

УДК 620.178.16:519.876.5(045)

О.А. Вишневський

**МОДЕЛЬ ЗАЛЕЖНОСТІ ВЕЛИЧИННИ АБРАЗИВНОГО ЗНОСУ ВІД ЛІНІЙНОГО**

Інститут економіки та менеджменту НАУ, e-mail: eco@nau.edu.ua; www.nau.edu.ua.

Визначено зв'язок площі зіткнення гумового ролика і зразка з величиною лінійного зносу поверхні матеріалу і покриття. Наведено математичну модель залежності величини об'ємного і вагового зносу від максимальної глибини лунки під час тертя об нежорстко закріплені абразивні частинки. Установлено зв'язок об'ємного і вагового зносу з площею поверхні зіткнення гумового ролика зі зразком під час тертя об нежорстко закріплені абразивні частинки.

**Постановка проблеми і її зв'язок з науково-практичними задачами**

Модель зносу поверхні зразка під час тертя о нежорстко закріплені абразивні частинки повинна містити в собі залежність вагового зносу від параметрів форм поверхні робочої частини експериментальної установки та параметрів, які визначають зносостійкість матеріалу і покриття, що зміцнюють поверхню деталей.

Поставлена задача є складною і тому дотепер у повному обсязі не вирішена. Важливість розв'язання задачі впливає з можливості передбачення результатів зносу по наперед заданим параметрам, які впливають на зносостійкість матеріалів.

**Огляд публікацій і аналіз невирішених проблем**

Моделюванням процесу абразивного зносу займалися провідні фахівці в галузі тертя і зносу: М.М. Тененбаум, Д.Б. Бернштейн [1], І.В. Крагельський [2] та ін. Однак установити зв'язок між ваговим зносом і максимальною глибиною лунки або зносом і площею поверхні лунки не вдалося жодному дослідникові.

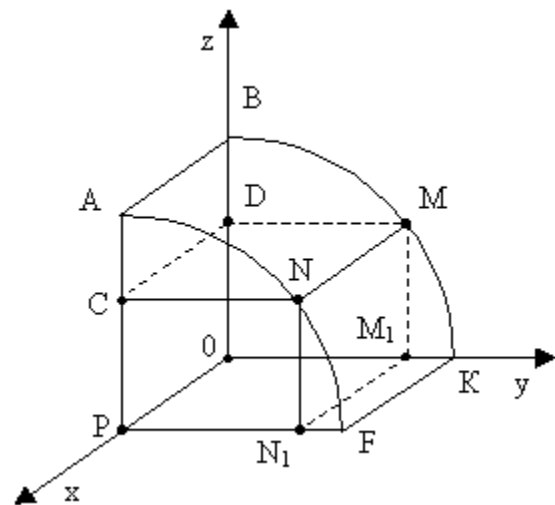
У праці [3] зроблено спробу знайти розв'язок цієї задачі, але отриманий результат є громіздким і незручним у використанні. У праці [4] побудовано модель абразивного зносу, яка не враховує залежності вагового зносу від лінійного, не вказані методи побудови моделі і немає універсальної моделі для всіх матеріалів або універсального принципу побудови моделі.

**Мета** дослідження – проаналізувати результати зносу поверхні деталей, які пов'язані з особливостями геометричних форм поверхні робочої частини експериментальної установки.

Для деталей різного профілю важливе значення має передбачення величини зносу при дії абразивних частинок різної твердості і розмірів. Модель абразивного зносу дозволяє передбачати величину зносу за об'ємом і масою залежно від максимального лінійного зносу або площі поверхні стику ролика зі зразком. Отже, з'являється реальна можливість визначити оптимально зносостійке покриття для конкретних умов експлуатації.

**Результати досліджень**

Розглянемо схематичне зображення четвертої частини гумового ролика в прямокутній системі координат (див. рисунок).



Прив'язка четвертої частини гумового ролика до прямокутної системи координат  $O_{xy}$

Максимальна глибина лунки на поверхні зразка, який зношується, відповідає довжині відрізка  $DB = h$ . Якщо прийняти  $OD = z_1$ , то з того, що  $OB = R$  ( $R$  – радіус ролика), випливає

$$DB = OB - OD = R - z_1.$$

Ширина ролика  $OP = b$ , тому координати точки  $P(b; 0; 0)$ .

Половина об'єму лунки, яка зношується, відповідає частині ролика  $ABMNCD$ , а половина площі поверхні лунки – частині циліндричної поверхні  $ABMN$ . Проекцією поверхні  $ABMN$  на площину  $O_{xy}$  буде область  $D$  – прямокутник  $POM_1N_1$ .

Рівняння циліндричної поверхні ролика ( $ABMN$ ) має вигляд

$$z^2 + y^2 = R^2. \quad (1)$$

З формули (1) одержимо вираз змінної  $z$  через змінну  $y$  і константу  $R$ :

$$z = \sqrt{R^2 - y^2}.$$

Використовуючи довідник [5], знайдемо площу  $Q$  циліндричної поверхні  $ABMN$ :

$$Q_1 = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2} d\sigma, \quad (2)$$

де  $p, q$  – часткові похідні функції  $z(x, y)$ :

$$p = \partial z / \partial x; \quad q = \partial z / \partial y;$$

$d\sigma$  – елемент області  $D$  – проекції циліндричної поверхні ( $ABMN$ ) на площину  $O_{xy}$ ;  $z = f(x, y)$  – рівняння даної поверхні.

Формула (2) еквівалентна формулі

$$Q_1 = \iint_D \sqrt{1+(z'_x(x; y))^2+(z'_y(x; y))^2} dx dy, \quad (3)$$

де  $z(x; y) = \sqrt{R^2 - y^2}$ ;

область  $D$ :  $0 \leq x \leq b, 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - z_1^2}$ ;

$$z'_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{\sqrt{R^2 - y^2}}.$$

Формулу (3) можна переписати у вигляді:

$$Q = 2 \iint_D \sqrt{1 + \frac{y^2}{R^2 - y^2}} dx dy, \quad (4)$$

де  $Q$  – площа поверхні зіткнення ролика і зразка.

Після перетворень формули (4) маємо

$$Q = 2 \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}} dx dy. \quad (5)$$

Якщо перейти від формули (5) до повторних інтегралів, одержимо

$$Q = 2 \int_0^b dx \int_0^{\sqrt{R^2 - z_1^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}} dy.$$

Зробивши відповідні перетворення, одержимо формулу зв'язку площі  $Q$  зіткнення ролика і зразка з максимальним лінійним зносом:

$$Q = 2bR \arcsin \sqrt{2 \frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2}. \quad (6)$$

Перевіримо роботу моделі (6) у граничних умовах.

1. Знайдемо

$$\lim_{h \rightarrow 0} Q = \lim_{h \rightarrow 0} 2bR \arcsin \sqrt{2 \frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2}.$$

Очевидно, що

$$\lim_{h \rightarrow 0} Q = 2bR \arcsin 0 = 0.$$

Це цілком логічно, оскільки на самому початку експерименту тертя відбувається по відрізьку, тобто площа зношеної поверхні дорівнює нулеві.

2. Знайдемо

$$\lim_{h \rightarrow h} 2bR \arcsin \sqrt{2 \frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2} = 2bR \arcsin 1 = \pi bR.$$

У цьому разі маємо площу половини бічної поверхні циліндра (ролика), що відповідає дійсності.

Отже, отримана модель (6) залежності площі зносу від максимального лінійного зносу складена коректно.

Визначимо залежність об'ємного і вагового зносу від максимального лінійного зносу.

Використовуючи рисунок і довідник [5], одержимо

$$I_V = 2 \iiint_T dx dy dz,$$

де  $T$  – половина частини ролика, що ввійшла в зразок.

Застосовуючи повторне інтегрування, отримаємо

$$\begin{aligned} I_V &= 2 \int_0^b dx \int_0^{\sqrt{R^2 - z_1^2}} dy \int_{z_1}^{\sqrt{R^2 - y^2}} dz = \\ &= \frac{bR^2}{2} \arcsin \frac{\sqrt{R^2 - z_1^2}}{R} - \frac{b}{2} z_1 \sqrt{R^2 - z_1^2}. \end{aligned}$$

Оскільки  $z_1 = R - h$ , одержимо

$$\begin{aligned} I_V &= bR^2 \arcsin \frac{\sqrt{R^2 - (R-h)^2}}{R} - \\ &- b(R-h) \sqrt{R^2 - (R-h)^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Після алгебричних перетворень рівнянь (7) одержимо формулу об'ємного зносу:

$$I_V = bR^2 \left( \arcsin \sqrt{2 \frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2} - \left(1 - \frac{h}{R}\right) \sqrt{2 \frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2} \right). \quad (8)$$

Знаючи щільність досліджуваного зразка або покриття, можна обчислити ваговий знос:

$$I_m = \rho I_V. \quad (9)$$

Підставивши у формулу (9) залежність (8), одержимо

$$I_m = \rho bR^2 \left( \arcsin \sqrt{2 \frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2} - \left(1 - \frac{h}{R}\right) \sqrt{2 \frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2} \right). \quad (10)$$

Перевіримо роботу моделі (7) у граничних умовах:

а) розглянемо момент початку експерименту, тобто  $h \rightarrow 0$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0} I_V = bR^2 (\arcsin 0 - \sqrt{0}) = 0$ , що

цілком правильно, оскільки в початковий момент часу величина об'ємного зносу дійсно дорівнює нулеві;

б)  $h \rightarrow R$   $\lim_{h \rightarrow R} I_V = bR^2 \arcsin 1 = \frac{\pi R^2 b}{2}$ , що відповідає половині об'єму ролика.

Для визначення зв'язку вагового зносу  $I_m$  з площею  $Q$  поверхні зіткнення ролика зі зразком знайдемо залежність між  $\frac{h}{R}$  і  $Q$ .

Із залежності (6) одержимо

$$\sqrt{2\frac{h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2} = \sin \frac{Q}{2bR}. \quad (11)$$

Піднесемо рівняння (11) до квадрата. Отримаємо, що рівняння (11) рівносильне системі

$$\begin{cases} \frac{2h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2 = \sin^2 \frac{Q}{2bR}; \\ \frac{2h}{R} - \left(\frac{h}{R}\right)^2 \geq 0; \\ \sin^2 \frac{Q}{2bR} \geq 0. \end{cases} \quad (12)$$

Систему (12) можна переписати у вигляді

$$\left\{ \left(\frac{h}{R}\right)^2 - 2\frac{h}{R} + \sin^2 \frac{Q}{2bR} = 0; \right. \quad (13)$$

$$\left. \frac{h}{R} \left(2 - \frac{h}{R}\right) \geq 0; \right. \quad (14)$$

$$\left. Q \geq 0. \right.$$

Розглянемо рівняння (13).

Нехай  $\frac{h}{R} = t$ . Отримаємо з рівняння (13) формулу

$$t^2 - 2t + \sin^2 \frac{Q}{2bR} = 0. \quad (15)$$

Дискримінант рівняння (15) має вигляд:

$$\frac{D}{4} = 1 - \sin^2 \frac{Q}{2bR} = \cos^2 \frac{Q}{2bR}.$$

Знайдемо корені квадратного рівняння (15):

$$t = 1 \pm \left| \cos \frac{Q}{2bR} \right|.$$

Оскільки  $\frac{Q}{2bR} < 1$ , то  $\cos \frac{Q}{2bR} > 0$ ,

тому  $t = 1 \pm \cos \frac{Q}{2bR}$ .

Розглянемо нерівність (14).

Нехай  $\frac{h}{R} = t$ , тоді нерівність (14) можна записати у вигляді

$$t(2-t) \geq 0. \quad (16)$$

Розв'язком рівняння (16) буде відрізок  $t \in [0; 2]$ , тобто  $0 \leq \frac{h}{R} \leq 2$ , але в умовах даного експерименту

$0 < \frac{h}{R} \leq 1$ , тому розв'язком рівняння (15) буде

$$t = 1 - \cos \frac{Q}{2bR}.$$

Розкриваючи заміну  $\frac{h}{R} = t$ , отримаємо

$$\frac{h}{R} = 1 - \cos \frac{Q}{2bR}. \quad (17)$$

Якщо підставити залежність (17) у рівняння (8) і (10), отримаємо для об'ємного зносу

$$I_v = \frac{1}{2} R \left( Q - bR \sin \frac{Q}{bR} \right). \quad (18)$$

Для вагового зносу одержимо

$$I_m = \rho I_v = \frac{1}{2} \rho R \left( Q - bR \sin \frac{Q}{bR} \right). \quad (19)$$

Перевіримо роботу моделі (18) у граничних умовах:

а) якщо  $Q \rightarrow 0$ , одержимо  $\lim_{Q \rightarrow 0} I_v = 0$ ;

б) якщо  $Q \rightarrow \pi R b$ , одержимо

$$\lim_{Q \rightarrow \pi R b} I_v = \frac{\pi R^2 b}{2} - \frac{1}{2} b R^2 \sin \pi = \frac{\pi R^2 b}{2}.$$

Отже, отриманий об'ємний знос відповідає половині об'єму ролика.

### Висновки

1. Отримано формулу (6) зв'язку площі зіткнення ролика і зразка з максимальним лінійним зносом поверхонь матеріалів і покриттів. Для моделі (6) перевірено граничні умови.

2. Виведено залежності (8) і (10) об'ємного і вагового зносу при терті о нежорстко закріплені абразивні частинки від лінійного зносу та перевірено граничні умови.

3. Отримано залежності (18) і (19) об'ємного і вагового абразивного зносу від площі поверхні зіткнення ролика зі зразком та перевірено відповідні граничні умови.

4. Визначено залежність впливу геометричних форм робочої частини експериментальної установки на ваговий і об'ємний абразивний знос при терті о нежорстке закріплені абразивні частинки.

5. Основним параметром, за яким можна визначити реальні залежності зносу від визначальних параметрів для зносостійкості матеріалів, є лінійний знос.

6. Із залежності (17) випливає, що при збільшенні площі стику ролика зі зразком значення

виразу  $\frac{Q}{2bR}$  збільшується, тому значення  $\cos \frac{Q}{2bR}$  зменшується, що, в свою чергу, призводить до збільшення різниці  $1 - \cos \frac{Q}{2bR}$ . Отже, при збільшенні  $Q$  значення лінійного зносу поверхонь матеріалів і покриттів зростає з часом.

#### Перспективи подальших досліджень

Отримані формули залежності об'ємного і вагового зносу від параметрів геометричних форм робочої частини експериментальної установки дозволяють створити більш повну і точну модель зносу деталей при терті о нежорстко закріплені абразивні частинки. Моделі (18) і (19) дозволяють створити модель об'ємного і вагового зносу з залежністю  $I_v$  і  $I_m$  від  $P_0, \rho, h$ , а також від  $P_0, \rho, Q$ . Після проведення дослідів на визначення лінійного максимального зносу можна обчислити для кожного матеріалу відповідні коефіцієнти зносу залежно від часу і шляху тертя. Надалі побудуємо моделі абразивного зносу з урахуванням розмірів абразивних частинок. У майбутньому треба побудувати модель зміни в часі максимального лінійного зносу та знайти залежності,

які визначатимуть зв'язок максимального лінійного зносу з параметрами зносостійкості матеріалів і покриттів: твердістю, пластичністю, температурою та ін.

#### Список літератури

1. Тененбаум М.М., Бернштейн Д.Б. Моделирование процесса абразивного изнашивания // Моделирование трения и износа: Материалы I Межотрасл. науч. семинара по моделированию трения и износа. – М.: НИИмаш, 1967. – С. 81–92.
2. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбатов В.С. Основы расчетов на трение и износ. – М.: Машиностроение, 1977. – С. 319–326.
3. Гавриков М.В., Мазинг Р.И. Применение наследственно-стареющей модели изнашивания осесимметричной контактной задаче // Трение и износ. – 1989. – Т. 10, №6. – С. 981–986.
4. Рыжиков А.Л., Гронянов В.М., Тараканчиков Л.Г. Модель абразивного износа алюмооксидной керамики // Трение и износ. – 1991. – Т. 12, №2. – С. 361–364.
5. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. – С. 675, 689.

Стаття надійшла до редакції 25.02.04.

О.А. Вишнеvский

Модель зависимости величины абразивного износа от максимального линейного износа

Определена связь площади соприкосновения резинового ролика и образца с величиной линейного износа поверхности материала и покрытия. Приведена математическая модель зависимости величины объемного и весового износа от максимальной глубины лунки при трении о нежестко закрепленные абразивные частицы. Установлена связь объемного и весового износа с площадью поверхности соприкосновения резинового ролика с образцом при трении о нежестко закрепленные абразивные частицы.

O.A. Vishnevsky

The model of the dependence of the abrasive wear value on the maximal linear wear

The relation of the contact area of the rubber roll with a sample and the maximal linear wear value is found. The mathematical model of the dependence of the wear volume weight value on the maximal dimple depth is presented with the friction on abrasive particles fixed nonrigidly. The relation of volume weight wear with the rubber roll contact surface area with a sample with the friction on abrasive particles fixed nonrigidly is established.