

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ОБНАРУЖЕНИЯ РАДИОСИГНАЛА, ИСПОЛЬЗУЮЩИЙ ОЦЕНКУ ЧЕНЦОВА

Рассмотрены оценки Ченцова в базисе тригонометрических функций. Предложены новые непараметрические процедуры проверки гипотез, основанные на этих оценках. На основе предложенных процедур синтезирован алгоритм обнаружения сигналов на фоне коррелированных помех. Эффективность подтверждена результатами математического моделирования.

Известен целый класс устойчивых к изменениям плотности распределения помех алгоритмов обнаружения радиолокационных сигналов, основанных на непараметрических ранговых статистиках. Они обладают замечательными свойствами инвариантности и подобия и широко применяются на практике. Однако при синтезе этих алгоритмов применяются слишком строгие требования инвариантности при изменениях статистики отсчетов сигнала к группе всех монотонных преобразований, что в общем не всегда соответствует реальным изменениям реальных радиосигналов и помех. Представляется интересным ограничить множество возможных плотностей распределения вероятности (ПРВ) сигналов и помех гладкими плотностями вероятности, у которых существуют, например, первая и вторая производные плотности вероятности.

При синтезе этих алгоритмов применим следующий эвристический принцип: подвергнем исходный сигнал $x(t)$ функциональному преобразованию

$$y(t) = \hat{W}[x(t)], \quad (1)$$

где $\hat{W}[\cdot]$ – некоторая оценка интегральной функции распределения помехи. Известно [1], что в случае использования в качестве $\hat{W}[\cdot]$ эмпирической функции распределения критерии проверки статистических гипотез, основанных на статистике $y(t)$, относятся к ранговым критериям. Для статистики $y(t)$ применим процедуру синтеза решающего правила на основе критерия Неймана-Пирсона.

Пусть исходные наблюдения радиолокационного сигнала представлены в виде матрицы

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x_{11} & \dots & x_{1m} & x_{1m+1} \\ x_{21} & \dots & x_{2m} & x_{2m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{nm} & \dots & x_{nm} & x_{nm+1} \end{array} \right\}, \quad (2)$$

где первые m столбцов представляют собой отсчеты, образованные только помехой, а $m+1$ -й столбец – это отсчеты, содержащие полезный сигнал. Столбцы между собой статистически независимы.

Решение задачи обнаружения полезного сигнала сводится к проверке гипотезы о равенстве плотности распределения вероятности вектора-столбца, содержащего, по предположению, полезный сигнал (пачку отраженных импульсов), и плотности распределения ве-

роятностей m векторов-столбцов, образованных помехой. Равенство ПРВ соответствует отсутствию полезного сигнала, справедливость альтернативной гипотезы – его наличие.

Используем в качестве функционального преобразования (1) непараметрическую оценку интегральной функции распределения, основанную на оценке Ченцова [2].

Итак, пусть ξ – случайная величина со значениями в пространстве (X, S) , $\mu\{dx\}$ – данная мера на S , $p(x) = (dp/d\mu)(x)$ – искомая плотность распределения вероятностей.

Пусть далее на X задан (измеримый) вес $r(x)$ и посредством скалярного произведения

$$(\varphi, f) = \int_X \varphi(x) f(x) r(x) \mu\{dx\}$$

определено гильбертово пространство $L^2(r)$. Рассмотрим произвольное n -мерное подпространство E_n с ортонормированным базисом $\varphi_{jn}(x), j = 1, \dots, n$:

$$(\varphi_{jn}, \varphi_{kn}) = \int \varphi_{jn}(x) \varphi_{kn}(x) r(x) \mu\{dx\} = \delta_{jk},$$

где δ_{jk} – символ Кронекера.

Пусть $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(N)}$ – независимые наблюдения случайной величины ξ .

Оценка ПРВ по Ченцову:

$$\pi_{nN}^* = \sum_{j=1}^n \alpha_j^* \varphi_{jn}(x), \quad (3)$$

где

$$\alpha_j^* = N^{-1} [\alpha_j(\xi^{(1)}) + \dots + \alpha_j(\xi^{(N)})];$$

$$\alpha_j(\xi) = \varphi_{jn}(\xi) r(\xi). \quad (4)$$

Многочлен $\pi_{nN}^* = \sum_{j=1}^n \alpha_j^* \varphi_{jn}(x) = \sum_{j=1}^n \left(\varphi_{jn}, \frac{d\Xi_N}{d\mu} \right) \varphi_{jn}(x)$ можно трактовать как ортогональную проекцию на E_n «производной Радона-Никодима $\frac{d\Xi_N}{d\mu}$ » эмпирической дискретной меры

$$\Xi_N\{\cdot\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta\{\cdot|\xi^{(i)}\}$$

с дельта-функциями веса N^{-1} в точках наблюдения. Оценку плотности по формулам (3) и (4) Ченцов назвал *проекционной оценкой*.

Рассмотрим проекционную линейную оценку Ченцова в базисе тригонометрических функций:

$$\varphi_{0n} = 1, \varphi_{jn} = \cos(j\omega_1 t), \varphi'_{jn} = \sin(j\omega_1 t), j = 1, \dots, n,$$

где $\omega_1 = \frac{1}{T}$.

Интервал наблюдения определим как разность между максимальным и минимальным значениями случайных исходов:

$$T = \xi_{\max}^{(i)} - \xi_{\min}^{(k)}$$

Оценка плотности

$$\hat{\omega}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^n \{a_j \cos(j\omega_1 x) + b_j \sin(j\omega_1 x)\} \quad (5)$$

с коэффициентами, определяемыми формулой (4), т.е.:

$$a_0 = N^{-1} \sum_{i=1}^N 1;$$

$$a_j = N^{-1} \sum_{i=1}^N \cos(j\omega_1 \xi^{(i)});$$

$$b_j = N^{-1} \sum_{i=1}^N \sin(j\omega_1 \xi^{(i)}).$$

Проинтегрировав выражение (5) по параметру x , можно получить выражение для оценки интегральной функции распределения

$$\hat{W}(x) = \frac{a_0}{2} x + \sum_{j=1}^n \frac{a_j \sin(j\omega_1 x) - b_j \cos(j\omega_1 x)}{j\omega_1} - \frac{a_0}{2} \xi_{\min}^{(k)} - \sum_{j=1}^n \frac{a_j \sin(j\omega_1 \xi_{\min}^{(k)}) - b_j \cos(j\omega_1 \xi_{\min}^{(k)})}{j\omega_1}.$$

Видно, что оценка интегральной функции распределения представляет собой сумму ядер

$$\text{chen}(j\omega_1 x, a_j, b_j) = \frac{a_j \sin(j\omega_1 x) - b_j \cos(j\omega_1 x)}{j\omega_1}.$$

Для вычисления преобразованной статистики отсчет y_{m+1} преобразуется функциональным преобразованием $\hat{W}(x)$ – оценкой интегральной функции распределения отсчетов (x_1, \dots, x_m) :

$$(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) \rightarrow (x_1, \dots, x_m, y_{m+1}).$$

Плотность распределения вектора строки исходных отсчетов

$$\omega_x(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) = \omega(x_1) \cdot \dots \cdot \omega(x_m) \omega_{m+1}(x_{m+1}).$$

Плотность распределения преобразованных отсчетов

$$\omega_y(x_1, \dots, x_m, y_{m+1}) = \omega(x_1) \cdot \dots \cdot \omega(x_m) \omega_{m+1}(x_{m+1}) \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial x_m} & \frac{\partial x_1}{\partial y_{m+1}} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial x_m} & \frac{\partial x_2}{\partial y_{m+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial x_m}{\partial x_m} & \frac{\partial x_m}{\partial y_{m+1}} \\ \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial x_m}{\partial x_m} & \frac{\partial y_{m+1}}{\partial y_{m+1}} \end{vmatrix} =$$

$$= \omega(x_1) \cdot \dots \cdot \omega(x_m) \omega_{m+1}(x_{m+1}) \left| \frac{\partial x_{m+1}}{\partial y_{m+1}} \right|.$$

Плотность распределения $y_{i,m+1}$ матрицы (2)

$$\begin{aligned} \omega_y(y_{i,m+1}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^m \omega(x_{ij}) \omega_{m+1}(x_{im+1}) \left| \frac{\partial x_{m+1}}{\partial y_{i,m+1}} \right| dx_{i1} \dots dx_{im} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^m \omega(x_{ij}) \omega_{m+1}(x_{im+1}) \left| \frac{1}{\frac{\partial}{\partial x_{im+1}} \hat{W}(x_{im+1}; x_{i1}, \dots, x_{im})} \right| dx_{i1} \dots dx_{im} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^m \omega(x_{ij}) \omega_{m+1}(x_{im+1}) \frac{1}{\hat{\omega}(x_{im+1}; x_{i1}, \dots, x_{im})} dx_{i1} \dots dx_{im} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^m \omega(x_{ij}) \omega_{m+1}(\hat{W}^{-1}(y_i; x_{i1}, \dots, x_{im})) \cdot \frac{1}{\hat{\omega}(\hat{W}^{-1}(y_i; x_{i1}, \dots, x_{im}))} dx_{i1} \dots dx_{im}, \end{aligned}$$

где $\hat{W}^{-1}(y)$ – функция, обратная к $\hat{W}(x)$.

При $m \rightarrow \infty$

$$\omega_y(y_i) = \frac{\omega_{m+1}\{\hat{W}^{-1}(y_i)\}}{\omega\{\hat{W}^{-1}(y_i)\}}.$$

Решающая статистика для независимых n y_i $l(\bar{y}) = \prod_{i=1}^n \omega_y(y_i)$.

Применяя вес r , обратно пропорциональный номеру базисной функции,

$$r(j) = \frac{1}{j},$$

легко получить новые оценки плотности и интегральной функции распределения, обладающие лучшими свойствами для гладких законов распределения:

$$\hat{\omega}_r(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^n \frac{a_j \cos(j\omega_1 x) + b_j \sin(j\omega_1 x)}{j}; \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \hat{W}_r(x) &= \frac{a_0}{2} x + \sum_{j=1}^n \frac{a_j \sin(j\omega_1 x)}{\omega_1 j^2} - \frac{b_j \cos(j\omega_1 x)}{\omega_1 j^2} - \\ &- \frac{a_0}{2} \xi_{\min}^{(k)} + \sum_{j=1}^n \frac{a_j \sin(j\omega_1 \xi_{\min}^{(k)})}{\omega_1 j^2} - \frac{b_j \cos(j\omega_1 \xi_{\min}^{(k)})}{\omega_1 j^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Графики нормальной ПРВ (пунктир) с математическим ожиданием, равным 0, средним квадратическим отклонением, равным 5, и оценки этой плотности в базисе тригонометрических функций по выборке 100, $n = 5$ (сплошная линия), $n = 30$ (пунктирная линия), $n = 100$ с весом $\frac{1}{j}$ (штрих-пунктирная линия) показаны на рис. 1.

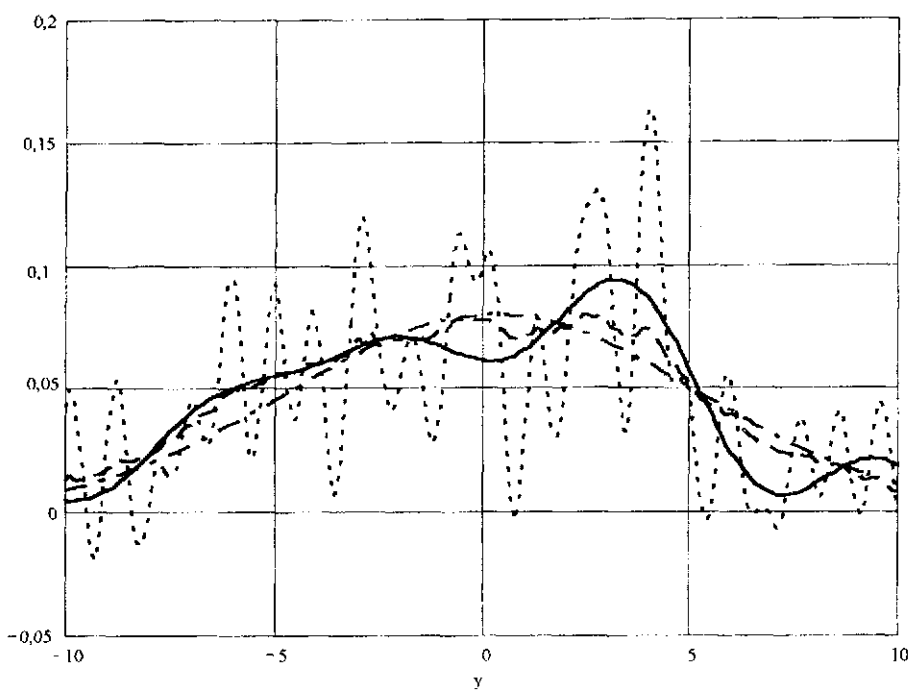


Рис. 1. Проекционная оценка Ченцова в базисе тригонометрических функций

Спектр коэффициентов Фурье, т.е. зависимость их значения от номера базисной функции, показан на рис. 2.

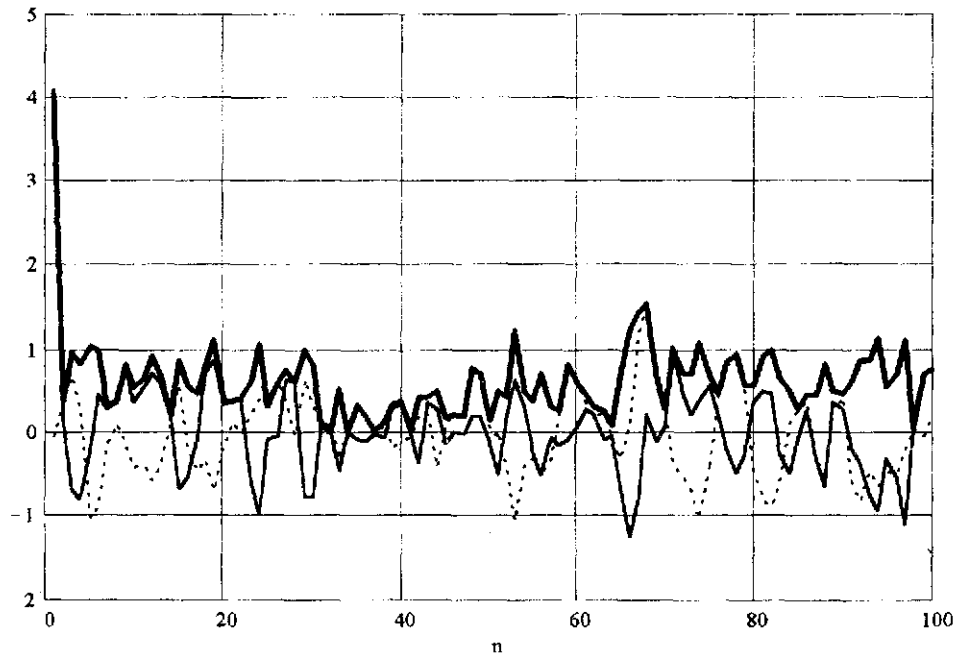


Рис. 2. Спектр проекционной оценки Ченцова

Графики интегральной функции распределения для нормального закона распределения (пунктир), оценки этого закона по Ченцову (выражение (6), сплошная линия) и оценки с весом (выражение (8), штрих-пунктир) для выборки 100 и 5 базисных функций показаны на рис. 3.

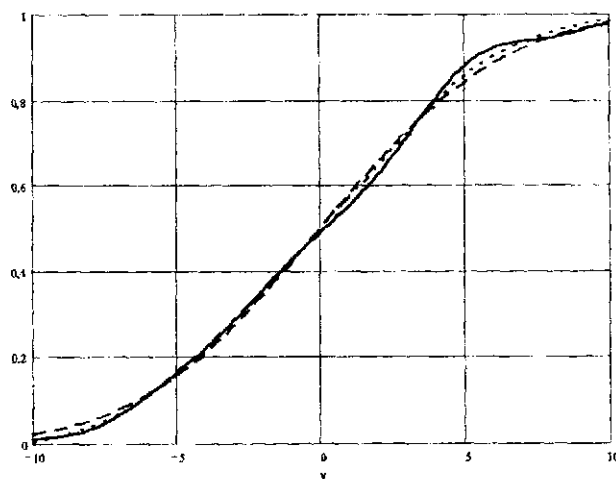


Рис. 3. Проекционная оценка Ченцова для интегральной функции распределения в базисе тригонометрических функций (выборка 100)

Легко заметить, что оценка с весом обладает наилучшими свойствами среди рассмотренных.

Характеристики обнаружения, т.е. зависимости вероятности правильного обнаружения от соотношения сигнал/шум по мощности, которые получены в результате статистического моделирования алгоритма обнаружения гауссового шумового сигнала на фоне гауссовой коррелированной помехи, показаны на рис. 4. Нижняя кривая соответствует коэффициенту корреляции 0, средняя – 0,5, верхняя – 0,99. В этом алгоритме оценка Ченцова использовалась для оценивания условной интегральной функции распределения марковского односвязного случайного процесса, являвшегося моделью коррелированной помехи.

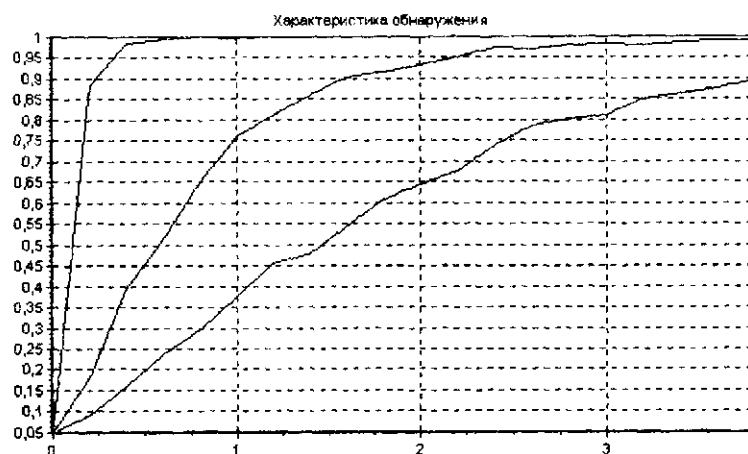


Рис. 4. Характеристики обнаружения

Результаты моделирования продемонстрировали хорошие свойства предлагаемого алгоритма обнаружения – высокую эффективность при стабильной вероятности ложной тревоги, не зависящей от изменения коэффициента корреляции помехи.

Список литературы

1. Латий В.Ю. и др. Устройства ранговой обработки информации. – К.: Техніка, 1986. – 120 с.
2. Ченцов Н.Н. Статистические решающие правила и оптимальные выводы. – М.: Наука, 1972. – 520 с.

Стаття надійшла до редакції 30 вересня 1999 року.