[D^2(t_1)] + \alpha[\varepsilon^2{}_E - E_{\max}] \ +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \left[(\alpha + \beta(t))U^2(t) + (\varepsilon_u(t) - U_{\max}{}^2)\beta(t)\right]dt, \tag{10}$$

где $\alpha, \beta(t)$ – множители Лагранжа; $U(t), \varepsilon_u(t), \varepsilon_E$ – переменные аргументы функционала.

Воспользовавшись стохастическим принципом максимума [2] для выражения(10) при дифференциальных ограничениях на плотность вероятности вида (4) получим необходимые условия оптимальности [2,4]:

$$\frac{d}{dt}p(x,t)=-\sum_{i=0}^{n}\frac{d}{dx_i}[\,[\varphi_i(x,u,t)p(x,t)]+\frac{1}{2}\sum_{i,j=o}^{n}\sum_{k=0}^{m}\frac{d}{dx_i}[\sigma_{jk}(x,t)p(x,t)]\,]$$

$$\frac{d}{dt}\lambda(x,t)=-\sum_{i=0}^{n}\varphi_i(x,u,t)\frac{d}{dx_i}\lambda(x,t)-\frac{1}{2}\sum_{i,j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\sigma_{ik}(x,t)\sigma_{jk}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial_{x_i}\partial_{x_j}}\lambda(x,t); \tag{11}$$

$$\int_{\Omega_x}\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dx_i}\lambda(x,t)\frac{d}{d_u}\varphi_i(x,u,t)p(x,t)dx=2U(t)(\beta(t)+\alpha);$$

$$p(x,t_0)=p_0(x);$$

$$\lambda(x,t_1)=D(t_1)=(\mu_{xy}(t_1)-\mu_{xp}(t_1))^2+(\mu_{yy}(t_1)-\mu_{yp}(t_1))^2;$$

$$U^2(t)-U_{\max}{}^2+\varepsilon^2{}_u(t)=0;\alpha\varepsilon_E=0;\beta(t)\varepsilon_u(t)=0;$$

$$\int_{t_0}^{t_1}u^2dt-E_{\max}+\varepsilon_E{}^2==0;\alpha\varepsilon_E=0;\beta(t)\varepsilon_u(t)=0;$$

$$\int_{\Omega_x}\left[\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x,u,t)\frac{d}{dx_i}\lambda(x,t)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sigma_{iik}(x,t)\sigma_{jk}(x,t)\frac{d^2}{d_{x_i}d_{x_j}}\lambda(x,t_1)\right]p(x,t_1)dx=-du(t_1),$$

где $\lambda(x,t)$– сопряженная функция, удовлетворяющая обратному уравнению Колмогорова при $t\in\ [t_0,t_1]$.

Таким образом, управление, удовлетворяющее необходимым условиям оптимальности, должно удовлетворять решению двухточечной краевой задачи (ДТКЗ) для дифференциальных уравнений в частных производных (11), соответствующих прямому и обратному уравнениям Колмогорова [3] для процесса (1). Решение ДТКЗ (11) является функцией от начального значения плотности вероятности $p(x,t_0)$. С точки зрения теории управления, это решение использует лишь информацию о процессе траекторного сближения. Для реализации управления с обратной связью, использующего информацию измерений, должна быть сформулирована задача совместного оценивания и управления. Эту задачу сформулируем как задачу условной оптимизации управления на интервале времени $t\in[\tau;t_1];\tau\ge t_0$ при наличии наблюдений, полученных системой на интервале $t\in[t_0;\tau\ ];\tau\le t_1$:

$$\hat{J}(u/Z^r)=M[J(x,u/z^r]=\int_{\Omega_x}J(x,u)p(x,t_1/z^r)dx,$$

где $\hat{J}(u/z^r)$ – значение функционала при известной функции наблюдений z^r; $p(x,t_1/z^r)$ - апостериорная плотность вероятности состояния в момент времени $t=t_1$.

Решение этой задачи может быть получено как решение задачи (11) при

$$t \in [\tau; t_1]; \tau \geq t_0;\ p(x,r) = p(x;r/z^r)\ ,$$

где $\tau \in [t_0;t_1]$ – момент времени, для которого определяется оптимальное управление; $p(x,r/z^r)$ – апостериорная плотность вероятности в момент времени τ, которая определяется из уравнения Стратоновича (5).

Таким образом, в математической постановке решение задачи совместного оценивания и управления заключается в совместном решении задачи Коши и ДТКЗ для дифференциальных уравнений в частных производных. Аналитических решений для подобных задач нет, исключением является линейный случай для выражения (1) при квадратичном функционале без ограничений, численные решения достаточно трудоемки. Вместе с тем, в предложенной постановке задача допускает единую трактовку для детерминированных и стохастических систем, а также для задач совместного оценивания и управления.

Список литературы

1. *Дуб Дж.Л.* Вероятностные процессы. /Пер. с англ. – М.: ИЛ, 1956. – 318 с.

2. *Справочник* по теории автоматического управления./Под ред.А.А.Красовского. – М.: Наука, 1987. – 640 с.

3. *Казаков И.Е., Гладков Д.И.* Методы оптимизации стохастических систем. – М.: Наука, 1987. – 304 с.

4. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. – М.: Сов.радио, 1977. – 488 с.

5. *Бондер В.А.* Оптимизация терминальных стохастических систем. – М.: Машиностроение, 1987. – 612 с.

6. *Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С.* Динамика полета. – М.: Машиностроение, 1973. – 616 с.

7. *Берсекас Д.* Условия оптимизации и методы множителей Лагранжа /Пер.с англ. – М.: Радио и связь, 1987. – 212 с.

8. *Пугачев В.С., Синицин И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. - М.: Наука, 1985. - 561 с.

9. *Казаков И.Е.,Мишаков А.Ф.* Авиационные управляемые ракеты. – М.:ВВИА им. проф Н. Е.Шуковского ,1985. – 423 с..

Стаття надійшла до редакції 21 грудня 1999 року.