УДК 681.3

[1]**Л.О. Сімак,** д-р техн. наук
[2]**Г.М. Тодорова**

АПРОКСИМАЦІЙНІ МОДЕЛІ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НЕЦІЛОГО ПОРЯДКУ З ЗАСТОСУВАННЯМ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНО-ЕКСТРАПОЛЯЦІЙНОГО МЕТОДУ

Відділення гібридних моделюючих і керуючих систем в енергетиці
Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України,
e-mail: [1]vsvv@visti.com; [2]todorova@visti.com

Розглянуто спектральний підхід до моделювання динамічних систем дробового порядку. Для апроксимації використано інтерполяційно-екстраполяційний метод.

Вступ

Операційні методи аналізу широко застосовуються при моделюванні динамічних систем, у т. ч. і нецілого порядку [1]. Операційний підхід дозволяє алгебризувати інтегро-диференціальні рівняння, якими звичайно описуються динамічні системи. Представлення сигналів методами поліноміальної апроксимації за деякою системою базисних функцій призводить до апроксимуючих поліноміальних спектрів, на основі яких можуть бути побудовані різні операційні числення.

Особливе місце займають локальні ортого-нальні системи базисних функцій на основі зміщених поліномів Лежандра, зокрема, методи блочно-імпульсних функцій [2] і апроксимуючих імпульсних спектрів [3]. Перевагою таких методів апроксимації є досить велика швидкодія і простота реалізацій у програмному середовищі й апаратному вигляді. Недоліком цих методів є те, що апроксимації сигналів, отримані на основі методу найменших квадратів, зазнають розривів на границях підінтервалів розбивки аргументу сигналу. Використання методів інтерполяції й екстраполяції [4] дозволяє усунути цей недолік, зберігаючи властиві локальним базисним системам переваги [5].

Дробове інтегро-диференціювання є природним узагальненням звичайних похідних та інтегралів класичного математичного аналізу. На теперішній час дробове числення, яке дозволяє одержати більш точне уявлення реальних процесів, широко застосовується при математичному моделюванні різних явищ у середовищах із фрактальною структурою, фізиці, математичній біології та ін. [6; 7].

Метою завдання є розробка операційного метода моделювання динамічних систем, що описуються інтегро-диференціальними рівняннями нецілих порядків, на основі апроксимації сигналів локально-імпульсними базисними системами низьких порядків. Метод орієнтований на реалізацію в програмних середовищах математичних систем типу Mathematica, MatLab та інші.

Інтерполяційно-екстраполяційний метод

Нехай на інтервалі $[0,T]$ зміни аргументу t задано неперервний сигнал $x(t)$. Інтервал визначення сигналу розбивається на m однакових відрізків довжиною $h=T/m$ кожний.

На отриманій ґратці аргументу вводиться система блочно-імпульсних базисних функцій:

$$v_i(t) = \sigma\big(t-(i-1)h\big) - \sigma\big(t-ih\big),\ i=1,\dots,m, \qquad (1)$$

де $\sigma(t)$ – функція одиничного стрибка, визначена як

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } t<0, \\ 1, \text{ якщо } t \ge 0. \end{cases}$$

Сигнал $x(t)$ відновлюється у вигляді кусково-сталої апроксимації:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=1}^{m} X(i) v_i(t), \qquad (2)$$

де $X(i)$ – блочно-імпульсний спектр сигналу, що визначається за формулами:

$$\begin{aligned} X(i) &= \frac{1}{h}\int_{(i-1)h}^{ih} x(t)dt; \\ X(i+1) &= \frac{1}{h}\int_{ih}^{(i+1)h} x(t)dt. \end{aligned} \qquad (3)$$

Розглянемо фрагмент сигналу і його блочно-імпульсну апроксимацію (рис. 1).

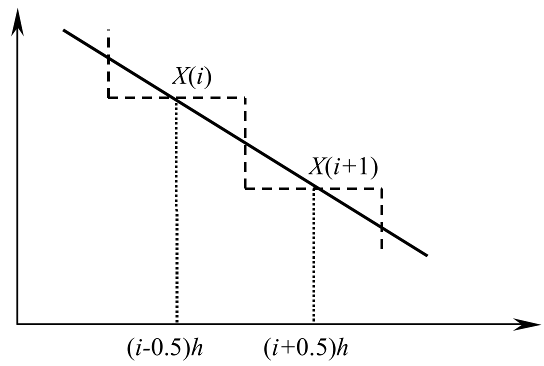

Рис. 1. Фрагмент сигналу (суцільна лінія) і його блочно-імпульсна апроксимація (штрихова лінія)

При досить великій кількості інтервалів розбиття осі абсцис m точки перетинання кривої з її апроксимацією знаходяться приблизно посередині відрізків $(i-1)h$ та ih, тобто мають абсциси $(i-0{,}5)h$. Це є наслідком методу найменших квадратів, а саме рівністю площ, обмежених даною кривою і її апроксимацією. Знаючи елементи блочно-імпульсного спектра, можна побудувати апроксимацію сигналу на основі лінійної інтерполяції між серединами підінтервалів розбиття осі аргументу.

Рівняння для визначення коефіцієнтів кривої, що інтерполює, буде мати вигляд:

$$\alpha_i + \beta_i \cdot t = \begin{cases} X(i), \text{ якщо } t = (i-0.5)h, \\ X(i+1), \text{ якщо } t = (i+0.5)h. \end{cases} \tag{4}$$

Розв'язуючи (5) відносно α_i і β_i, одержимо:

$$\beta_i = \frac{X(i+1) - X(i)}{h};$$

$$\alpha_i = X(i)(i+0{,}5) - X(i+1)(i-0{,}5).$$

Рівняння апроксимуючої прямої визначаємо за формулою

$$x_a(t) = \sum_{i=1}^{m-1}(X(i)(i+0{,}5) - X(i+1)(i-0{,}5) + \\ + \frac{X(i+1)-X(i)}{h}t). \tag{5}$$

Але апроксимація формули (5) будується на інтервалі $\left[0+\frac{1}{2}h, T-\frac{1}{2}h\right]$, тому на інтервалах $\left[0,\frac{1}{2}h\right]$ і $\left[T-\frac{1}{2}h, T\right]$ крива екстраполюється. Тоді повне рівняння апроксимуючої прямої буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} x_a(t) = &\sum_{i=1}^{m-1}(X(i)(i+0{,}5) - X(i+1)(i-0{,}5) + \\ &+ \frac{X(i+1)-X(i)}{h}t) + \\ &+ (X(1)1{,}5 - X(2)0{,}5 + \frac{X(2)-X(1)}{h}t) \times \\ &\times (\sigma(t) - \sigma(t - \frac{h}{2})) + \\ &+ (X(m-1)(m-0{,}5) - X(m)(m-1{,}5) + \\ &+ \frac{X(m)-X(m-1)}{h}t) \times \\ &\times \big(\sigma(t-(m-0{,}5)h) - \sigma(t-mh)\big). \end{aligned} \tag{6}$$

У табл. 1 наведено основні функції програми інтерполяційно-екстраполяційного методу, що реалізована в системі Mathematica® [8].

Екстраполяція по краях інтервалу проводиться за формулою (6) додатково.

Таблиця 1

Програма розрахунку інтерполяційно-екстраполяційного методу

Фрагмент програми	Коментар
`σ[t_] := If[t< 0, 0, 1];`	Визначення функції одиничного стрибка
`v = Function[{t, a, b, m, i}, h = (b - a)/m; σ[t - (i - 1) *h + a] - σ[t - (i*h + a)]];`	Визначення системи блочно-імпульсних базисних функцій
`vv = Function[{t, a, b, m, i}, h = (b - a)/m; σ[t - (i - .5) *h + a] - σ[t - ((i + .5) *h + a)]];`	Визначення зміщеної системи базисних функцій
`BPF = Function[{a, b, m, x}, h = (b-a)/m; Table[NIntegrate[x[t], {t, a+ (i-1) h, a+i* h}]/h, {i, 1, m}]];`	Визначення вектора блочно-імпульсного апроксимуючого спектра
`ApprBPF = Function[{t, a, b, m, C}, Sum[C[[j]] v[t, a, b, m, j], {j, 1, m}]];`	Визначення блочно-імпульсної апроксимації сигналу
`ModApprBPF = Function[{t, a, b, m, C}, h = (b - a)/m; Sum[(C[[j]] (j + .5) - C[[j + 1]] (j - .5) + (C[[j + 1]] - C[[j]]) t/h) vv[t, a, b, m, j], {j, 1, m-1}]];`	Інтерполяція сигналу за блочно-імпульсним спектром

Операційна матриця дробового інтегрування

Означення інтеграла дробового порядку β за формулою Рімана-Ліувіля [7] має вигляд:

$$[D^{-\beta}x(t)]_0^t = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-\tau)^{\beta-1}x(\tau)d\tau, \qquad (7)$$

де $\Gamma(*)$ – гама-функція.

Оскільки сигнал $x(t)$ апроксимується узагальненим поліномом (2), то операція дробового інтегрування за формулою (7) зводиться до інтегрування утворюючих функцій $v_i(t)$. Підставимо у формулу (7) вираз утворюючої функції (1) і одержимо вираз для дробових інтегралів:

$$\int_0^t (t-\tau)^{\beta-1}v_i(\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1}\left[\sigma(\tau-(i-1)h)-\sigma(\tau-ih)\right]d\tau = \qquad (8)$$

$$= \begin{cases} 0, & t<(i-1)h, \\ \dfrac{1}{\Gamma(\beta+1)}(t-(i-1)h)^{\beta}, & (i-1)h \le t < ih, \\ \dfrac{1}{\Gamma(\beta+1)}\left((t-(i-1)h)^{\beta}-(t-ih)^{\beta}\right), & t \ge ih, \end{cases}$$

$$1 \le i \le m.$$

Розглядаючи вираз (8) як функцію аргументу t, визначимо блочно-імпульсний спектр цієї функції за формулою (3).

Позначимо через $r=i-j$, $i,j=\overline{1,m}$, номер діагоналі матриці інтегрування P. Тоді після перетворень одержимо трикутну матрицю вигляду:

$$P(\beta,r) = \frac{h^{\beta}}{\Gamma(\beta+2)}\begin{cases} 0, & r<0, \\ 1, & r=0, \\ \left[(r+1)^{\beta+1}-2r^{\beta+1}+(r-1)^{\beta+1}\right], \end{cases} \qquad (9)$$

$$r=1,\ldots,m-1.$$

При $\beta=1$ матриця інтегрування P є матрицею інтегрування першого порядку.

Щоб одержати n-й порядок інтегрування, можна використовувати як матрицю першого порядку n-го степеня $\left(P^{(1)}\right)^n$, так і формулу (9) при $\beta=n$.

Функцію, що обчислює матрицю інтегрування порядку β, наведено в табл. 2.

Аналогічно можна вивести операційну матрицю диференціювання, але операція диференціювання є чутливою до шумових перешкод, характерних для реальних сигналів. Тому переважніше зводити інтегро-диференціальні рівняння до інтегральних.

Таблиця 2

Програма розрахунку матриці інтегрування

Фрагмент програми	Коментар

`IntegrMatrBPF = Function[{a, b, m, β},`
`h = (b - a)/m;`
`h^β/Gamma[β + 2] * Table[Which[i < j, 0, i == j, 1,`
`i > j, (i - j + 1)^(β+1) - 2 (i - j)^(β+1) + (i - j - 1)^(β+1)], {i, 1, m}, {j, 1, m}]];`
	Визначення матриці інтегрування

Моделювання динамічних систем нецілого порядку

Моделювання динамічної системи нецілого порядку в системі блочно-імпульсних функцій за інтерполяційно-екстраполяційним методом проводиться за такою схемою:

– інтегро-диференціальне рівняння, що описує поведінку системи, зводиться до інтегрального шляхом послідовного застосування інтегрального оператора;

– за формулою (3) розраховують блочно-імпульсні спектри усіх невідомих функцій і констант, а за формулою (9) – матриці інтегрування необхідного порядку;

– перетворене рівняння записують в операційній області з урахуванням правил спектральної алгебри;

– за розв’язком алгебричного рівняння в операційній області знаходять блочно-імпульсний спектр невідомого сигналу;

– апроксимація розв’язку будується за інтерполяційно-екстраполяційним методом.

Викладену схему проілюструємо на прикладах.

Приклад 1. Необхідно знайти розв’язок рівняння першого порядку зі змінними коефіцієнтами:

$$\frac{dx(t)}{dt}+e^{2t}x(t)=0, \quad x(0)=1$$

на інтервалі зміни аргументу $0 \le t \le 1$. Кількість інтервалів розбиття m=10.

Проінтегруємо рівняння:

$$x(t)-x(0)+\int_0^t e^{2\tau}d\tau = 0.$$

Перейдемо до спектрального рівняння:

$$(E + P^{(1)}F)\widetilde{X} = x(0)\widetilde{1} \qquad (10)$$

де E – одинична матриця порядку m; $P^{(1)}$ – матриця інтегрування першого порядку; F – діагональна матриця, елементами діагоналі якої є коефіцієнти спектру e^{2t}; $x(0)\widetilde{1}$ – спектр константи.

Слід зазначити, що замість вектора блочно-імпульсного спектра змінного коефіцієнта e^{2t}, використовується діагональна матриця для дотримання розмірностей при виконанні обчислень.

З рівняння знаходимо вектор значень спектра невідомого сигналу $\widetilde{X}$ і відновлюємо його за інтерполяційно-ектраполяційним методом. Наближений і точний розв'язок рівняння $\left(x(t) = e^{0.5(1-e(2t))}\right)$ показано на рис. 2 , *а*, *б*, *в*, *г*.

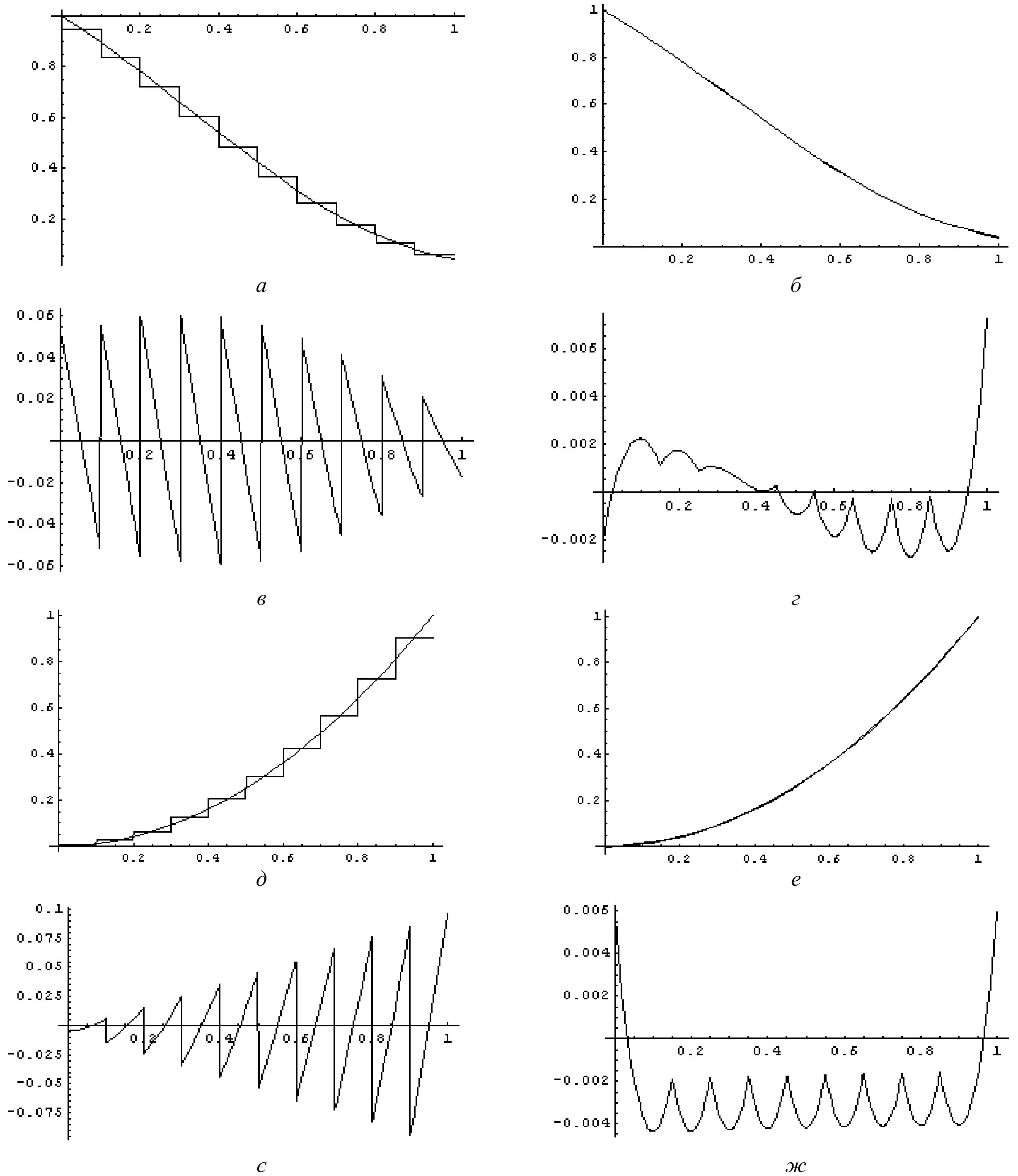

Рис. 2. Сигнал і його апроксимація:
а, *д* – метод блочно-імпульсних функцій; *б*, *е* – інтерполяційно-екстраполяційний метод;
в, г, є, ж – графіки функцій помилок

Приклад 2. Необхідно розв'язати рівняння дробового порядку:

$$\frac{d^{(1/2)}y(t)}{dt^{(1/2)}} + y(t) = t^2 + \frac{2}{\Gamma(2.5)}t^{3/2}, \quad y(0) = 0$$

на інтервалі зміни аргументу $0 \le t \le 1$.

Аналогічно прикладові 1, з урахуванням нульових початкових умов перейдемо до рівняння в операційній області:

$$\tilde{Y}(E + P^{(1/2)}) = P^{(1/2)}F,$$

де F – спектр інтеграла правої частини рівняння.

Точний розв'язок $\left(y(t) = t^2\right)$ і результати апроксимації показано на рис. 2, *д*, *е*, *є*, *ж*.

З прикладів 1 і 2 можна побачити, що помилка апроксимації запропонованого методу дає точність на порядок вище методу блочно-імпульсних функцій при тих же витратах ресурсів і часу.

Висновки

Операційний метод моделювання динамічних систем, у т. ч. і дробового порядку, дозволяє отримувати алгебричні системи, що мають ефективну реалізацію методу блочно-імпульсних спектрів на ПЕОМ. У свою чергу, інтерполяційно-екстраполяційний метод підвищує точність блочно-імпульсної апроксимації без зростання обчислювальних витрат.

Список літератури

1. *Моделирование* динамических систем: Аспекты мониторинга и обработки сигналов / В.В. Васильєв, Г.И. Грездов, Л.А. Симак и др. – К.: НАН Украины, 2002. – 344 с.

2. *Jang L.*, *Schaufelberger W.* Block-pulse functions and their applications in control systems. – Springer-Verlag, 1992. – 235 p.

3. *Симак Л.А.* Аппроксимирующие импульсные спектры в приложении к дробно–дифференциальному анализу. – К., 1989. – 56 с. (Препринт. / АН УССР. Ин-т проблем моделирования в энергетике; 89-8).

4. *Гончаров В.Л.* Теория интерполирования и приближения функций. – М.: ГНТТЛ, 1954. – 327 с.

5. *Васильев В.В., Симак Л.А., Тодорова А.М.* Интерполяционно-экстраполяционный метод цифровой обработки сигналов на основе смещенных систем базисных функций // Моделювання та інформаційні технології. – 2003. – Вип. 13. – С. 13–23.

6. *Нахушев А.М.* Элементы дробного исчисления и их применение. – Нальчик, КБНЦ РАН, 2000. – 299 с.

7. *Oldham K.B., Spanier O.* The fractional calculus. – New York&London: Academic Press, 1974. – 234 p.

8. *Wolfram S.* The Mathematica book // Wolfram Media &Cambridge University Press, 1999. – 1470 p.

Стаття надійшла до редакції 22.12.03.

Л.А. Симак, А.М. Тодорова

Аппроксимационные модели динамических систем нецелого порядка с применением интерполяционно-экстраполяционного метода

Рассмотрен спектральный подход к моделированию динамических систем дробного порядка. Для аппроксимации использован интерполяционно-экстраполяционный метод.

L.A. Simak, A.M. Todorova

Approximation models of fractional order dynamic systems using interpolation-extrapolatory method

Spectral approach to the modeling of the fractional dynamic systems is considered. Interpolation-extrapolatory method is used for approximation.