

А.В. Кудиненко, В.П. Котляров

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ДЛЯ РАСЧЕТА АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ САМОЛЕТА

Приведены результаты исследования движения самолета на больших углах атаки и скольжения. Рассмотрена преобразованная полная система дифференциальных уравнений, описывающая движение самолета в пространстве, в которой выделяются два колебательных контура, связанных по вращению специальным дифференциальным уравнением, а также аналитические особенности процесса синхронизации данных колебательных контуров.

Важным этапом изучения динамики самолета является исследование предельных по углу атаки режимов полета с пространственным вращением, поскольку они во многом определяют как область применения самолета, так и безопасность полета. В этой связи несомненный интерес представляет разработка математического аппарата, позволяющего проводить не только качественную, но и количественную оценку движения самолетов на больших углах атаки, что является важным условием правильного моделирования данных режимов, например, в наземных обучающих стендах.

Анализ материалов испытаний летательных аппаратов на больших углах атаки с вращением относительно всех трех осей показывает, что в установившихся процессах появляются характерные особенности, связанные с динамикой движения. Так, движение обычно имеет колебательный характер с одинаковой или кратной периодичностью изменения параметров.

Учитывая, что в области аналитического исследования нелинейных систем дифференциальных уравнений важное место занимает гипотеза о виде разыскиваемого решения, то, располагая характером этого решения по материалам испытаний, можно преобразовать полные уравнения, описывающие движение самолета в пространстве, и прийти к приведенной ниже системе уравнений как наиболее удобной с точки зрения объяснения возникновения автоколебательного процесса на больших углах атаки [3]:

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t) + \omega_1^2(\tau) u(t) + A_1(\tau) \vartheta(t) &= \varepsilon f_1[\tau, u(t), \dot{u}(t)]; \\ \ddot{\vartheta}(t) + \omega_2^2(\tau) \vartheta(t) + A_2(\tau) u(t) &= \varepsilon f_2[\tau, \vartheta(t), \dot{\vartheta}(t)], \end{aligned} \quad (1)$$

где $u(t), \vartheta(t)$ – координаты, характеризующие соответственно параметры продольного и бокового движений; ω_1, ω_2 – частоты колебаний контуров; A_1, A_2 – коэффициенты сил взаимосвязи между контурами; ε – малый положительный параметр; f_1, f_2 – нелинейные составляющие, характеризующие поступление энергии в динамическую систему и ее рассеяние. Координаты $u(t), \vartheta(t)$ связаны через специальное дифференциальное уравнение вращения, которое здесь не рассматривается, однако его решение учитывается в коэффициентах $A_1, A_2, \omega_1, \omega_2$. Кроме того, данные коэффициенты являются функциями аэродинамических производных и кинематических параметров движения, а первые три коэффициента A_1, A_2, ω_1 зависят еще и от моментов инерции. Нелинейные составляющие f_1, f_2 определяются только коэффициентами аэродинамических моментов. Отметим, что именно

эти составляющие при малом ε обуславливают все особенности автоколебательного процесса.

О параметре τ следует сказать особо. Он характеризует наличие собственной динамики в изменении аэродинамических сил и моментов, ввод этого параметра позволяет учитывать аэродинамические эффекты отрывного обтекания.

Для удобства дальнейших рассуждений, заменой переменной $\omega_1 t = t'$, приведем систему (1) к виду:

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t') + x(t') + A_1(\tau)y(t') &= \varepsilon f'[\tau, x(t'), \dot{x}(t')] \\ \ddot{y}(t') + \xi^2(\tau)y(t') + A_2(\tau)x(t') &= \varepsilon f_2'[\tau, y(t'), \dot{y}(t')] \end{aligned} \quad (2)$$

где $\frac{\omega_2(\tau)}{\omega_1(\tau)} = \xi(\tau)$.

Наибольший практический интерес представляют два случая исследования уравнений (2): а) случай основного резонанса $\xi = 1$ и слабых сил связи; б) случай основного резонанса и значительных сил связи. Причем малые связи реализуются на углах атаки $\alpha_{\text{ср}} \approx 65^\circ \dots 80^\circ$, когда кинематическое перекрестное взаимодействие достаточно мало, а аэродинамические коэффициенты устойчивости близки к нулю. Значительные силы связи между колебательными контурами реализуются на $\alpha_{\text{ср}} \approx 40^\circ \dots 50^\circ$. В обоих случаях к исследованию взаимодействия применим асимптотический метод, изложенный в работах [1.2].

а) Случай основного резонанса и малых сил связи.

Положим $A_1(\tau) = \varepsilon r_1(\tau)$, $A_2(\tau) = \varepsilon r_2(\tau)$, $\xi = 1 + \gamma(\tau)$,

тогда система (2) переписывается в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t') + x(t') &= \varepsilon f_1'[\tau, x(t'), \dot{x}(t')] - \varepsilon r_1(\tau)y; \\ \ddot{y}(t') + [1 + \varepsilon\gamma(\tau)]^2 y(t') &= \varepsilon f_2'[\tau, y(t'), \dot{y}(t')] - \varepsilon r_2(\tau)x. \end{aligned} \quad (3)$$

Решение системы (3) ищем с помощью асимптотического метода в форме первого улучшенного приближения:

$$\begin{aligned} x(t') &= a(t') \cos \psi(t') + \varepsilon \vartheta_1[\tau, a(t'), b(t'), \psi(t'), \theta(t')], \\ y(t') &= b(t') \cos \theta(t') + \varepsilon \vartheta_2[\tau, a(t'), b(t'), \psi(t'), \theta(t')]. \end{aligned}$$

Для определения $a(t')$, $b(t')$, $\psi(t')$, $\theta(t')$ получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt'} &= \frac{\varepsilon}{2} F_1(a) - \frac{\varepsilon r_1(\tau) b}{2} \sin \eta; \\ \frac{db}{dt'} &= \frac{\varepsilon}{2} F_2(b) + \frac{\varepsilon r_2(\tau) a}{2} \sin \eta; \\ \frac{d\psi}{dt'} &= 1 + \frac{\varepsilon b r_1(\tau)}{2a} \cos \eta; \\ \frac{d\theta}{dt'} &= 1 + \varepsilon \gamma(\tau) + \frac{\varepsilon a r_2(\tau)}{2b} \cos \eta; \\ \eta(t') &= \theta(t') - \psi(t'). \end{aligned}$$

Стационарные величины амплитуд и фаз автоколебаний найдем из условий:

$$\gamma = \text{const}, \quad r_1 = \text{const}, \quad r_2 = \text{const},$$

$$a = \text{const}, \quad b = \text{const}, \quad \eta = \text{const}.$$

$$\left(\frac{da}{dt'} = 0, \frac{db}{dt'} = 0, \frac{d\eta}{dt'} = \frac{d\theta}{dt'} - \frac{d\psi}{dt'} = 0 \right).$$

Необходимо отметить, что стационарные режимы будут практически осуществимы лишь в том случае, когда они асимптотически устойчивы.

На рис.1 показаны графики зависимости квадратов амплитуд, сдвигов фаз и частот периодических колебаний от величины γ .

Сплошными линиями показаны устойчивые стационарные режимы, пунктирными — неустойчивые. Из рисунка видно, что имеется два устойчивых стационарных режима колебаний — синфазный и антифазный, причем области существования периодических режимов пересекаются лишь в небольшой области вблизи точного резонанса. При небольшом удалении от точного резонанса сохраняется только один из периодических режимов, а именно тот, у которого частота ближе к собственной частоте второго, более мощного колебательного контура. При значительных расстройках частот периодические режимы становятся неустойчивыми и переходят в квазипериодические режимы биений.

б) *Случай основного резонанса и значительных сил связи.*

Для этого варианта рассматриваем систему (2), к которой также, как и в первом случае, применим асимптотический метод.

При $\xi = 1$ и больших коэффициентах A_1, A_2 частоты связанных колебаний порождающей системы ν_1, ν_2 , которые определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} 1 - \nu^2 & A_1 \nu^2 \\ A_2 \nu^2 & \xi^2 - \nu^2 \end{vmatrix} = 0,$$

будут значительно отличаться друг от друга, так что в системе не будет внутреннего резонанса.

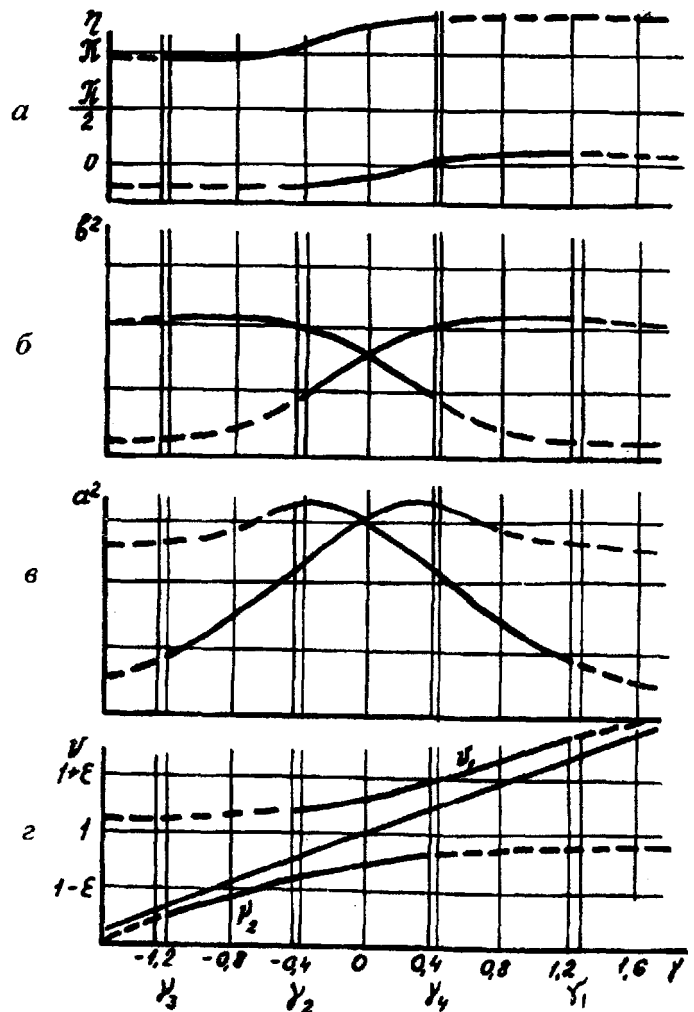


Рис.1. Случай основного резонанса и малых сил связи

Решение (2) ищем в первом приближении в виде

$$\begin{aligned}x(t') &= a_1(t') \cos \psi_1(t') + a_2(t') \cos \psi_2(t'), \\y(t') &= k_1(\tau) a_1(t') \cos \psi_1(t') + k_2(\tau) a_2(t') \cos \psi_2(t'),\end{aligned}$$

где k_1, k_2 определяются формулами

$$k_j = \frac{\nu_j - 1}{A_1 \nu_j^2} = \frac{A_2 \nu_j}{\nu_j^2 - \xi} \quad (j=1,2).$$

Для нахождения функций $a_1(t'), a_2(t'), \psi_1(t'), \psi_2(t')$ получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}\frac{da_j}{dt'} &= \varepsilon P_j(a_1, a_2), \\ \frac{d\psi_j}{dt'} &= \nu_j + \varepsilon \theta_j(a_1, a_2).\end{aligned} \quad (4)$$

Так как одна из частот связанных колебаний всегда больше каждой из парциальных частот, то k_1 всегда отрицателен, а k_2 – положителен. Поэтому колебания с частотой ν_1 будут антифазными, а колебания с частотой ν_2 – синфазными.

Исследуем стационарные режимы колебаний, которые получаем из условия

$$a_1 = \text{const}, \quad a_2 = \text{const} \quad \left(\frac{da_1}{dt'} = 0, \frac{da_2}{dt'} = 0 \right).$$

Для определения этих режимов получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}P_1(a_1, a_2) &= a_1 (C_0 - C_1 a_1^2 - C_2 a_2^2) = 0, \\ P_2(a_1, a_2) &= a_2 (D_0 - D_1 a_1^2 - D_2 a_2^2) = 0,\end{aligned} \quad (5)$$

где $C_0, C_1, C_2, D_0, D_1, D_2$ являются функциями $\nu_1, \nu_2, A_1, A_2, k_1, k_2, \xi, \tau$.

Система (5) имеет четыре решения:

- 1) $a_1 = a_2 = 0$;
- 2) $a_1 \neq 0; a_2 = 0$;
- 3) $a_1 = 0; a_2 \neq 0$;
- 4) $a_1 \neq 0; a_2 \neq 0$.

Первое решение дает нам состояние покоя системы, второе и третье – одночастные периодические режимы связанных колебаний, четвертое – двухчастотный квазипериодический режим.

Для выяснения условий существования каждого из режимов необходимо исследовать систему (4) на устойчивость. Отметим, что квазипериодический режим при ξ , достаточно близких к единице, не существует. Данный режим появляется и становится устойчивым лишь тогда, когда одновременно нарушаются условия устойчивости периодических режимов, т.е. когда исчезают оба периодических режима взаимной синхронизации. Картина взаимной синхронизации для случая значительных сил показана на рис.2.

Сплошными линиями обозначены участки устойчивых периодических режимов, пунктирными – участки неустойчивых. Как видно из рисунка, для случая значительных сил связи область синхронизации значительно расширяется.

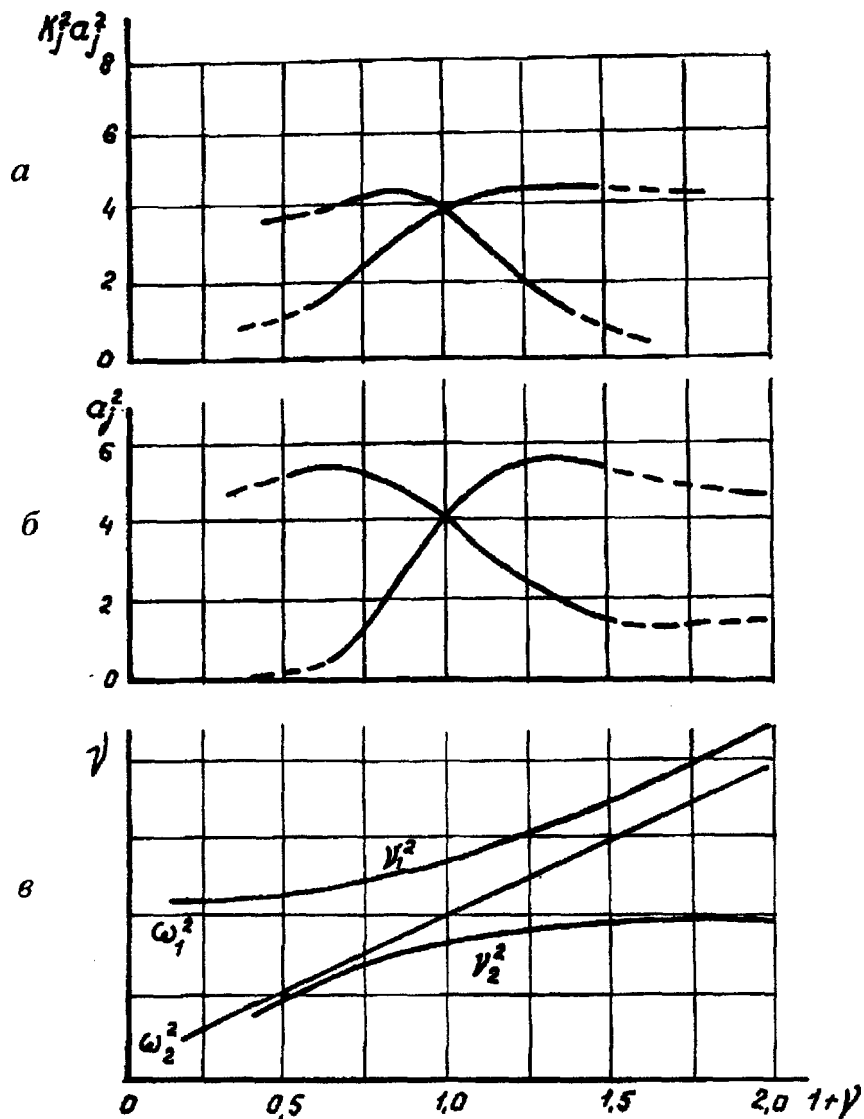


Рис.2 Случай основного резонанса и значительных сил связи

Необходимо отметить, что результаты, полученные расчетным путем для случаев малых и значительных сил связи, хорошо согласуются с материалами летных испытаний, что говорит о возможности использования асимптотических методов для расчета автоколебательных процессов на больших углах атаки самолета.

За рамками данной статьи остались вопросы исследования запаздывания кинематических параметров движения, хотя предложенный подход позволяет произвести и такой анализ. В этом случае вместо уравнений (1) необходимо рассматривать дифференциально-разностные уравнения.

Список литературы

1. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
2. *Рубаник В.П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. – М.: Наука, 1969. – 290 с.
3. *Кудиненко А.В.* Многосвязные системы динамики полета. – К.: КВВАИУ, 1978. – 215 с.

Стаття надійшла до редакції 14 квітня 1998 року.

Анатолій Володимирович Кудиненко (1934) закінчив Київський інститут ВПС в 1957 році. Доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри, декан факультету авіаційного обладнання Київського міжнародного університету цивільної авіації.

Автор більше 180 друкованих робіт у галузі підвищення ефективності пілотажно-навігаційних комплексів літаків, динаміки польоту та авіаційних тренажерів.

Anatoliy V. Kudinenko (b. 1934) graduated from Kyiv Air Force Institute (1957), DSc (Eng), professor, head of chair, dean of Aviation Equipment Department of Kyiv International University of Civil Aviation. Author of more than 180 publications on improvement of efficiency of pilotage-navigation complexes of airplanes, flight dynamics and airplane simulators.

Володимир Петрович Котляров (1954) закінчив Київський інститут ВПС в 1977 році. Кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, начальник управління Центрального науково-дослідного інституту. Автор більше 50 робіт у галузі авіаційних тренажерів і багатозв'язних систем динаміки польоту.

Volodymir P. Kotlyarov (b. 1954) graduated from Kyiv Air Force Institute (1977). PhD, senior scientific researcher. Head of the Department of Central Scientific Research Institute, author of more than 50 publications on aviation simulators and multiconnected systems of flight dynamics.