управление (1) не отвечает заданным упруго-массовым характеристикам, то при подстановке (1) в (3) с соответствующими граничными условиями как уравнения, так и граничные условия удовлетворяются с некоторой невязкой. Тогда структура функционала оптимизации следует:

– для заданных (начальных) упруго-массовых характеристик рассчитываем теоретические собственные формы колебаний, образовавшиеся невязки возводим в квадрат и интегрируем по длине балки, результаты суммируем;

– выбираем нормировку невязок, среди всех значений норм невязок (по числу форм) выбираем наибольшее и делим на него значения норм;

– составляем функцию, представляющую собой линейную комбинацию норм от невязок для каждой формы; все коэффициенты этой функции есть неотрицательные числа, в сумме равные единице.

На основании изложенного выше имеем

$$L_j = (L_1)^2 + (L_{1гр})^2 + (L_{2гр})^2,$$

где j – номер формы; L_1 – невязка по уравнению (3); $L_{1гр}, L_{2гр}$ – невязки по граничным условиям (4).

Вычисляем $L = \max L_j (j = \overline{1, NF})$, где NF – количество учитываемых форм, тогда $\overline{L}_j = L_j / L$. Перенумеруем L_j в порядке убывания. Возьмем последовательность чисел $\{\alpha_j, j = \overline{1, NF}\}$ такую, что $0 < \alpha_j < 1$,

$$\sum_{j=1}^{NF} \alpha_j = 1,$$

причем $\alpha_j \geq \alpha_{j+1}$,
$$I = \sum_{j=1}^{NF} \alpha_j \overline{L}_j . \qquad (5)$$

Значения весовых коэффициентов α_j назначаются исследователем конкретно в каждом случае в зависимости от степени достоверности и точности j-й формы колебаний.

Для нахождения расчетных форм колебаний лопасти используется следующая методика.

Решение однородного уравнения (3) ищем в виде ряда

$$y(\xi, t) = \sum_{(i)} \overline{y}_i \cos p_i t, \qquad (6)$$

где i=0,1,2,...; $\overline{y}_i$ – собственная форма колебаний в i-м сечении лопасти; p_i – собственная частота колебаний в i-м сечении лопасти.

Далее получим уравнение собственных колебаний лопасти в поле центробежных сил, подставив выражение (6) в (4)

$$\sum_{(i)} \left[\left(EI\overline{y}_i'' \right)'' - \left(N\overline{y}_i' \right)' \right] = \sum_{(i)} p_i^2 m \overline{y}_i .$$

Разделим уравнение собственных колебаний лопасти i-й формы на квадрат частоты i-го тона p^2

$$\left[EI\hat{y}_i'' \right]'' - \left[N\hat{y}_i' \right]' = m\overline{y}_i , \qquad (7)$$

где $\hat{y}_i = \dfrac{\overline{y}_i}{p_i^2}$.

в середине k-го отсека между сечениями k и k+1; Δr_k и Δr_{k+1} – длины отсеков соответственно k и k+1; $\hat{y}_i'$ – тангенс угла наклона упругой оси лопасти по отношению к оси ξ в сечении k..

Момент в заделке лопасти не известен. Уравнение (9) решаем при граничных условиях (4). Изгибающий момент в первом сечении лопасти

$$\hat{M}_{i,1} = \hat{M}_{i,0} + N_{\frac{1}{2}} \hat{y}_{i,0}' + L_{i,\frac{1}{2}} \Delta r.$$

Согласно граничным условиям $\hat{y}_{i,0} = \beta_{i,0} = 0$.

Следовательно, $M_{i,1} = C_1 \hat{M}_{i,0} + \hat{d}_{i,1}$, где $C_1 = 1$; $\hat{d}_{i,1} = L_{i,\frac{1}{2}} \Delta r_1$.

Изгибающий момент во втором сечении

$$\hat{M}_{i,2} = \hat{M}_{i,1} + N_{1+\frac{1}{2}} \hat{y}_{i,1}' \Delta r_1 + L_{i,1+\frac{1}{2}} \Delta r_2 = C_2 \hat{M}_{i,0} + \hat{d}_{i,2};$$

где $C_2 = 1 + N_{1+\frac{1}{2}} \Delta r_2 \dfrac{C_1 \Delta r_1}{(EI)_1}$; $\quad \hat{d}_{i,2} = \hat{d}_{i,1} + N_{1+\frac{1}{2}} \Delta r_2 \dfrac{\hat{d}_{i,1} \Delta r_1}{(EI)_1}$; $\quad \hat{y}_{i,1}' = \dfrac{M_{i,1}}{(EI)_1} \Delta r_1$.

Изгибающий момент в третьем сечении

$$\hat{M}_{i,3} = \hat{M}_{i,2} + N_{2+\frac{1}{2}} \Delta r_3 \hat{y}_{i,2}' + L_{i,2+\frac{1}{2}} \Delta r_3 = C_3 \hat{M}_{i,0} + \hat{d}_{i,3},$$

где $C_3 = C_2 + N_{2+\frac{1}{2}} \Delta r_3 \left[\dfrac{C_1 \Delta r_1}{(EI)_1} + \dfrac{C_2 \Delta r_2}{(EI)_2} \right]$; $\quad \hat{d}_{i,3} = \hat{d}_{i,2} + N_{2+\frac{1}{2}} \Delta r_3 \left[\dfrac{\hat{d}_{i,1} \Delta r_1}{(EI)_1} + \dfrac{\hat{d}_{i,2} \Delta r_2}{(EI)_2} \right]$;

$$\hat{y}_{i,2}' = \frac{M_{i,1} \Delta r_1}{(EI)_1} + \frac{M_{i,2} \Delta r_2}{(EI)_2}.$$

Изгибающий момент в любом k+1 сечении

$$\hat{M}_{i,k+1} = C_{k+1} \hat{M}_{i,0} + \hat{d}_{i,k+1},$$

где

$$C_{k+1} = C_k + N_{k+\frac{1}{2}} \Delta r_{k+1} \sum_{z=1}^{z=k} \frac{C_z \Delta r_z}{(EI)_z}; \tag{10}$$

$$\hat{d}_{i,k+1} = \hat{d}_{i,k} + N_{k+\frac{1}{2}} \Delta r_{k+1} \sum_{z=1}^{z=k} \frac{\hat{d}_{i,z} \Delta r_z}{(EI)_z}; \tag{11}$$

$$\hat{y}_{i,k}' = \sum_{z=1}^{z=k} \frac{M_{i,z} \Delta r_z}{(EI)_z}. \tag{12}$$

Если k+1 соответствует номеру сечения на конце лопасти, то, принимая во внимание граничные условия (10) из (12), найдем момент в заделке лопасти

$$M_{i,0} = -\frac{\hat{d}_{i,k+1}}{C_{k+1}}.$$

Для упрощения вычислений примем, что длина отсека постоянна, тогда (10) - (12) упростятся и будут иметь вид:

$$C_{k+1} = C_k + N_{k+\frac{1}{2}} \Delta r^2 \sum_{z=1}^{z=k} \frac{C_z}{(EI)_z};$$

$$\hat{d}_{i,k+1} = \hat{d}_{i,k} + N_{k+\frac{1}{2}} \Delta r^2 \sum_{z=1}^{z=k} \frac{\hat{d}_{i,z}}{(EI)_z};$$

$$\hat{y}_{i,k} = \Delta r \sum_{z=1}^{z=k} \frac{\hat{M}_{i,z}}{(EI)_z};$$

В качестве нулевого приближения зададимся i-й формой лопасти (например, соответствующей формой собственных колебаний не вращающейся лопасти или лопасти ругого несущего винта с аналогичной схемой закрепления комля на втулке). Форму нормируем таким образом, чтобы прогиб на конце лопасти

$$\bar{y}_i^{(0)}(R) = 1.$$

Прогиб i-й формы определим численным интегрированием по формуле

$$\hat{y}_{i,k+1} = \hat{y}_{i,k} + \hat{y}_{i,k}{}' \Delta r_{k+1}.$$

Собственную частоту колебаний найдем из условия, что величина $\bar{y}_i(R)$ на конце лопасти равна единице

$$p_i^2 = \frac{1}{\hat{y}_i(R)}.$$

Зная собственную частоту колебаний и прогиб i–й формы, определим собственные формы колебаний

$$\bar{y}_{i,k} = p_i^2 \hat{y}_{i,k}.$$

Рассмотрим алгоритм оптимизации критерия идентификации.

В качестве варьируемых параметров определим упруго-массовые характеристики $\hat{EI}(\xi)$, $\hat{m}(\xi)$ в виде вектора

$$\vec{P} = \{\hat{EI}(\xi), \hat{m}(\xi)\},$$

где "$\wedge$" - обозначает оценку неизвестных точных значений, которые ограничены снизу $\underline{EI}(\xi) \le \hat{EI}(\xi) \le \overline{EI}(\xi)$ и сверху $\underline{m}(\xi) \le \hat{m}(\xi) \le \overline{m}(\xi)$ (технические ограничения).

Оптимизация критерия (5) проводится для каждого сечения $\xi_i (i = \overline{1,l})$. Поскольку критерий $I(\vec{P})$ может иметь несколько локальных экстремумов, для решения данной оптимизационной задачи применен метод прямого поиска Хука-Дживса, который заключается в следующем. Определяется критерий $I(\vec{P})$ в базисной точке $\vec{P}_{Bl}$ с целью получения сведений о локальном поведении критерия. Эти сведения используются для нахождения подходящего направления поиска по образцу, т.е. проводится исследующий поиск типа 1. Функция $I(\vec{P})$ в базисной точке $\vec{P}_{Bj}$ находится следующим образом:

а) вычисляется значение функции $I(\vec{P})$ в базисной точке $\vec{P}_{Bl}$;

б) каждая компонента вектора параметров по очереди изменяется прибавлением длины шага Δ_i и рассчитывается новое значение $I(\vec{P}+\Delta_i)$. Если это приводит к уменьшению значения критерия, то $\vec{P}_{B1}$ заменяется на $\vec{P}_{B1}+\Delta_i$. В противном случае определяется значение критерия $I(\vec{P}+\Delta_i)$, и если его значение уменьшилось, то $\vec{P}_{Bj}$ заменяется на $\vec{P}_{B1}-\Delta_i$. Если не один из проделанных шагов не приводит к уменьшению значения критерия, то i-я компонента вектора $\vec{P}_{B1}$ остается неизвестной и рассматривается изменение других компонент;

в) если $\vec{P}_{B1}=\vec{P}_{B2}$, т.е. уменьшение критериальной функции не достигнуто, то исследование повторяется вокруг этой же базисной точки $\vec{P}_{B1}$, но с уменьшением длины шага. На практике удовлетворительным является уменьшение длины шага в десять раз;

г) если $\vec{P}_{B1} \neq \vec{P}_{B2}$, то производится поиск по образцу.

Поиск по образцу осуществляется таким образом. Удачные изменения переменных в исследующем поиске (т.е. те изменения переменных, которые уменьшили критерий) определяют вектор $\vec{P}$, указывающий некоторое направление минимизации, которое может привести к успеху. Серия ускоряющих шагов, или поиск по образцу, проводится вдоль этого вектора до тех пор, пока критерий уменьшается. Длина шага при поиске по образцу вычисляется в соответствии с правилом акселерации:

$$\vec{P}_i^{(k+1)} = 2\vec{P}_i^{(k)} - \vec{P}_i^{(B)} ,$$

где $\vec{P}_i^{(B)}$ - предыдущий базисный вектор.

Исследующий поиск, проводимый после поиска по образцу, называется исследующим поиском типа 2. Если критерий не уменьшается в процессе исследующего поиска типа 2, то говорят, что данный поиск по образцу не удачен, и проводится новый исследующий поиск типа 1 для определения нового удачного направления.

Описанная последовательность поисков заканчивается, если оказываются удовлетворенными условия основных тестов. Первый тест проводится после каждого исследующего поиска и поиска по образцу; изменение критерия сравнивается с заранее установленной малой величиной. Если значение целевой функции не отличается на величину, большую, чем это число, от предыдущего основного значения целевой функции, исследующий поиск или поиск по образцу считается неудачным. В противном случае проводится тест для определения, увеличился ли критерий (неудача) или уменьшился (удачный поиск). Этот второй тест нужен для уверенности, что значение критерия все время улучшается. Третий тест проводится после неудачи в исследующем поиске на стадии уменьшения изменения ΔP. Поиск может быть закончен, если на данном шаге изменение каждой переменной ΔP_i оказывается меньше, чем некоторое заранее определенное число.

Список литературы

1. *Штейнберг Ш.Е.* Идентификация в системах управления.– М.: Энергоатомиздат, 1987.– С.21-30.

2. *Миль М.Л.* Вертолеты. Расчет и проектирование. Ч2. Колебания и динамическая прочность. – М.: Машиностроение, 1967. – С.23-24.

Стаття надійшла до редакції 30 вересня 1999 року.