

УДК 539.3

В.Л. Бродовий

## ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ СКЛАДЕНИХ ПЛИТ ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИМ МЕТОДОМ ПОТЕНЦІАЛУ

*Викладено теоретичні положення та методику застосування чисельно-аналітичного методу потенціалу до розрахунку складених тонких плит Кірхгофа – Лява. Застосовано лінійну апроксимацію щільностей, новий метод перетворення кутових членів, багатовимірне узагальнення інтерполяції за діаметрами груп граничних елементів для уточнення розв'язку. Наведено приклади та охарактеризовано класи задач, які можуть бути ефективно розв'язані за допомогою запропонованої методики.*

Значна частина просторових конструкційних елементів промислових споруд (стінові конструкції, покриття, перекриття, перегородки тощо) можуть бути ефективно промодельовані тонкими плитами, в тому числі кусково-однорідними. Іноді такі елементи мають дуже складну геометрію (розрізи, отвори, неопуклі границі) і тому знаходяться у складному напружено-деформованому стані. Для аналізу таких станів необхідно застосовувати чисельні методи, які б давали можливість отримувати поля напружень і переміщень у конструкції з будь-яким заздалегідь вибраним ступенем деталізації. Цю вимогу задовольняє, зокрема, прямий чисельно-аналітичний метод потенціалу [1]. Пропонується відповідна методика для чисельного розрахунку плоского напруженого стану та згину кусково-однорідних складених плит Кірхгофа – Лява.

**1. Узагальнення інтегральних співвідношень.** Для однорідних ізотропних тонких плит, що не утворюють складеної системи, можна записати такі дискретні алгебраїчні аналоги граничних інтегральних рівнянь:

$$\Omega_{ni}^{(p)}(x_m^{(p)}) = \int_S q_j(\xi) \hat{\Omega}_{ni}^{(p)} U_j^*(z_m^{(p)}) dS +$$

$$+ \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_{\Gamma_k} \sigma_{nj}^{(k)} \hat{\Omega}_{ni}^{(p)} U_j^*(z_m^{(p)}) L(t; t_j) d\Gamma - \int_{\Gamma_k} u_j^{(k)} \hat{\Omega}_{ni}^{(p)} \Sigma_{nj}^*(z_m^{(p)}) L(t; t_j) d\Gamma \right\}; \quad (1)$$

$$\Psi_n^{(p)}(x_m^{(p)}) = \int_S q(\xi) \hat{\Psi}_n^{(p)} W^*(\xi - x_j^{(k)}) dS +$$

$$+ \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_{\Gamma_k} \left\{ \psi_n^{(k)}(\xi_j^{(k)}) \hat{\Psi}_n^{(p)} W^*(z_j^{(k)}) + M_n^{(k)}(\xi_j^{(k)}) \hat{\Psi}_n^{(p)} \Phi_n^*(z_j^{(k)}) \right\} L(t; t_j) d\Gamma - \right. \quad (2)$$

$$\left. - \int_{\Gamma_k} \left\{ w^{(k)}(\xi_j^{(k)}) \hat{\Psi}_n^{(p)} V_n^*(z_j^{(k)}) + \varphi_n^{(k)}(\xi_j^{(k)}) \hat{\Psi}_n^{(p)} M_n^*(z_j^{(k)}) \right\} L(t; t_j) d\Gamma + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + w^{(k)}(\xi_j^{(k)}) \Psi_n^{(p)} H_n^*(\xi^{(k)} - x_m^{(p)}) L(\xi^{(k)}; \xi_j^{(k)}) \Big|_{\xi^{(k)}=X_1^{(k)}}^{\xi^{(k)}=X_2^{(k)}} + M_n^{(k)}(\xi_j^{(k)}) \times \\
& \times \left[ L(X_2^{(k)}; \xi_j^{(k)}) \frac{\vec{n}^+ \times \vec{n}}{1 + \vec{n}^+ \cdot \vec{n}} \Psi_n^{(p)} W^*(X_2^{(k)} - x_m^{(p)}) - L(X_1^{(k)}; \xi_j^{(k)}) \times \right. \\
& \left. \times \frac{\vec{n}^- \times \vec{n}}{1 + \vec{n}^- \cdot \vec{n}} \Psi_n^{(p)} W^*(X_1^{(k)} - x_m^{(p)}) \right] \Bigg\}, \quad p = \overline{1, N}, \quad m = 1, 2,
\end{aligned}$$

де  $\Omega_{ni}^{(p)}$ ,  $\Psi_n^{(p)}$  — вузлові значення довільних компонентів ПНС та згину;  $x_m^{(p)}$ ,  $\xi_j^{(k)}$  — вузли на граничних елементах;  $z_m^{(p)} = \xi - x_m^{(p)}$  — координати вузлів, приведені до точки коллокації  $x_m^{(p)}$ ;  $t$ ,  $t_j$  — дугові координати;  $q(\xi)$ ,  $q_j(\xi)$  — інтенсивність масового навантаження згину та ПНС;  $u_j^{(k)}$ ,  $\sigma_{nj}^{(k)}$ ,  $w^{(k)}$ ,  $\varphi_n^{(k)}$ ,  $V_n^{(k)}$ ,  $M_n^{(k)}$  — вузлові переміщення та зусилля (нормальні та дотичні переміщення і напруження, прогин, кут повороту, кірхгофівська перерізуюча сила і згинальний момент);  $U_j^*$ ,  $\Sigma_j^*$ ,  $W^*$ ,  $\Phi_n^*$ ,  $V_n^*$ ,  $M_n^*$ ,  $H_n^*$  — сингулярні ядра (в рівняннях (1)–(2) перед ними для позначення ядер інтегральних представлень тих чи інших компонентів напружено-деформованого стану стоїть відповідний диференціальний оператор  $\hat{\Omega}_m^{(p)}$  або  $\hat{\Psi}_n^{(p)}$ );  $L(t, t_j)$  — інтерполяційний поліном Лагранжа для лінійної розривної апроксимації, яка застосовується. У рівнянні згину (2) застосовано редукцію кутових членів [2], яка дозволяє звести додаткові зосереджені доданки до поправок коефіцієнтів при  $M_n^{(k)}$  і  $w^{(k)}$ , тобто до доданків типу потенціалів простого та подвійного шарів. Таке зведення полегшує подальше узагальнення рівнянь (1) і (2) на випадок складеної плити.

Виведемо аналогічні інтегральні співвідношення для складеної кусково-однорідної плити. Вважаємо, що така плита складається з  $M$  однорідних плит-суперелементів, які характеризуються різними пружними константами  $E_k$ ,  $\mu_k$  і товщинами  $h_k$ ,  $k = 1, \dots, M$  (рис. 1, а). На границях спряження елементів задаються умови ідеального контакту по переміщеннях та зусиллях:

$$\begin{aligned}
u_n^+ + u_n^- = 0, \quad \sigma_{nn}^+ + \sigma_{nn}^- = 0, \quad w^+ - w^- = 0, \quad M_n^+ + M_n^- = 0, \\
u_t^+ + u_t^- = 0, \quad \tau_{nt}^+ + \tau_{nt}^- = 0, \quad \varphi_n^+ + \varphi_n^- = 0, \quad V_n^+ + V_n^- = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Компоненти зусиль та переміщень на площадках беруться у місцевих системах координат відповідних границь.

Для узагальнення рівнянь (1)–(2) необхідно розбити границю складеної плити, яка складається зі спільної зовнішньої границі  $\Gamma_0$  та внутрішніх границь контакту  $\Gamma_k$ , спільною системою граничних елементів і призначити кожній ділянці  $\Gamma_k$  додатній напрямок обходу (рис. 1, б). Всі елементи нумеруються підряд (наскрізь). Таким чином, інтеграли по контактних елементах увійдуть до системи рівнянь (1)–(2) два рази у двох протилежних напрямках. З урахуван-

ням цього та умов (3) з систем рівнянь (1) і (2), записаних для кожної плити-суперелемента, треба виключити величини  $\Omega^-$ ,  $\Psi^-$  та інтеграли у від'ємних напрямках ділянок контакту  $\Gamma_k$ . Отримана система рівнянь буде вміщувати невідомі на системі відрізків та інтеграли за цією системою вже без урахування складеної геометрії плити і взагалі її внутрішньої частини. Записувати таку систему в загальному вигляді за аналогією з рівняннями (1) – (2) не дуже зручно. Зручніше це зробити на етапі чисельної реалізації: кожний доданок вигляду  $\omega^-(\xi_j^{(k)}) \int_{\Gamma_k^-} \widehat{\Psi}_v^{(p)} \chi_n^*(z_m^{(p)}) d\Gamma_k^-$  необхідно обчислити замінивши  $\omega^-(\xi_j^{(k)}) = \pm \omega^+(\xi_j^{(k)})$ ,

$\Gamma_k^- = -\Gamma_k^+$ , а потім внести до системи лінійних рівнянь на відповідне місце. Ці заміни не ускладнюють чисельної процедури, але значно спрощують структуру розв'язувальної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Це можна бачити на прикладі розрахункової схеми плоскої задачі для перерізу тришарової плити (рис. 2, а), якою можна моделювати ґрунтову основу споруди або дорожнє покриття.

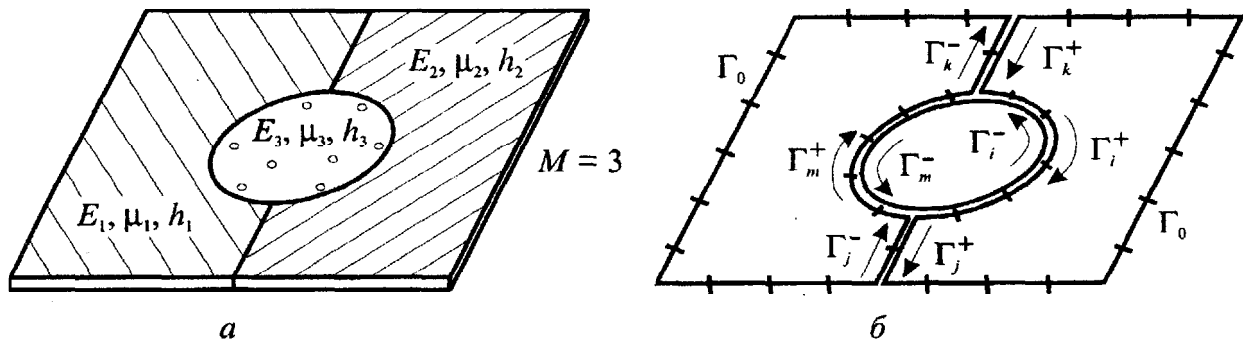


Рис. 1. Складена плита (а) і дискретизація її границі (б)

Дійсно, якщо порівняти для такої плити структуру основної матриці системи з включенням всіх невідомих на ділянках  $\Gamma_k^+$  і  $\Gamma_k^-$ ,  $k = 1, \dots, N$  і умов контакту (рис. 2, б) із структурою матриці системи, отриманої шляхом наскрізної нумерації граничних елементів з виключенням невідомих на  $\Gamma_k^-$  (рис. 2, в), то побачимо, що розмірність другої системи менша від розмірності першої на  $8M_k = 16P$ , де  $M_k$  — загальна кількість граничних елементів на ділянках контакту (на рис. 2 показана розмірність систем у граничних елементах, а не у степенях вільності; останніх учетверо більше, ніж перших). Таким чином, у другій системі операції з редуції кількості невідомих та ущільнення системи вже пророблені на етапі її складання, що і є основною перевагою наскрізної нумерації граничних елементів.

Після розв'язання лінійної алгебраїчної системи побудова внутрішнього поля за представленнями Соміліана на кожному суперелементі виконується з використанням формул (1)–(2), у яких цього разу відомі всі граничні умови. Це є стандартною процедурою методу граничних елементів, яка не змінюється від введення у розгляд кусково-однорідної плити.

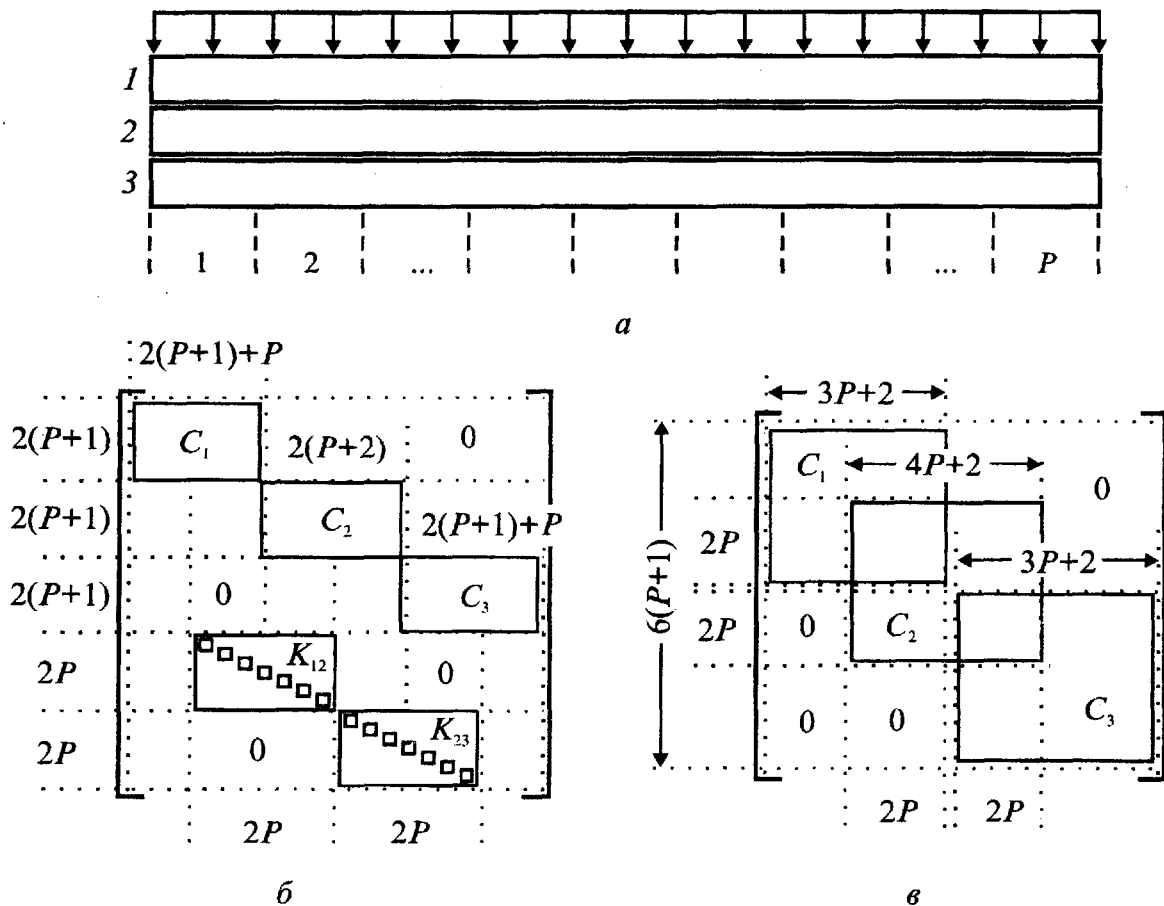


Рис. 2. Тришарова плита: *а* – розрахункова схема; *б* – матриця схеми розв’язувальної системи з явними умовами контакту; *в* – матриця системи після наскрізної нумерації граничних елементів;  $P$  – кількість граничних елементів на горизонтальній поверхні (на торцях по одному);  $C_1, C_2, C_3$  – матриці інтегральних коефіцієнтів одиничних станів для трьох шарів;  $K_{12}, K_{23}$  – стрічкові матриці коефіцієнтів умов контакту між плитами 1 і 2 та 2 і 3.

**2. Уточнення розв’язку та оцінка похибки.** Для уточнення отриманого наближеного розв’язку і апостеріорної оцінки його похибки запропоновано застосовувати багатовимірне узагальнення інтерполяційного методу Річардсона [3]. На жаль, для загальної змішаної задачі не доведено, що за допомогою методу потенціалу можна отримати наближений розв’язок, гарантовано більший або менший фіксованого у наперед заданій точці або за якою-небудь практично важливою нормою, як це робиться у зустрічних варіаційних методах [4]. Тому описана далі методика уточнення поки що залишається емпіричною.

Нехай спільна границя  $\Gamma_0 = \Gamma_0 \cup \Gamma_k$  складається з кількох характерних за геометрією, граничними умовами та навантаженнями фрагментів  $\Gamma_k$ ,  $k = 1, \dots, R$ . Так, для плити на рис. 1, *а* це – бічні ребра, дві прямолінійні та дві дугоподібні границі контакту, тоді як для плити на рис. 2, *а* такими фрагментами будуть верхня та нижня поверхні, а також поверхні контакту і торці. Вибір характерних ділянок залежить від дослідника і диктується особливостями задачі.

Будемо шукати розв’язок (тобто певну компоненту пружного поля)  $\Omega$  та її похибку в одній фіксованій точці  $\xi_0$ . Ця точка може належати як границі об-

ласті (тоді розв'язок буде отриманий безпосередньо з розв'язувальної системи), так і її внутрішній частині, для чого компоненту  $\Omega$  доведеться знаходити за представленнями Соміліана. Позначимо через  $\varepsilon$  ( $\Gamma_k$ ) сітку граничних елементів на ділянці  $\Gamma_k$ ,  $k = 1, \dots, R$ . Нехай крок кожної з таких сіток буде  $\varepsilon$  ( $\Gamma_k$ ), тобто довжина найдовшого з елементів, дорівнює  $l_k$ . Сукупність кроків сіток, на яких отримано основний наближений розв'язок  $\Omega_0$  ( $\xi_0$ ), позначимо через  $L_1, L_2, \dots, L_R$ . Для уточнення розв'язку використано ряд додаткових уточнених за окремими фрагментами  $\Gamma_k$  розв'язків. Введемо  $P$  додаткових груп сіток таких, що у  $k$ -й групі дрібність розбиття по одній з ділянок сильно збільшена у порівнянні з вихідною, тобто  $k$ -а група сіток має параметри  $L_1, \dots, L_{k-1}, \delta_k, L_{k+1}, \dots, L_R$ , де  $\delta_k \ll L_k$ . Кожна з цих груп сіток дає  $k$ -й додатковий наближений розв'язок  $\Omega_k$  ( $\xi_0$ ).

Ідея алгоритму полягає в екстраполяції точного розв'язку за основним та сукупністю отриманих наближених розв'язків. Незалежними змінними при цьому виступають кроки сітки  $l_k$ ,  $k = 1, \dots, R$ , а потрібна уточнена оцінка знаходиться як значення екстраполянти в нулі. Вказану екстраполяцію виконує гіперплощина, яка проходить у  $(R+1)$ -вимірному евклідовому просторі через  $R$  точок  $\{ \Omega_k$  ( $\xi_0$ ),  $L_1, \dots, L_{k-1}, \delta_k, L_{k+1}, \dots, L_R \}$ ,  $k = 1, \dots, R$ , що відповідають додатковим наближеним розв'язкам, і точку  $\{ \Omega_0$  ( $\xi_0$ ),  $L_1, \dots, L_R \}$ , яка описує основний розв'язок. Тоді шуканою оцінкою точного розв'язку  $\Omega_e$  є точка перетину цієї гіперплощини з віссю  $\{ l_1 = 0, l_2 = 0, \dots, l_R = 0 \}$ . Цю величину слід знаходити з розв'язку такої лінійної системи рівнянь відносно неї та коефіцієнтів  $k_1, \dots, k_R$ :

$$\Omega_0 = \Omega_e + k_1 L_1 + k_2 L_2 + \dots + k_R L_R;$$

$$\Omega_1 = \Omega_e + k_1 \delta_1 + k_2 L_2 + \dots + k_R L_R;$$

...

$$\Omega_M = \Omega_e + k_1 L_1 + k_2 L_2 + \dots + k_R \delta_R.$$

За оцінку похибки можна брати одну з двох величин:

$$\Delta_1 \cong |\Omega_0 - \Omega_e|;$$

$$\Delta_2 \cong \max \Omega - \min \Omega, \quad 0 \leq l_n \leq L_n, \quad n = 1, \dots, R,$$

де  $\Omega = \Omega_e + k_1 l_1 + k_2 l_2 + \dots + k_M l_M$ . Оцінка  $\Delta_1$  не більша за оцінку  $\Delta_2$ , тому друга є більш консервативною.

**3. Приклади та висновки.** Запропонована методика дозволяє отримувати результати, достовірні з кількісної та якісної точок зору, для таких класів задач, як кусково-однорідні багатокутні плити з отворами, включеннями і розрізами, при змішаних граничних умовах і наявності точок розділу граничних умов. Такі задачі успішно розв'язуються методом розрізання області плити на опуклі однозв'язні фрагменти (які не обов'язково збігаються за границями з однорідними фрагментами), що значно покращує обумовленість розв'язуючих систем та збіжність послідовності розв'язків. Приклад задачі для плоскої деформації плити з включенням показано на рис. 3, а для згину плити з отвором — на рис. 4.

Для плити з включенням оцінка похибки  $\Delta_2$  (див. рис. 3, а) складає від 18 % у лівому закріпленні та 2 % — у правому, до 45 % — у точці А

(див. рис. 3, *a*), що можна вважати цілом прийнятним результатом для напружень у сингулярних зонах.

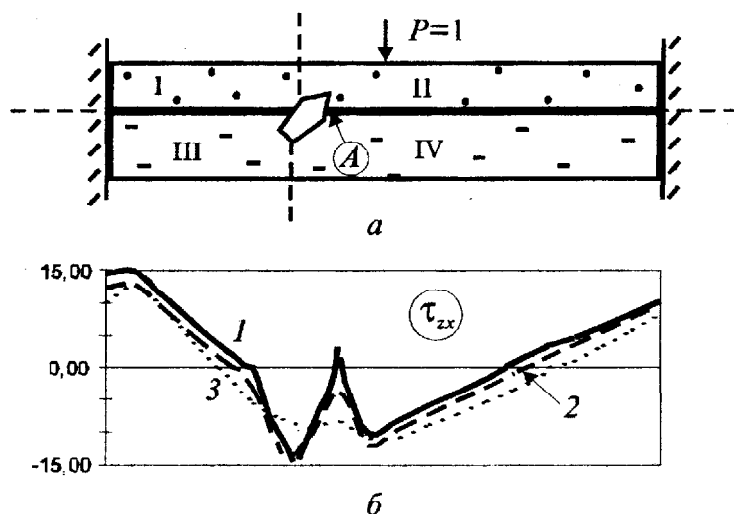


Рис. 3. Плоска деформація двошарової плити з гострим включенням: *a* – розрахункова схема і поділ на суперелементи I, II, III, IV; *b* – епюри дотичних напружень  $\tau_{zx}$  на границі розділу фаз: 1 – прямий розрахунок, 2 – екстраполяція, 3 – метод скінченних елементів

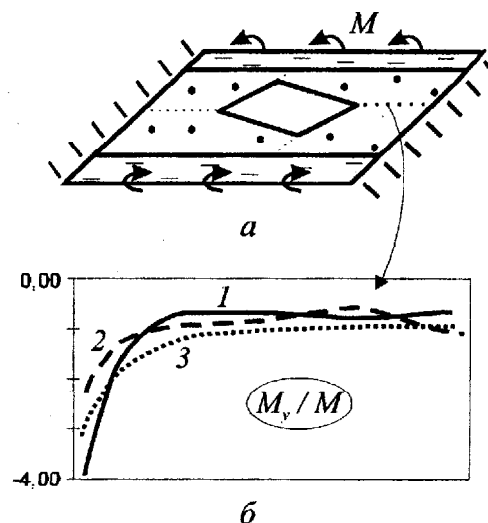


Рис. 4. Згин підкріпленої плити з отвором: *a* – розрахункова схема і поділ на суперелементи; *b* – епюри згинальних моментів  $M_y$ : 1 – прямий розрахунок, 2 – екстраполяція, 3 – метод скінченних елементів

Найбільш несприятливими умовами є такі, в яких зони типу примежового шару можуть взаємодіяти на порівняно невеликих відстанях (рис. 4). Тут оцінка похибки  $\Delta_2$  складає до 75 %. Але у вказаних випадках застосовність моделі Кірхгофа – Лява взагалі може бути поставлена під сумнів, тому досягнення збіжності у таких зонах не є критичною вимогою до моделі.

#### Список літератури

1. Верюжский Ю.В. Численные методы потенциала в некоторых задачах прикладной механики. – К.: Вища шк., 1978. – 184 с.
2. Бродовий В.Л. Редукція кутових членів граничних інтегральних рівнянь згину тонких плит // Вісник КМУЦА. – 1998. – № 1. – С. 288–290.
3. Heise U. Remarks on the choice and on the numerical treatment of integral equations for plane elastostatics // “Innovative Numerical Analysis in Engineering Science”. Proceedings of 2nd International Symposium, Montreal, 1980. – Charlottesville, 1980. – P. 351–359.
4. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – 2-е изд. – М.: Наука, 1970. – С. 297–333.
5. Бродовой В.Л. Асимптотические свойства эластопотенциалов, аппроксимирующих напряженное состояние тонких плит // Мат. моделирование в механике деформируемых тел. Методы гранич. и конеч. элементов: XVI Междунар. конф. 23–26 июня 1998 г., Санкт-Петербург: Тез. докл. – СПб., 1998. – Т. 1. – С. 25–26.