УДК 512.546.2(045) РДАСНТІ 27.17.17

О.М. Супрун

ПІВГРУПА НЕКОМПАКТНИХ ДИСКРЕТНИХ ПІДГРУП ВІДНОСНО ОПЕРАЦІЇ ТОПОЛОГІЧНОГО ПОРОДЖЕННЯ ПІДГРУП

Вивчено будову компактно покривної недискретної топологічної абелевої групи, в якій множина дискретних підгруп утворює півгрупу відносно операції топологічного породження. Описано недискретні топологічні абелеві групи з півгрупою відносно операції породження множини дискретних підгруп. Розглянуто двоїсті умови.

До кінця 50-х років в теорії абстрактних груп було отримано багато вагомих результатів з теорії нільпотентних розв'язних груп та їхніх узагальнень з різними додатковими умовами обмежувального характеру.

Накопичені результати і нові методи в абстрактній теорії груп не могли не вплинути на розвиток теорії топологічних груп. Під цим впливом з'явився новий напрямок в теорії топологічних груп, який можна назвати алгебраїчним. Суть його полягає в тому, що на топологічні групи ввели різні обмеження, що є аналогами відповідних обмежень та конструкцій теорії абстрактних груп. Результати, які розглянуто, саме належать до цього напрямку і є безпосереднім продовженням роботи [1].

В роботі використані загальноприйняті позначення і терміни [2, 3].

Нехай $NK(G)$ – множина всіх некомпактних груп G, $DNK(G)$ – підмножина дискретних підгруп множини $NK(G)$. Розглянемо будову топологічних абелевих груп, у яких множина $DNK(G)$ утворює півгрупу $DNK(G, \vee)$ відносно операції топологічного породження підгруп.

Введемо такі позначення: нехай p – просте число, $T_p(G)=\{x\in G: x^p=1\}$. H – підгрупа з G, тоді $\pi_H=\{p\mid T_p(g)\cap H\neq 1\}\cap\{p\mid T_p(G)\not\subset H\}$.

Лема 1. Нехай топологічна абелева група G=$B(G)$, а H – її відкрита компактна підгрупа. Якщо $|\pi_H|=\infty$, або для деякого p підгрупа $T_p(G)$ – недискретна компактна підгрупа, то множина $DNK(G)$ не утворює півгрупу $DNK(G, \vee)$.

Теорема 1. Нехай G – компактно покривна недискретна топологічна абелева група. Множина $DNK(G)$ утворює півгрупу $DNK(G, \vee)$ тоді і тільки тоді, коли:

1) існує відкрита компактна підгрупа H, для якої $|\pi_H|<\infty$;

2) підгрупа $T_p(G)$ або компактна, або дискретна (p = 2, 3, 5, ...);

3) якщо $T_p(B_0)\neq 1$, то в G не має дискретних p-підгруп нескінченної експоненти.

Доведення. *Необхідність.* Виконання умов 1 і 2 випливає з леми 1. Виконання умови 3: нехай L – дискретна p-група. Розглянемо підгрупу $L\cdot B_0$, оскільки $L\cdot B_0/B_0$ – дискретна група, а B_0 – подільна підгрупа, то $L\cdot B_0=M\times B_0$, де M – дискретна p-група. Ясно також, якщо L-група нескінченної експоненти, то M – також група нескінченної експоненти.

За умовою $T_p(B_0)\neq 1$. А це означає, що $B_0\supset A=\langle a_1,a_2,\dots,a_j,\dots\rangle\cong C_{p^\infty}$, де $a_j^{p^j}=1, a_j^p=a_{j-1}$.

Нехай V – базисна підгрупа в групі M. Доведемо, що V – група скінченної експоненти. Припустимо, що це не так. Тоді $V \supset X = \prod_{i=1}^{\infty}\langle b_{k_i}\rangle$, де порядок елемента b_{k_i} дорівнює p^{k_i} і $p^{k_i} < p^{k_{i+1}}$. Нагадаємо, що $V \cdot B_0 = V \times B_0$. Розглянемо підгрупу $U = \langle a_{k_1} b_{k_1}, a_{k_2} b_{k_2}, \ldots, a_{k_j} b_{k_j}, \ldots\rangle$. Очевидно, що $U \cap B_0 = 1$. Дійсно, нехай $z = (a_{k_1} b_{k_1})^{l_1} \cdot (a_{k_2} b_{k_2})^{l_2} \cdot \ldots \cdot (a_{k_s} b_{k_s})^{l_s} \subset B_0$, тоді $b_{k_1}^{l_1} \cdot b_{k_2}^{l_2} \cdot \ldots \cdot b_{k_s}^{l_s} \subset B_0$ або $b_{k_i}^{l_i} = 1$. Звідси p^{k_i} ділить l_i, а це значить, що $z = 1$. Таким чином, U – дискретна група. $\langle\overline{U,X}\rangle \supset \overline{A}$. Отже, $\langle\overline{U,X}\rangle$ – недискретна підгрупа. Звідси випливає, що V – підгрупа скінченної експоненти і як сервантна виділяється прямим співмножником з групою M. Якщо $M \neq V$, то $M \supset X \cong C_{p^\infty} = \langle b_1, b_2, \ldots, b_j, \ldots\rangle$, де $b_j^p = b_{j-1}, b_j^{p^j} = 1$. Знову будуємо підгрупу $U = \langle a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_j b_j, \ldots\rangle \cong C_{p^\infty}$ і доводимо, що вона дискретна. Дійсно, якщо $(a_j b_j)^{l_j} \in B_0$, то $b_j^{l_j} \in B_0$ або $b_j^{l_j} = 1$. А це означає, що p^j ділить l_j. Отже, $(a_j b_j)^{k_j} = 1$.

Підгрупа $\langle\overline{X,U}\rangle \supset \overline{A}$ і, значить, недискретна. Таким чином, M і, отже, L –підгрупи скінченної експоненти.

Достатність. Нехай D_1 и D_2 – довільні дискретні групи G. Тоді $D_1 \cdot D_2 = \prod_p S_p(D_1) \cdot S_p(D_2)$.Розглянемо $S_p(D_1) \cdot S_p(D_2) \cap H$. Якщо $T_p(G)$ – компактна підгрупа, то $S_p(D_1)$ і $S_p(D_2)$ – черніковські групи ($T_p \cap S_p(D_i)$ – скінченна група і, отже, $S_p(D_i)$ – черніковські групи). Звідси $S_p(D_1) \cdot S_p(D_2)$ – черніковська підгрупа. Якщо $T_p(G)$ – дискретна підгрупа, то $T_p(S_p(D_1) \cdot S_p(D_2) \cap H)$ – скінченна група і, отже, $S_p(D_1) \cdot S_p(D_2) \cap H$ – знову черніковська група.

Отже, в будь-якому випадку $X = S_p(D_1) \cdot S_p(D_2) \cap H$ – черніковська група. Якщо $X \supset A \cong C_{p^\infty}$, то $T_p(B_0) \neq 1$ і за умовою $S_p(D_1), S_p(D_2)$ – групи скінченної експоненти. А, отже, $S_p(D_1), S_p(D_2)$ – скінченні групи. Але тоді $S_p(D_1) \cdot S_p(D_2)$ – також скінченна група і $A \notin S_p(D_1) \cdot S_p(D_2) \cap H$. Отже, X – скінченна група.

За умовою $|\pi_H| < \infty$. Звідси майже для всіх p підгрупа $X = 1$. Якщо це не так, то для деяких простих чисел $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ $T_{q_i}(S_p(D_1) \cdot S_p(D_2) \cap H) \neq 1$. Але тоді $T_{q_i}(G) \subset H(|\pi_H| < \infty)$. Підгрупи $T_{q_i}(D_1)$ і $T_{q_i}(D_2)$ не є одночасно одиничними. Таким чином, для деякої нескінченної підмножини простих чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots$ і, наприклад, для D_1 виконано: $T_{m_i}(D_1) \cap H \neq 1$. Але тоді D_1 – недискретна група. Протиріччя: переріз $D_1 \cdot D_2 \cap H$ скінченний. Так, нехай $x \in D_1 \cdot D_2 \cap H$ і $x = a_1 a_2 \ldots a_k$, де $a_k - p_k$ – елемент. Тоді для деякого n $x^n = a_k^n$, де $(n, p_k) = 1$. Але майже для всіх p $S_p(D_1 \cdot D_2) \cap H = 1$. Звідси випливає, що існує таке фіксоване l, коли завжди $x \in \prod_{i=1}^{l}(S_{p_i}(D_1 \cdot D_2) \cap H)$. Але вже доведено, що група $S_p(D_1 \cdot D_2) \cap H$ – скінченна. Отже, $D_1 \cdot D_2 \cap H$ – скінченна група. Тобто $D_1 \cdot D_2$ – дискретна

Теорема 2. Нехай G – дискретна топологічна абелева група і $G \neq B(G)$. Множина $DNK(G)$ є півгрупою $DNK(G,\vee)$ тоді і тільки тоді, коли група G задовольняє умови:

1) $r(G/B(G)) < \infty$;

2) G містить відкриту компактну підгрупу H скінченної експоненти;

3) підгрупа $T_p(G)$ – або дискретна, або компактна для $p = 2,3,5,\ldots$.

Доведення. *Необхідність.* Оскільки $R = \overline{\langle\langle 1\rangle, \langle\sqrt{2}\rangle\rangle}$, то векторна частина $R^n = 1$. Нехай c – чистий елемент, а $h \neq 1$ – довільний елемент нескінченного порядку відкритої компатної підгрупи H, тоді $c \cdot h$ – також чистий елемент. Дійсно, якщо $\langle\overline{c \cdot h}\rangle$ – компактна група, то $c \cdot h \in B(G)$ і, отже, $c \in B(G)$. Але це не так. Підгрупа $\langle\langle c\rangle, \langle c \cdot h\rangle\rangle \supset \langle\overline{h}\rangle$. А цього бути не може. Виконання умови 3 випливає з теореми 1 (в $B(G)$ дві дискретні підгрупи породжують дискретну).

Виконання умови 1. Відомо, що при $R^n = 1$ підгрупа $B(G)$ відкрита і $G/B(G)$ – чиста дискретна підгрупа. Припустимо, що $r(G/B(G)) = \infty$. Тоді в групі G візьмемо підгрупу M таку, що $M/B(G) = \prod\limits_{i=1}^{\infty}\langle c_i\rangle$. Якщо b_i – прообрази c_i в підгрупі M, то $\langle b_1, b_2, \ldots, b_m, \ldots\rangle = \prod\limits_{i=1}^{\infty}\langle b_i\rangle$ - дискретна підгрупа і $M = \prod\limits_{i=1}^{\infty}\langle b_i\rangle \times B(G)$. Доведемо спочатку, що елементи $b_1, b_2, \ldots, b_m, \ldots$ – лінійно незалежні. Нехай $\prod\limits_{i=1}^{m} b_i^{l_i} = 1$, тоді $\prod\limits_{i=1}^{m} c_i^{l_i} = 1$, звідси випливає, що $l_i = 0$. Зрозуміло, що $\prod\limits_{i=1}^{\infty}\langle b_i\rangle \cdot B(G) = M$. Нехай $x \in \prod\limits_{i=1}^{\infty} b_i^{l_i} \in B(G)$, тоді $\prod\limits_{i=1}^{m} c_i^{l_i} = 1$ або $l_i = 0$. А це означає, що $\prod\limits_{i=1}^{\infty}\langle b_i\rangle \mathrel{\rm I} B(G) = 1$. Оскільки $B(G)$ – відкрита підгрупа, то підгрупа $\prod\limits_{i=1}^{\infty}\langle b_i\rangle$ – дискретна і $M = \prod\limits_{i=1}^{\infty}\langle b_i\rangle \times B(G)$.

Доведено, що група $B(G)$ містить відкриту компактну підгрупу H скінченної експоненти. Отже, деяка силовська група $S_p(H) \supset \overline{\prod\limits_{i=1}^{\infty}\langle a_i\rangle}$, де $a_i^p = 1$. Оскільки $b_i \cdot a_i$ – також прообрази c_i, то $\langle b_1 \cdot a_1, \ldots, b_n \cdot a_n, \ldots\rangle = \prod\limits_{i=1}^{\infty}\langle b_i a_i\rangle$ – також дискретна підгрупа. Підгрупа $\left\langle \prod\limits_{i=1}^{\infty}\langle b_i\rangle, \prod\limits_{i=1}^{\infty}\langle b_i a_i\rangle \right\rangle \supset \overline{\prod\limits_{i=1}^{\infty}\langle a_i\rangle}$ і, отже, – недискретна, отже маємо протиріччя. Таким чином, $r(G/B(G_0)) < \infty$.

Достатність. Нехай D_1 і D_2 – дві дискретні підгрупи. Підгрупа $B(G)$ задовольняє всі умови теореми 1 ($|\pi_H| < \infty$, оскільки H – відкрита компактна підгрупа скінченної експоненти). Отже, $M = B(D_1) \cdot B(D_2)$ – дискретна підгрупа. Оскільки, $B(G)$ – відкрита підгрупа, то $D_i \cdot B(G)/B(G) \cong D_i/B(D_i)$. Таким чином, $r(D_i/B(D_i)) < \infty$.

Розглянемо підгрупу $D_1 \cdot D_2/M$ в фактор-групі G/M і нехай $\varphi: G \to G/M$. Оскільки $D_i \cdot M/M \cong D_i/B(D_i)$, то $\varphi(D_i) = L_i$ – групи скінченного рангу r_i. Маємо, що $L_1 \cdot L_2/L_2 \cong L_1/L_1 \mathrel{\rm I} L_2$. Отже, підгрупи L_1, L_2 – скінченного рангу. Підгрупа G/M містить відкриту компактну підгрупу H^* скінченної експоненти. Таким чином, $L_1 \cdot L_2 \mid H^*$ – група скінченного рангу. Але тоді вона скінченна. Звідси випливає, що $L_1 \cdot L_2$ і, отже, $D_1 \cdot D_2$ – дискретна підгрупа.

Для подальшого дослідження нам знадобляться наступні факти.

Топологічна абелева група G цілком незв'язана тоді і тільки тоді, коли її група характерів X компактно покривна.

Дійсно, нехай $G_0 = 1$, і, припустимо, що X містить чистий елемент і, отже, підгрупу $\langle a \rangle$. Група характерів $\langle a \rangle$ дорівнює $G / A(\langle a \rangle) \cong T$. Але фактор-група цілком незв'язної групи цілком незв'язна. Маємо протиріччя. Таким чином, X – компактно покривна група.

Нехай тепер X – компактно покривна група і припустимо, що $G_0 \neq 1$. Тоді $G_0 = B_0(G) \times R^n$. Якщо $R^n \neq 1$, то X має фактор-групу $X / M \cong R$. Отже, $R^n = 1$. Якщо $G_0 \neq 1$, то її група характерів є дискретна чиста фактор-група X / M – протиріччя. Таким чином, G – цілком незв'язна група.

Далі, нехай G – топологічна абелева група і X – її група характерів. Тоді $A(G_0)$ дорівнює $B(X)$ і навпаки, $A(B(X)) = G_0$. Дійсно, групою характерів G / G_0 є анулятор $A(G_0)$. Оскільки група G / G_0 цілком незв'язна, то $A(G_0) \subset B(X)$. Фактор-група $X / A(G_0)$ – група характерів G_0. Оскільки $X / A(G_0)$ – чиста, то $A(G_0) = B(X)$. Те, що $A(B(X)) = G_0$ випливає з теореми про взаємність анулятoрів.

Позначимо через $FK(G)$ множину всіх невідкритих підгруп W групи G з властивістю, що G/W – компактна група. Опишемо будову абелевої топологічної групи G, для якої $FK(G)$ є півгрупою $FK(G, \wedge)$.

Умова $FK(G, \wedge)$ – двоїста до умови $DNK(G, \vee)$. Подальше твердження двоїсте теоремі 1.

Наслідок 1. Нехай G – некомпактна цілком незв'язна топологічна абелева група. Множина $FK(G)$ утворює півгрупу $FK(G, \wedge)$ тоді і тільки тоді, коли група G має таку будову.

1. Існує відкрита компактна підгрупа M така, що тільки для скінченного числа простих чисел $p_1, p_2, \dots, p_k$ виконано $\overline{pG} \cdot M \neq G$ і $\overline{pG} \not\subset M$.

2. $G / \overline{pG}$ – або компактна, або дискретна для $p = 2, 3, 5, \dots$.

3. Якщо $G / B(G) = G_1$ має фактор-групу індексу p, то G не має p-компактної фактор-групи нескінченної експоненти.

Доведення. Перефразуємо в термінах двоїстості пункти 1-3 теореми 1 для групи характерів X.

1. $|\pi_H| < \infty$ для деякої відкритої компактної підгрупи H. Це означає, що множина простих чисел, для яких $T_p \mid H \neq 1$ і $T_p \not\subset H$, – скінченна.

Оскільки $A(T_p) = \overline{pX}$ і $A(H) = M$ – відкрита компактна підгрупа, то умова $T_p \mid H \neq 1$ рівносильна $\overline{pG} \cdot A(H) \neq X$ і умова $T_p \not\subset H$ рівносильна $A(H) \not\subset pX$.

2. Оскільки групою характерів T_p є фактор-група $X / \overline{pX}$, то умова, що підгрупа T_p – компактна або дискретна, рівносильна умові $X / \overline{pX}$ – компактна або дискретна підгрупа.

3. Групою характерів G_0 є фактор-група $X / B(X)$. Умова $T_p \mid G_0 \neq 1$ рівносильна умові, що $X / B(X)$ не має фактор-групи індексу p.

Умова, що G не має дискретних p-підгруп нескінченної експоненти, еквівалентна умові, що група X не має p-компактних фактор-груп нескінченної експоненти.

Наслідок 2. Нехай G – топологічна некомпактна абелева група і $G_0 \neq 1$. Множина $FK(G)$ утворює півгрупу $FK(G, \wedge)$ тоді і тільки тоді, коли група G задовольняє умови:

1) $\dim(G_0) < \infty$;

2) G має відкриту компактну підгрупу M таку, що G/M – дискретна група скінченної експоненти;

3) підгрупа $G/\overline{pG}$ або компактна, або дискретна для p=2, 3, 5, ...

Доведення. Переформулюємо умови теореми 2 в термінах двоїстості для групи характерів X.

1. Група характерів $G/B(G)$ – група X_0. Але $r(G/B(G)) < \infty$ тоді і тільки тоді, коли $r(X_0) < \infty$ [4].

2. Якщо $A(H) = M$, то M – відкрита компактна підгрупа в X; в теоремі 2 підгрупа H - скінченної експоненти. Отже, X/M як група характерів групи H є дискретною групою скінченної експоненти.

3. Компактність або дискретність фактор-групи $X/\overline{pX}$ доведена в наслідку 1.

Список літератури

1. *Супрун О.М.* Півгрупові структури підгруп деяких абелевих топологічних груп. К., 1996. Деп. в УКРІНТЕІ. 18.11.96, № 134–Ук. 96.

2. *Глушков В.М.* Локально нильпотентные локально бикомпактные группы // Тр. Маковского матем. общества. – 1955.– № 4. – С. 291–332.

3. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. – М.: Наука, 1975. – 654 с.

4. *Чарин В.С.* О группах конечного ранга. II // Укр. матем. журнал, 1966. –18, № 3. - С. 85-96.

Стаття надійшла до редакції 16 листопада 1998 року.

Ольга Миколаївна Супрун (1961) закінчила Київський державний університет імені Т.Г. Шевченка в 1983 році. Кандидат фізико-математичних наук. Має 28 наукових праць. Працює в галузі топологічних груп.

Olga N. Suprun (b.1961) graduated from Shevchenko Kyiv State University (1983) and in 1995 defenced the thesis in speciality "Algebra and theory of numbers". Author of 28 publications. Specializes in the field of topological groups.