УДК 621.396.67

А.Я. Білецький, І.В. Шелевицький, В.М. Шутко

РЕКУРЕНТНИЙ СПЛАЙН-МЕТОД СПЕКТРАЛЬНОГО ОЦІНЮВАННЯ

Запропоновано рекурентне оцінювання спектра методом найменших квадратів за умови, що спектр можна апроксимувати локальним сплайном.

В задачах числової обробки даних, що містять випадкову складову, часто необхідно оцінити спектр часової послідовності як деяку неперервну аналітичну функцію з певними параметрами. Для цього шукають оцінки параметрів деякої системи, яка породжує аналогічні дані з білого шуму. Визначивши параметри моделі, знаходять відповідну до моделі спектральну функцію. Такі методи називають параметричними [1]. Метод, що пропонується, можна також віднести до параметричних. Однак за часовими відліками оцінюватиметься модель не часового ряду, а безпосередньо спектральної функції. Прямого визначення спектральної функції можна досягти завдяки хорошим наближаючим та регуляризуючим властивостям сплайнів.

Розглянемо задачу в такій постановці. Часова послідовність деякого випадкового процесу представлена відліками $y=y(1),\dots,y(N)$. Цій послідовності відповідає спектр $f=f(1),\dots,f(N)$, отриманий внаслідок перетворення Фур'є: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Q}\, \boldsymbol{f}$, де $\boldsymbol{Q}$ – матриця коефіцієнтів зворотного перетворення Фур'є. Вважатимемо, що спектральна функція описується локальним ермітовим сплайном. Тоді відліки частоти f визначатимуться через сплайн-модель як $\boldsymbol{f=Pa}$ (інтерполяційні рівняння) [2], де $\boldsymbol{P}$ – блочно-діагональна матриця, стовпцями якої є базисні функції інтерполяційного сплайна ; $\boldsymbol{a}$ – вектор параметрів моделі розмірності R x 1, в даному випадку це значення спектра у вузлах інтерполяції . Тоді

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{a}\,. \tag{1}$$

Позначимо $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{P}$, що є зворотним перетворенням Фур'є над базисними функціями моделі. Запишемо систему рівнянь (1) у вигляді:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{W}\,\boldsymbol{a}\,. \tag{2}$$

Знаходитимемо оцінки моделі методом найменших квадратів (МНК) таким чином, щоб мінімізувати квадратичну нев'язку між відліками часової послідовності та відповідними відліками зворотного перетворення Фур'є сплайн-моделі спектра: $(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Wa})^*(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Wa}) = \min$. Розв'язуємо систему нормальних рівнянь:

$$\boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{W}\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{y}\,, \tag{3}$$

або

$$\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{B}\,.$$

Тоді $a = inv(C)B$. Матриця $C^{I}=inv(C)$ є коваріаційною матрицею похибок МНК.

Для спектрального оцінювання у реальному часі важливо отримувати оцінки спектра з надходженням кожного наступного відліку даних. Тобто бажано реалізувати описаний підхід за допомогою рекурентного алгоритму.

Задамося N-граничним значенням числа відліків часової послідовності. Поточне значення числа значимих відліків на певному кроці позначимо через n. До максимальної кількості N відліки доповнятимемо справа нулями: $Y=\{y_1,y_2,...,y_n,0,0,...,0\}$. Отже, система рівнянь (2) матиме вигляд:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} w_{1,1} & w_{1,2} & w_{1,R} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & w_{2,R} \\ \hline w_{n,1} & w_{n,2} & w_{n,R} \\ w_{n+1,1} & w_{n+1,2} & w_{n+1,R} \\ w_{n+2,1} & w_{n+2,2} & w_{n+2,R} \\ \hline w_{N,1} & w_{N,2} & w_{N,R} \end{array}\right] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_R \end{bmatrix}.$$

При оцінюванні інтерполяційні рівняння, які відповідають нульовим доповненням вхідної послідовності, можемо не враховувати. Відкидання ряду рівнянь при оцінюванні спектра МНК впливатиме на загальну нев'язку між вхідними даними та рівнянням моделі. Однак доповнення вхідної послідовності нулями є найпростішою її екстраполяцією. Зворотне перетворення Фур'є сплайн-моделі також екстраполює часову послідовність. Отже, нев'язка даних з відкинутих рівнянь є нев'язкою між різними моделями екстраполяції, які не несуть значимої інформації про вхідний процес. Формально можна придати їм нульову вагу, що рівносильне їхньому вилученню. Фактично для оцінювання використовуємо узагальнений МНК із системою нормальних рівнянь у вигляді:

$$W \cdot ZW a = W \cdot Z y\,,$$

де Z – квадратна діагональна матриця розмірності $N \times N$ з елементами $z_{j,j}=1, j=1,n$.

Процес оцінювання спектра можна почати з числа вхідних відліків, не меншого від кількості вузлів сплайна, які є оцінками спектра ($n_i=R$). В міру надходження часових відліків у систему нормальних рівнянь додаватимемо рівняння. Така модифікація матриць є малоранговою, тому можлива ефективна реалізація рекурентного алгоритму МНК. Звичайно доповнення даних змінюватиме матрицю Z, що вплине на масштаб оцінок. Проте для випадків, коли абсолютне значення оцінок не є важливим, зміни масштабу не враховуватимемо.

Отже, якщо на n-му кроці маємо матриці:

$$Y_n = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_n \end{bmatrix}; \quad W_n = \begin{bmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & w_{1,R} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & w_{2,R} \\ w_{n,1} & w_{n,2} & w_{n,R} \end{bmatrix}; \; A_n = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_R \end{bmatrix},$$

то з надходженням наступного відліку отримаємо:

$$Y_{n+1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_n \\ y_{n+1} \end{bmatrix}; \quad W_{n+1} = \begin{bmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & w_{1,R} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & w_{2,R} \\ w_{n,1} & w_{n,2} & w_{n,R} \\ w_{n+1,1} & w_{n+1,2} & w_{n+1,R} \end{bmatrix}; \; A_{n+1} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \tilde{a}_R \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$C_{n+1} = \left[W_n^* W_n + V_{n+1} V_{n+1}^*\right], \quad B_{n+1} = \left[W_n^* Y_n + V_{n+1} y_{n+1}\right],$$

де $V = \begin{bmatrix} w_{n+1,1} \\ w_{n+1,2} \\ w_{n+1,R} \end{bmatrix}$.

Отже, оцінки спектра визначатимуться за допомогою відомих виразів для рекурентного МНК [3]:

$$A_{n+1} = A_n + pC_n^{-1} V_{n+1} h; \qquad C_{n+1} = \left[C_n^{-1} - C_n^{-1} V_{n+1} p V_{n+1}^* C_n^{-1}\right],$$

де $\quad p = \left[1 + V_{n+1}^* C_n^{-1} V_{n+1}\right]^{-1}; \quad h = y_{n+1} - V_{n+1}^* A_n$.

Розглянемо модифікацію рекурентного методу для випадку, коли аналізується досить велика кількість даних, або послідовність є необмеженою в часі. Тоді доцільно аналізувати дані посегментно. Причому сегменти можуть перекриватися з різним розміром перекриття. Процедура полягає в наступному: оцінювання спектра почнемо з розв'язування системи рівнянь (3) після надходження першого сегмента даних з n відліків ($N=n$, $n \geq R$). Перші оцінки будуються описаним вище способом. З надходженням другого сегмента система рівнянь (2) матиме вигляд:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_n \\ y_{n+1} \\ y_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W \\ W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_R \end{bmatrix},$$

або в загальному вигляді:

$$\begin{bmatrix} Y_i \\ Y_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_i \\ W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_R \end{bmatrix}.$$

Тоді система нормальних рівнянь запишеться так:

$$\begin{bmatrix} W_i^* & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_i \\ W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \overline{a_R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_i^* & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_i \\ Y_{i+1} \end{bmatrix} .$$

Враховуючи структуру матриць, розв'язок з надходженням i+1-го сегмента знайдемо за рекурентними виразами:

$$A_{i+1} = \frac{i}{i+1} C_i^{-1} (B_i + W^* Y_{i+1})$$

або
$$A_{i+1} = \frac{i}{i+1} (A_i + C_i^{-1} W^* Y_{i+1}) .$$

Інверсна матриця для наступного кроку розраховується за формулою

$$C_{i+1}^{-1} = \frac{i}{i+1} C_i^{-1} .$$

Для оцінювання спектра з сегментами, що перекриваються, зміниться лише спосіб формування матриці Y_{i+1}. В останню будуть входити відліки з попереднього сегмента.

Достоїнством викладеного методу та описаних алгоритмів розрахунку є те, що оцінюваними параметрами є значення спектральної сплайн-функції в точках стику. Це дає елементарну інтерпретацію оцінкам. Особливістю даного рекурентного методу є відсутність нарощування фрагментів сплайна при нарощуванні даних, що дозволяє будувати оцінки при фіксованому числі параметрів, використовуючи відомий метод рекурентного МНК.

Список літератури

1. *Марпл.-мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.:Мир,1990. – 348 с.

2. *Бойко И.Ф., Шелевицкий И.В., Шутко В.Н.* Рекуррентный алгоритм построения сплайнов методом наименьших квадратов// Статистические методы обработки сигналов в авиационных радиоэлектронных системах: Сб. науч. тр.– К.: КМУГА,1995. – С. 81-86.

3. *Льюнг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя. – М.: Наука, 1991. – 132 с.

Стаття надійшла до редакції 30 вересня 1999 року.