УДК 621.311

В.А. Игнатов, Ю.Г. Лега, С.М. Первунинский

СИНТЕЗ СТАЦИОНАРНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ФИЛЬТРОВ НЕГАУССОВЫХ СИГНАЛОВ

Решена задача синтеза нелинейного фильтра в классе стационарных полиномиальных степенных операторов. Получены аналитические соотношения, упрощающие анализ характеристик фильтра.

Эффективная фильтрация негауссовых случайных процессов, как известно [1], [2], может осуществляться с использованием нелинейных фильтров. В статистической радиотехнике, в технике измерений статистических характеристик случайных процессов часто применяется линейная операция сглаживания (усреднения) по времени реализации случайного процесса $\xi(t)$, наблюдаемого на интервале времени $\Delta=[t-T,t]$ длительностью T. Обобщением данной операции в классе нелинейных операторов фильтрации служит оператор

$$\eta_S(t)=\sum_{i=0}^{S}a_i\int_{t-T}^{t}\xi^i(t)dt/T, \tag{1}$$

где $a_i, i=\overline{0,s}$ – некоторые константы (параметры) оператора; S – порядок оператора.

Полагая, что процесс $\xi(t)$ образован из аддитивной смеси полезного сигнала, представленного случайным процессом $x(t)$ и помехи $n(t)$, качество фильтра будем характеризовать среднеквадратической ошибкой фильтрации

$$J_S(a,T)=M\left\{|x(t)-\eta_S(t)|^2\right\}, \tag{2}$$

где $M\{z\}$ – символ операции вычисления математического ожидания случайной величины z.

Определение 1. Фильтр, выполняющий фильтрацию сигнала $x(t)$ в соответствии с оператором (1), назовем стационарным полиномиальным фильтром порядка S.

Синтез фильтра по критерию оптимизации (2) выполним в предположении, что процессы $x(t)$ и $n(t)$ являются стационарными в узком смысле с порядком стационарности $2S$ и имеют нулевые начальные моменты первого порядка.

Значение константы a_0 определим из условия несмещенности оценки (1) относительно процесса $x(t)$:

$$a_0=-\sum_{i=1}^{S}\frac{a_i}{T}\int_{t-T}^{t}m_i^{\xi}dt, \tag{3}$$

где $m_i^{\xi}=M\{\xi^i(t)\}, i=\overline{1,S}$ – начальный момент i-го порядка случайного процесса $\xi(t)$.

Подстановка параметра a_0 из условия (3) в соотношение (1) позволяет записать:

$$\eta_S(t)=\mathbf{AV}, \tag{4}$$

где $\mathbf{A}=[a_i]^{i=\overline{1,S}}$ – матрица-строка;

$$\mathbf{V} = \left[\frac{1}{T} \int\limits_{t-T}^{t} \xi_0^i(t)dt \right]_{i=\overline{1,S}}$$ – матрица-столбец;

$\xi_0^i(t) = \xi^i(t) - m_i^\xi, i = \overline{1,S}$ – центрированный случайный процесс $\xi^i(t)$.

Несмещенность случайных процессов $x(t)$ и $\eta_S(t)$ позволяет (2) считать дисперсией ошибки фильтрации величину $x(t)$, значение которой с учетом уравнения (4) определяется выражением

$$\sigma_S^2 = \sigma_X^2 - 2\mathbf{AG_S} + \mathbf{AW_S A^T}, \tag{5}$$

где $\mathbf{G_S} = \left[g_i = \frac{1}{T} \int\limits_{t-T}^{t} F_{1,i}^{x,\xi}\left(t, \nu^{[i]}\right) d\nu \right]_{i=\overline{1,S}}$ – матрица-столбец;

$$\mathbf{W_S} = \left[w_{i,j} = \frac{1}{T^2} \int\limits_{t-T}^{t} \int\limits_{t-T}^{t} F_{i,j}^{\xi}\left(t^{[i]}, \nu^{[j]}\right) dt\, d\nu \right]_{i=\overline{1,S}}^{j=\overline{1,S}}$$ – квадратная матрица порядка S;

σ_X^2 – дисперсия процесса $x(t)$.

В выражении (5) использованы следующие обозначения:

$F_{1,i}^{x,\xi}\left(t, \nu^{[i]}\right) = M\left\{x(t), \xi_0^i(\nu)\right\}$ – совместная ковариационная функция случайных процессов $x(t)$ и $\xi_0^i(\nu)$; $F_{i,j}^{\xi}\left(t^{[i]}, \nu^{[j]}\right) = M\left\{\xi_0^i(t), \xi_0^j(\nu)\right\}$ – совместная ковариационная функция двумерного распределения случайных процессов $\xi_0^i(t)$ и $\xi_0^j(\nu)$.

Учитывая, что для стационарных процессов ковариационные функции зависят от разности рассматриваемых моментов времени, после изменения порядка интегрирования в двукратном интеграле элементы матриц $\mathbf{G_S}$ и $\mathbf{W_S}$ запишем:

$$\begin{gathered} g_i = \frac{1}{T} \int\limits_0^T F_{1,i}^{x,\xi}\left(\nu, 0^{[i]}\right) d\nu, i = \overline{1,S}; \\ w_{i,j} = \frac{1}{T} \int\limits_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|\nu|}{T}\right) F_{i,j}^{\xi}\left(\nu^{[i]}, 0^{[j]}\right) d\nu, i,j = \overline{1,S}. \end{gathered} \tag{6}$$

Утверждение 1. Величина

$$E_S^2 = \mathbf{AW_S A^T} \tag{7}$$

неотрицательно определена при любых значениях элементов a_i, $i = \overline{1,S}$, матрицы $\mathbf{A}$.

Отметим, что матрица $\mathbf{W_S}$ является симметричной с элементами $w_{i,j} = w_{j,i}, i,j = \overline{1,S}$. Это вытекает из свойства симметрии ковариационных функций

$$F_{i,j}^{\xi}\left(\nu^{[i]}, 0^{[j]}\right) = F_{i,j}^{\xi}\left(0^{[i]}, (-\nu)^{[j]}\right) = F_{j,i}^{\xi}\left((-\nu)^{[j]}, 0^{[i]}\right) i,j = \overline{1,S}, \tag{8}$$

которые легко устанавливаются из определения этих функций [3]. Подстановка выражения (8) в соотношения (6) позволяет установить симметрию матрицы $\mathbf{W_S}$.

Симметричность матрицы $\mathbf{W_S}$ с учетом определения функций $F_{i,j}^{\xi}()$ позволяет представить выражение (7) в виде:

$$E_S^2 = M\left\{\left[\sum_{i=1}^{S}\frac{a_i}{T}\int_{t-T}^{t}\xi_0^i(\nu)d\nu\right]^2\right\} \geq 0 .$$

Тем самым установлена неотрицательная определенность квадратичной формы E_S^2, а с ней и положительная полуопределенность матрицы $\mathbf{W}_S$.

Утверждение 2. При положительной определенности матрицы $\mathbf{W}_S$ минимальное значение дисперсии σ_S^2 определяется матрицей $\mathbf{A}$, удовлетворяющей матричному уравнению

$$\mathbf{W}_S\mathbf{A}^T = \mathbf{G}_S . \quad (9)$$

Если скалярная квадратичная функция $\sigma_S^2 = \sigma_S^2(\mathbf{A})$ вида (5) достигает экстремума при некотором значении $\mathbf{A}_0$, то $\left.\frac{d\sigma_S^2(\mathbf{A}_0 + \alpha\delta\mathbf{A})}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$, где $\delta\mathbf{A}$ – вариация элементов матрицы $\mathbf{A}$.

Поскольку

$$\frac{d\sigma_S^2(\mathbf{A}_0 + \alpha\delta\mathbf{A})}{\mathrm{d}\alpha} = -2\delta\mathbf{A}\mathbf{G}_S + \mathbf{A}_0\mathbf{W}_S\delta\mathbf{A}^T + \delta\mathbf{A}\mathbf{W}_S\mathbf{A}_0^T + 2\alpha\delta\mathbf{A}\mathbf{W}_S\delta\mathbf{A}^T ,$$

то $\delta\mathbf{A}\left(\mathbf{G}_S - \mathbf{W}_S\mathbf{A}_0^T\right) = 0$, откуда следует, что при ненулевом значении матрицы $\delta\mathbf{A}$ должно выполняться равенство

$$\mathbf{W}_S\mathbf{A}_0^T = \mathbf{G}_S . \quad (10)$$

Поскольку

$$\frac{d^2\sigma_S^2(\mathbf{A}_0 + \alpha\delta\mathbf{A})}{d\alpha^2} = 2\delta\mathbf{A}\mathbf{W}_S\delta\mathbf{A}^T > 0 ,$$

то экстремум функции σ_S^2 является минимумом.

Совпадение равенств (10) и (9) доказывает утверждение.

Следствие 1. Минимальное значение дисперсии σ_S^2 определяется равенствами

$$\sigma_S^2 = \sigma_x^2 - \mathbf{A}\mathbf{G}_S = \sigma_x^2 - \mathbf{A}\mathbf{W}_S\mathbf{A}^T . \quad (11)$$

Равенства (11) получаются из выражения (5) с учетом уравнения (9).

Зависимость элементов матриц $\mathbf{G}_S$ и $\mathbf{W}_S$, входящих в равенство (11), от интервала наблюдения T указывает на зависимость величины σ_S^2 от параметра T. Поэтому, найденные из уравнения (9) оптимальные значения параметров a_i, $i = \overline{1,S}$, в операторе (1) обеспечивают лишь условный (при заданном значении T) минимум величины σ_S^2. Для определения абсолютного минимума следует, задавшись конкретным видом ковариационных функций $F_{1,j}^{x,\xi}()$ и $F_{i,j}^{\xi}()$, $i, j = \overline{1,S}$, проанализировать зависимость σ_S^2 от величины T.

В общем случае можно отметить, что при значении параметра $T \to 0$ оператор (1) превращается в оператор

$$\eta_s(t) = \sum_{i=0}^{s} a_i \xi^i(t). \qquad (12)$$

Фильтр, выполняющий оценку сигнала по оператору (12), относится к безынерционному полиномиальному фильтру S-го порядка.

Выражение типа (12) является частным случаем оператора (1). Следовательно, синтез оптимальных параметров оператора (1), рассмотренный выше, применим и для оператора (12) при допущении $T = 0$.

При параметре $T \to \infty$ можно заметить, что оператор (1) для эргодического случайного процесса $\xi(t)$ превращается в оценку $\eta_s(t) = 0$. В этом случае, очевидно, дисперсия оценки сигнала при $T \to \infty$ будет стремиться к величине σ_x^2.

Рассмотренные крайние случаи вида оператора (1) в определенной степени характеризуют возможности стационарного полиномиального фильтра при фиксированном значении порядка S. Представляет интерес проанализировать зависимость величины σ_S^2 от величины S.

Поскольку равенство (11) можно записать как

$$\sigma_S^2 = \sigma_x^2 - E_S^2, \qquad (13)$$

где E_S^2 – неотрицательно определенная квадратичная форма, введенная в выражение (7), то в уравнении (13) достаточно рассмотреть зависимость от S величины

$$E_S^2 = \mathbf{A}\mathbf{G}_\mathbf{S} = \mathbf{A}\mathbf{W}_\mathbf{S}\mathbf{A}^\mathrm{T} \le \sigma_x^2. \qquad (14)$$

Зависимость (14)удобнее анализировать с использованием канонической формы вида

$$E_S^2 = \sum_{n=1}^{S} \delta E_n^2, \qquad (15)$$

где $\delta E_n^2 = E_n^2 - E_{n-1}^2, \quad n = \overline{1,S}$, при $E_0^2 = 0$.

Утверждение 3. При положительно определенной матрице $\mathbf{W_n} = \left[w_{i,j}\right]_{i,j=\overline{1,n}}$ величина δE_n^2 – неотрицательная и для оптимальных параметров стационарного полиномиального фильтра n-го порядка определяется из выражения

$$\delta E_n^2 = \frac{\left[\Delta_{n,n}\right]^2}{\Delta_{n-1}\Delta_n}, n = 1,2,\ldots,\Delta_0 = 1, \qquad (16)$$

где $\Delta_{n,n}$ – определитель матрицы, полученной из матрицы $\mathbf{W}_n$ заменой n-го столбца на столбец $\mathbf{G_n} = \left[g_i\right]_{i=\overline{1,n}}$; Δ_n – определитель матрицы $\mathbf{W}_n$.

Пользуясь оптимальными элементами матрицы $\mathbf{A}_n = \left[a_i\right]_{i=\overline{1,n}}$, полученными из решения матричного уравнения (9) при $S = n$ в виде

$$a_i = \frac{\Delta_{n,i}}{\Delta_n}, \qquad i = \overline{1,n} \ , \tag{17}$$

величину δE_n^2 с учетом первого равенства зависимости (14) запишем как

$$\delta E_n^2 = \frac{1}{\Delta_{n-1}\Delta_n}\left\{\Delta_{n-1}\sum_{k=1}^{n}\Delta_{n,k}g_k - \Delta_n\sum_{k=1}^{n-1}\Delta_{n-1,k}g_k\right\}. \tag{18}$$

Разлагая определители $\Delta_{n,k}$, $\Delta_{n-1,k}$ по элементам k-го столбца из выражения (18) имеем:

$$\delta E_n^2 = \frac{1}{\Delta_{n-1}\Delta_n}\left\{\sum_{k,j=1}^{n} g_k g_j\left[A_{j,k}^{n}\Delta_{n-1} - A_{j,k}^{n-1}\Delta_n\right]\right\}, \tag{19}$$

где $A_{j,k}^{p}$ – алгебраическое дополнение элемента j-й строки k-го столбца в матрице определителя Δ_p p-го порядка, $p=(n-1,n)$.

Объединение двойных сумм в уравнении (19) выполнено путем добавления слагаемых

$$\sum_{j=1}^{n} g_n g_j A_{j,n}^{(n-1)} = \sum_{k=1}^{n} g_k g_n A_{n,k}^{(n-1)} = 0,$$

поскольку $A_{j,n}^{(n-1)} = A_{n,k}^{(n-1)} = 0, j,k = \overline{1,n}$, так как n-й строки и n-го столбца в определителе n-1-го порядка не существует.

Пользуясь в уравнении (19) известным соотношением [4]

$$A_{j,k}^{(n)}\Delta_{n-1} - A_{j,k}^{(n-1)}\Delta_n = A_{n,k}^{(n)}A_{j,n}^{(n)}, \qquad j,k = \overline{1,n},$$

получаем

$$\delta E_n^2 = \frac{1}{\Delta_{n-1}\Delta_n}\sum_{j,k=1}^{n} g_j g_k A_{n,k}^{(n)}A_{j,n}^{(n)} = \frac{1}{\Delta_{n-1}\Delta_n}\left(\sum_{j=1}^{n} g_j A_{j,n}^{(n)}\right)^2. \tag{20}$$

Последнее равенство в зависимости (20) совпадает с выражением (16) и доказано при $n = 2,3,\ldots$. Его справедливость для $n = 1$ следует непосредственно из выражения (18), так как в этом случае $\Delta_{1,1} = g_1$.

Неотрицательная определенность δE_n^2 видна из правой части равенства (16): при положительной определенности матрицы $\mathbf{W}_n \Delta_n > 0$, тогда по условию Сильвестра и определитель $\Delta_{n-1} > 0$.

Следствие 2. Значение δE_n^2, $n = \overline{1,S}$ можно определить из выражения

$$\delta E_n^2 = \frac{a_n^{(n)}\Delta_{n,n}}{\Delta_{n-1}} = \frac{\left(a_n^{(n)}\right)^2 \Delta_{n,n}}{\Delta_{n-1}}, \tag{21}$$

где $a_n^{(n)}$, $n=\overline{1,S}$ – оптимальное значение параметра a_n, найденное для оператора (1) n-го порядка.

Равенства (21) получаются из выражения (16) с учетом значения параметра $a_n = a_n^{(n)}$, найденного по уравнению (17).

Применяя соотношения (16) и (21) к выражению (15), получаем требуемые для анализа канонические формы записи величины

$$\sigma_S^2 = \sigma_x^2 - \sum_{i=1}^{S}\left(\Delta_{i,i}\right)^2 / \left(\Delta_{i-1}\Delta_i\right) = \sigma_x^2 - \sum_{i=1}^{S}\left(a_i^{(i)}\right)^2 \Delta_i / \Delta_{i-1}. \tag{22}$$

Форма выражения (22) определяет граничное значение для суммы слагаемых, входящих в это выражение, равное величине σ_x^2. Данное выражение является аналогом неравенства Бесселя применительно к рассматриваемой задаче фильтрации, поскольку величина σ_S^2 всегда положительна.

Таким образом, выполнен синтез нелинейного полиномиального стационарного фильтра S-го порядка. Найдены аналитические соотношения для вычисления дисперсии ошибки фильтрации при оптимальных параметрах синтезированного фильтра.

Список литературы

1. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: Сов. радио, 1974. – 328 с.

2. *Трифонов А.П., Нечаев Е.П., Парфенов В.И.* Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами. – Воронеж: ВГУ, 1991. – 246 с.

3. *Малахов А.Н.* Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований. – М.: Сов. радио, 1979. – 376 с.

4. *Первунинский С.М.* Дисперсия оценки постоянного параметра методом максимизации степенного полинома. // Труды 4-й Междунар. конф. “Новые информационные технологии”. – Харьков: ХТУРЭ, 1998. – С. 24-26.

Стаття надійшла до редакції 11 жовтня 1999 року.