УДК 621.396: 519.2

Н.С. Бедный, И.Ф. Бойко

МЕТОД СТОХАСТИЧЕСКИХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассмотрены возможности практического использования метода стохастических ортогональных разложений для решения задач анализа нелинейных систем при воздействии на них линейных случайных сигналов.

Реальные радиотехнические системы работают в условиях воздействия случайных сигналов и помех. Поэтому одной из актуальных задач как для теории, так и практики исследования таких систем является их стохастический анализ. Глубина и всесторонность такого анализа определяются теми критериями, по которым оценивается качество работы систем или устройств. Возможность получения требуемых характеристик в результате анализа зависит также от тех математических моделей, которыми описываются реальные случайные сигналы и помехи, воздействующие на исследуемые системы и устройства.

В работах [1], [2] предложен метод спектрально-корреляционного анализа нелинейных преобразований безгранично делимых процессов, основанный на разложении в ортогональный стохастический ряд отклика нелинейного устройства. Кратко суть этого метода состоит в следующем. Пусть $F(\cdot)$ – нелинейный оператор, характеризующий связь между входом и выходом некоторой нелинейной системы, на вход которой воздействует линейный случайный процесс [1]:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau,t) d\eta(\tau), \quad t \in T \subseteq R^1, \tag{1}$$

где $\varphi(\tau,t)$ – произвольная неслучайная числовая измеримая функция, принимающая при каждом $t \in T$ равномерно по τ конечные значения; $\eta(\tau)$ – стохастически непрерывный сепарабельный случайный процесс с независимыми приращениями, удовлетворяющий условиям $P[\eta(\tau) = -\eta(-\tau)] = 1$ и $P[\eta(0) = 0] = 1$.

Тогда, если отклик системы $y(t) = F[\xi(t)]$ является гильбертовым процессом, он может быть представлен в виде ортогонального ряда

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(t) G_n(t), \quad t \in T, \tag{2}$$

где $G_n(t)$ – n-й элемент ортонормированной системы стохастических функционалов от процессов с независимыми приращениями [2], а $C_n(t) = M[y(t)G_n(t)]$ – обобщенный коэффициент Фурье отклика $y(t)$.

В этом случае математическое ожидание отклика –

$$My(t) = C_0(t),$$

а корреляционная функция –

$$R_y(t_1,t_2) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t_1) C_n(t_2) M[G_n(t_1) G_n(t_2)].$$

Следует отметить, что указанное выше разложение (2) осуществляется по системе ортонормированных стохастических функционалов от процессов с независимыми приращениями, которые строятся на основе воздействующего процесса (1) и с учетом связи, существующей для данной нелинейности $F(\cdot)$ между входом и выходом. Таким образом, вид ортонормированной системы зависит как от вида ядра $\varphi(\tau, t)$ и порождающего процесса $\eta(\tau)$, так и от характера анализируемого нелинейного преобразования. Этим самым обеспечивается оптимальный характер используемого ортонормированного стохастического базиса, согласованного в указанном смысле как с самим воздействием, так и с видом нелинейного преобразования.

Однако стохастические ортогональные разложения откликов нелинейных систем $y(t)$ по системе стохастических ортогональных функционалов $\{G_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ при воздействии линейного случайного процесса $\xi(t)$ в практическом плане возможны в том случае, если отклик $y(t)$ удается записать в терминах либо однородных стохастических функционалов

$$\hat{\Phi}_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \hat{K}_n(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n; t) d\eta(\tau_1) d\eta(\tau_2) \ldots d\eta(\tau_n), \tag{3}$$

где $\hat{K}_n(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n; t)$ – интегрируемая с квадратом по переменным $-\infty < \tau_i < \infty$, $i = 1, 2, \ldots$ при любом $t \in (-\infty, \infty)$ неслучайная числовая функция, либо однородных полиномиальных стохастических функционалов вида:

$$\Phi_n(t) = \sum_{k=1}^{N} a_k \prod_{j=1}^{n} \xi_{kj}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} K_n(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n; t) d\eta(\tau_1) d\eta(\tau_2) \ldots d\eta(\tau_n), \tag{4}$$

$$n = 1, 2, \ldots,$$

где $\xi_{kj} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{kj}(\tau, t) d\eta(\tau)$, $k = 1, 2, \ldots;$ $j = 1, 2, \ldots;$

$$K_n(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n; t) = \sum_{k=1}^{N} a_k \prod_{j=1}^{n} \varphi_{kj}(\tau_j, t) - \tag{5}$$

ядро полиномиального функционала;

$\{a_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N\}$ – последовательность действительных неслучайных чисел.

Это требование несколько ограничивает класс нелинейностей, к которым применим рассматриваемый здесь метод стохастических ортогональных разложений. И все же многие нелинейные преобразования могут быть описаны с помощью стохастических функционалов $\Phi_n(t)$ или $\hat{\Phi}_n(t)$. Рассмотрению возможностей такого описания, характеристике в этом плане некоторых классов нелинейных преобразований, используемых в системах обработки информации, и посвящена настоящая работа.

1. ***Аналитические функции***. Пусть нелинейное преобразование является безынерционным и описывается функциональной зависимостью $F(x)$, допускающей представление в виде степенного ряда

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in (X_1, X_2), \tag{6}$$

где

$$a_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n F(x)}{dx^n}\bigg|_{x=0};$$

$X_2 > X_1$ и могут оба принимать и бесконечные значения;

Положим, что на вход нелинейного устройства с характеристикой вида (6) поступает линейный случайный процесс $\xi(t)$ вида (1), для которого выполняется условие $M\xi^n(t) < \infty$, $n = 1,2,\ldots$.

С учетом разложения (5) отклик $y(t)$ нелинейного устройства на воздействие $\xi(t)$ можно записать в виде:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n(t). \tag{7}$$

С учетом представления процесса $\xi(t)$ в виде (1) для его n-й степени имеем:

$$[\xi(t)]^n = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau,t)d\eta(t)\right]^n = \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} K_n(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n;t)d\eta(\tau_1)d\eta(\tau_2)\ldots d\eta(\tau_n),\ \ n = 1,2,\ldots,$$

где ядро

$$K_n(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n;t) = \prod_{j=1}^{n}\varphi(\tau_j,t). \tag{8}$$

Как видим, n-я степень линейного случайного процесса представляет собой частный случай однородного полиномиального стохастического функционала $\Phi_n(t)$ (4), для которого в ядре (5) следует положить $N = 1$ и $a = 1$. Таким образом, можем записать

$$[\xi(t)]^n = \Phi_n(t), \tag{9}$$

где ядро $K_n(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n;t)$ определяется согласно управлению (8). С учетом формулы (9) правую часть управления (7) можно переписать в виде:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(t),$$

где слагаемые являются полиномиальными стохастическими функционалами.

2. ***Ряды Вольтерра.*** В литературе хорошо известно описание нелинейных динамических систем при помощи функциональных полиномов Вольтерра [3]. При этом для непрерывного функционала $F_t[x(t)]$, описывающего связь между входом и выходом нелинейной системы, можно получить представление [4–6]

$$y(t) = F_t[x(t)] = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\hat{K}_n(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n;t_1)x(\tau_1)x(\tau_2)\ldots x(\tau_n)d\tau_1 d\tau_2\ldots d\tau_n, \tag{10}$$

где $y(t)$ – отклик, а $x(t)$ – входное воздействие нелинейной системы.

Будем полагать, что в формуле (10) ядра Вольтерра удовлетворяют обычным условиям физической реализуемости, т.е. $\hat{K}_n(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n;t) = 0$, если хотя бы для одного $1 \le i \le n$ $\tau_i > t$.

Если положить, что входное воздействие $x(t)$ рассматриваемой нелинейной системы представляет собой белый шум $\frac{d\eta(\tau)}{d\tau}$, где $\eta(\tau)$ – однородный стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями и нулевым средним, то выполнение представления (10) можно записать в виде:

$$y(t) = F_t[d\eta(\tau)/d\tau] = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \hat{K}_n(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n; t) d\eta(\tau_1) d\eta(\tau_2) \ldots d\eta(\tau_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\Phi}_n(t),$$

где $\hat{\Phi}_n(t)$ – однородный стохастический функционал вида (3).

Таким образом, получено описание в общем случае инерционной нелинейной системы с помощью однородных стохастических функционалов $\hat{\Phi}_n(t)$ и, следовательно, можно применить к такого типа системам метод стохастических ортогональных разложений при их анализе.

3. ***Стохастические дифференциальные уравнения.*** Пусть нелинейная система описывается нелинейным неоднородным дифференциальным уравнением с нулевыми начальными условиями

$$Ly(t) + P[y(t)] = \xi(t), \tag{11}$$

где L – линейный дифференциальный оператор; $P(\cdot)$ – полином от функции $y(t)$ и ее производных; $y(t)$ – случайная функция, описывающая отклик нелинейного устройства; $\xi(t)$ – случайный процесс, воздействующий на рассматриваемую нелинейную систему, принадлежащий к классу безгранично делимых и представимый в виде (1).

Отметим, что уравнением вида (11) описываются многие автоколебательные системы, такие, например, как автогенератор, магнетрон, молекулярный генератор и др.

Можно показать, используя, например, принцип сжимающих отображений, что уравнение (11) имеет единственное решение при заданных начальных условиях. Таким образом, задав начальные условия, можно найти функциональную зависимость, устанавливающую явную зависимость между случайным воздействием $\xi(t)$ и откликом нелинейной системы $y(t)$.

Дифференциальное уравнение (11) можно записать в эквивалентной интегральной форме [4], [7]:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau, t)\xi(\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau, t)P[y(\tau)]d\tau,$$

где $\psi(\tau, t)$ – весовая функция, соответствующая линейному дифференциальному уравнению

$$Ly(t) = \xi(t),$$

т.е. это импульсная переходная функция линейной системы, описываемой однородным дифференциальным уравнением

$$Ly(t) = 0. \tag{12}$$

Уравнение (11) будем решать методом последовательных приближений. В качестве первого приближения решения $y(t)$ принимаем функцию

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau, t)\xi(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} K_1(\tau, t)d\eta(\tau), \tag{13}$$

которая характеризует линейную зависимость или зависимость первого уровня, присущую исследуемой нелинейной системе, и является решением при нулевых начальных условиях уравнения (12). В уравнении (13) введено обозначение:

$$K_1(\tau,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\tau_1,t)\varphi(\tau,\tau_1)d\tau_1\,.$$

Последующие приближения находятся итерационным способом по рекуррентной формуле [4]

$$y_n(t)=y_1(t)-\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\tau,t)P[y_{n-1}(\tau)]d\tau\,,\qquad n=2,3,\ldots\,. \tag{14}$$

Пусть, например, полином $P(\cdot)$ в формуле (11) будет полиномом второго порядка, т.е. $P(y)=y^2$. Тогда для $y_2(t)$ согласно выражению (14) получаем

$$y_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\tau,t)\xi(\tau)d\tau-\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\tau,t)P[y_1(\tau)]d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}K_1(\tau,t)d\eta(\tau)-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K_2(\tau_1,\tau_2;t)d\eta(\tau_1)d\eta(\tau_2),$$

где с учетом того, что $\xi(t)$ определяется выражением (1), обозначено:

$$K_2(\tau_1,\tau_2;t)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma,t)K_1(\tau_1,\sigma)K_1(\tau_2,\sigma)d\sigma\,.$$

Второе приближение учитывает нелинейные свойства второго порядка.

Следующее приближение $y_3(t)$ учитывает нелинейность третьего порядка и в соответствии с выражением (14) имеет вид:

$$\begin{aligned}y_3(t)=y_1(t)-\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\tau,t)y_2^2(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}K_1(\tau,t)d\eta(\tau)-\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\tau,t)\Bigg[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K_1(\tau_1;\sigma)K_1(\tau_2,\sigma)d\eta(\tau_1)\times\\ \times d\eta(\tau_2)+2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K_1(\tau_1;\sigma)K_2(\tau_2;\tau_3;\sigma)d\eta(\tau_1)d\eta(\tau_2)d\eta(\tau_3)-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K_2(\tau_1,\tau_2;\sigma)\times\\ \times K_2(\tau_3,\tau_4;\sigma)d\eta(\tau_1)d\eta(\tau_2)d\eta(\tau_3)d\eta(\tau_4)\Bigg]d\sigma.\end{aligned} \tag{15}$$

Введем следующие обозначения:

$$K_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3;t)=2\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma,t)K_1(\tau_1,\sigma)K_2(\tau_2,\tau_3,\sigma)d\sigma\,;$$

$$K_4(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4;t)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\sigma,t)K_2(\tau_1,\tau_2,\sigma)K_2(\tau_3,\tau_4,\sigma)d\sigma.$$

Тогда выражение (15) можно переписать так:

$$\begin{aligned}y_3(t)=\int_{-\infty}^{\infty}K_1(\tau,t)d\eta(\tau)-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K_2(\tau_1,\tau_2;t)d\eta(\tau_1)d\eta(\tau_2)+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K_3(\tau_1,\tau_2,\tau_2;t)d\eta(\tau_1)d\eta(\tau_2)d\eta(\tau_3)-\\ -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K_4(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_3;t)d\eta(\tau_1)d\eta(\tau_2)d\eta(\tau_3)d\eta(\tau_4).\end{aligned}$$

Дальнейшие приближения получаются аналогично. Как показано в работе [7], при $n \to \infty$ $y_n(t) \to y(t)$ в среднеквадратическом смысле. Таким образом, получаем решение стохастического нелинейного дифференциального уравнения (11) в терминах стохастических функционалов $\Phi_n(t)$

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} K_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n; t) \prod_{j=1}^{n} d\eta(\tau_j), \qquad (16)$$

где ядра $K_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n; t)$ определяются как видом линейного дифференциального оператора L, так и полиномом $P(\cdot)$ и ядром $\varphi(\tau, t)$ представления внешнего случайного воздействия $\xi(t)$. Отметим, что в правую часть соотношения (16) некоторые слагаемые входят со знаком «минус».

Аналогичным образом можно получить представление решения выражения (11) в виде соотношения (16) и в том случае, когда внешний воздействующий процесс представляет собой случайный процесс типа белого шума $\frac{d\eta(\tau)}{d\tau}$, где $\eta(\tau)$ – однородный случайный процесс с независимыми приращениями и нулевым средним. Отличительной особенностью в данном случае будет то, что ядра $K_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n; t)$ в соотношении (16) будут зависеть только от оператора L и полинома $P(\cdot)$.

Таким образом, рассмотренные выше методы описания классов нелинейных преобразований показывают, что метод стохастических ортогональных разложений может применяться для спектрально-корреляционного анализа самых разнообразных нелинейных радиотехнических устройств как безынерционных, так и инерционных при воздействии как стационарных, так и нестационарных безгранично делимых случайных процессов.

Список литературы

1. *Бойко И.Ф., Марченко Б.Г.* Анализ нелинейных преобразований сигналов в системах диагностики с использованием стохастических ортогональных разложений // Препринт – 542. Институт электродинамики АН УССР – Киев : 1987. – 57 с.

2. *Бойко И.Ф., Марченко Б.Г.* Ортогональні стохастичні функціонали в теорії нелінійних радіотехнічних кіл //Вісник Тернопільського державного технічного університету. Т. 2. – Тернопіль: ТДТУ, 1997. – С. 5–12.

3. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: Радио и связь, 1989. – 656 с.

4. *Пупков К.А. Капалин В.И. Ющенко А.С.* Функциональные ряды в теории нелинейных систем. – М.: Наука, 1976. – 448 с.

5. *Ку И.Х., Вольф А.Н.* Применение функционалов Вольтерра-Винера для анализа нелинейных систем //Техническая кибернетика за рубежом /Под ред. В.В. Солодовникова. – М.: Машиностроение, 1968. – С.145–165.

6. *Методы* нелинейных функционалов в теории электрической связи /Под ред. Б.М. Богдановича. – М.: Радио и связь, 1990. – 280 с.

7. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 2. – М.: Наука, 1974. – 656 с.

Стаття надійшла до редакції 30 вересня 1999 року.