УДК 532.529

В.М. Буйвол

МЕТОДИ ТЕОРІЇ ЗБУРЕНЬ В ТЕЧІЯХ НАВКОЛО ПОРОЖНИН В РІДИНІ

Розглянуто математичну модель течії навколо порожнин в рідині з урахуванням дії збурень різної природи. Запропоновано модель зосередженої дії гідродинамічного тиску, який прикладено на вільних межах кавітаційних каверн.

Методи теорії збурень давно знаходять широкі застосування в задачах механіки суцільних середовищ. Саме в механіці суцільних середовищ найчастіше мають місце процеси, які проходять в дуже вузьких областях. Ці процеси не дуже відрізняються від інших уже вивчених процесів. Методи теорії збурень особливо ефективні тоді, коли існує розв'язок більш простої задачі, близької за фізичним змістом або математичною моделлю.

Методи теорії збурень виявились плідними в задачах гідродинаміки течій при наявності вільних меж [1-4] та інших джерел. Застосування цих методів у задачах про кавітаційні течії і в гідродинаміці течій навколо порожнин виявили в цих досить різних задачах немало спільних рис. Основа для такої спільності криється у виконанні кінематичних та динамічних умов на вільних межах течій.

На основі аналізу особливого значення динамічної умови на межах каверни було отримано варіант нелінійної системи рівнянь [4] , яка ввібрала в себе найсуттєвіші риси попередніх моделей [2, 3], а невдовзі в работах [5,6] завершено пошуки найбільш точної в рамках моделі ідеальної рідини системи рівнянь руху меж тонких каверн в полі дії збурень різної природи.

Паралельно, навіть з деяким випередженням, розвивались дослідження динаміки меж парогазових порожнин. Квазілінійна теорія тут була запропонована в 1968 р. [7] і значно вдосконалена в пізнішій роботі [8]. Автори цих досліджень опирались на розклади функцій за поліномами Лежандра і використовували рівняння Лагранжа. Нелінійні доданки в рівняннях були отримані, як і у випадку каверн, завдяки врахуванню деформацій меж порожнини. Розбіжність в рівняннях пояснювалась різною точністю задоволення умов на межі.

У розумінні згаданої точності системи рівнянь, які отримані в работах [4, 6], на сьогодні є найбільш прийнятними. Система рівнянь [6] має всі складові рівнянь інших авторів, але з деякими доповненнями та уточненнями, які мало впливають при гранично малих збуреннях, але бувають важливими при підвищених рівнях збурень. В работі [6] виявлена також важлива аналогія між системами рівнянь для тонкої каверни і для порожнини.

Детальніше про розвиток досліджень збурень течій навколо порожнин і каверн можна дізнатись з оглядових праць [10, 11].

Вдаючись до короткого висвітлення основних рис математичної моделі, зауважимо, що в основу методу покладена гідродинаміка тонких осесиметричних каверн і сферичних порожнин в ідеальній рідині. Вважаючи потенціали цих течій відомими, як і форми порожнин, збурення течії можна визначити у вигляді

$$\Phi = \Phi_0 + \varphi, R = R_0 + f.$$

Задача визначення збурень зводиться до інтегрування такої системи рівнянь:

$$\nabla^2 \varphi = 0,$$

$$-\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\nabla\Phi_0 - \vec{c}\right)\nabla f - \nabla\varphi\nabla F_0 - f\frac{\partial\left(\nabla\Phi_0 - \vec{c}\right)\nabla F_0}{\partial n},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+(\nabla\Phi_0-\vec{c})\nabla\varphi+f\left[\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial n\partial t}+(\nabla\Phi_0-\vec{c})\frac{\partial\nabla\Phi_0}{\partial n}\right]=$$
$$-\frac{\partial\Phi_0}{\partial t}+\vec{c}\nabla\Phi_0-\frac{1}{2}(\nabla\Phi_0)^2-\frac{\widetilde{p}_n-p_\infty}{\rho}, \qquad (1)$$

де $\vec{c}$ – вектор швидкості переміщення системи координат; $\widetilde{p}_k, p_\infty$ - узагальнений тиск в каверні та тиск на нескінченності; ρ – густина рідини; $F_0(x,t)=0$ – рівняння поверхні тіла, на якому утворюється каверна. При цьому збурення потенціалу φ і радіуса f порожнини можуть виникати внаслідок різних збурень фізичної або геометричної природи. До них можна віднести все те, що відрізняє конкретну математичну модель від моделі незбуреної течії (Φ_0, R_0) Це, наприклад, збурення, пов'язані з наявністю поля сили тяжіння і поверхневого натягу, стисливості рідини та її в'язкості, місцевого тиску, а також з різними геометричними особливостями течії (орієнтацією тіла, на якому створюється каверна, його несиметричністю, обмеженістю потоку і т. ін.).

Використовуючи лінійне наближення відповідних розкладів і рухомі системи координат на основі системи рівнянь, можна отримати нелінійну нескінченну систему диференціальних рівнянь відносно мод деформацій форми симетричної спочатку замкненої вільної поверхні [4,6]. Так наприклад, динаміка деформацій меж тонкої каверни визначається системою рівнянь:

$$\left(-R_0+\frac{3}{2}f_2\right)+u\left(-2\dot{R}_0+\frac{\dot{R}_0}{R_0}f_2+2f_2\right)-\frac{u^2}{R_0}f_3=0,$$
$$-\frac{R_0}{n}\ddot{f}_n-\frac{2\dot{R}_0}{n}\dot{f}_n+(n-1)\left(\frac{\ddot{R}_0}{n}+\frac{2u^2}{R_0}\right)f_n-2u\left(\dot{f}_{n-1}-\dot{f}_{n+1}\right)-$$
$$-\left(\frac{\dot{u}}{2}+\frac{u\dot{R}_0}{\dot{R}_0}\right)f_{n-1}+\left(\frac{3\dot{u}}{2}+\frac{u\dot{R}_0}{R_0}\right)f_{n+1}-\frac{nu^2}{R_0}f_{n+2}- \qquad (2)$$
$$-\frac{(n-2)u^2}{R_0}f_{n-2}-\frac{u^2}{R_0}f_1\delta_{n3}+\left[u^2+\left(\frac{\dot{u}}{2}+\frac{u\dot{R}_0}{R_0}\right)f_1\right]\delta_{n2}=\widetilde{\sigma}_n,$$
$$\widetilde{\sigma}_n=\sigma_n+\frac{8\overline{H}_n}{We}-\frac{\overline{Z}_n}{2Fr^2},$$

де δ_{nk} - символ Кронекера; We і Fr – числа Вебера і Фруда за діаметром початкового перетину (перетину зриву струменів); $\sigma_n, \overline{H}_n, \overline{Z}_n$ – коефіцієнти розкладів в ряди числа кавітації (якщо воно не стале), середньої кривизни поверхні і підняття точки на межі каверни над горизонтальною площиною. Вирази для цих величин наведені в працях [4,6].

Особливістю рівнянь (2) є те, що вони записані відносно мод деформацій вільної поверхні каверни. Дуже подібні рівняння теж і відносно мод деформацій вільної поверхні, які отримані для випадку руху в рідині довільної форми порожнини. Єдиною умовою тут є вимога, щоб форма попрожнини не дуже відрізнялась від однієї з класичних форм. Структура цих рівнянь як в кавітаційних течіях, так і в течіях навколо порожнин однакова, на що вказують порівняння відповідних рівнянь. Виявлена аналогія дозволяє сформулювати цікаві і корисні твердження та прогнозувати динаміку меж як каверни, так і порожнини. Ця аналогія особливо корисна тому, що в деяких задачах гідродинаміки кавітаційних течій можна використати результати, отримані в задачах гідродинаміки сфероподібних порожнин, і навпаки. А оскільки ці галузі гідродинаміки розвивались певний час незалежно, то в цьому є сенс.

Математична модель (2) може бути застосована для визначення дії місцевих збурень на вільні границі розділу середовищ, якими є поверхня кавітаційної каверни. Тоді розклади функцій можна виконати за тригонометричними функціями так:

$$R(t) = R_0(t) + \sum_{n=2}^{\infty} f_n(t)\cos\vartheta.$$

Систему рівнянь (2) треба проінтегрувати за умови, що в заданій частині каверни на досить малій її довжині Δx діє місцевий тиск:

$$\Delta p = \begin{cases} 0, x < x_0, \\ \Delta p, x_0 < x < x_0 + \Delta x, \\ 0, x > x_0 + \Delta x. \end{cases}$$

Тут і далі замість розмірного часу t використовується відносна координата (або відносний час) $x = V^*_\infty t^* / L^*_k$, де V^*_∞ – швидкість течії, яка набігає на тіло; і L^*_k – півдовжина каверни. Зірочками помічені розмірні величини (надалі для спрощення зірочки опускаємо).

Місцевий тиск створюють, наприклад, струмені відпрацьованих газів, які витікають із сопел двигуна. Цей тиск у математичній моделі спричиняє появу специфічних початкових і граничних умов, які потрібно тут визначити. Найдоцільніше це зробити на основі лінеаризації системи рівнянь

$$\begin{aligned} R_0 f_0'' + 2R_0' f_0' + R_0'' f_0 &= -\frac{\Delta\sigma_0}{4}, \\ R_0 f_n'' + 2R_0' f_n' - (n-1)R_0'' f_n &= -\frac{n\Delta\sigma_n}{2} \end{aligned} \tag{3}$$

при початкових умовах $f_0(x_0) = f_n(x_0) = 0$.

На малій ділянці каверни (виключаючи її носову та кормову частини) радіус поперечного перетину можна вважати незмінним. Отже, в цих рівняннях другими та третіми доданками можна знехтувати. Тоді ці рівняння

$$R_0(x) f_0'' = -\frac{\Delta\sigma_0}{2}, \quad R_0(x) f_0'' = -\frac{\Delta\sigma_0}{2} \text{ і}$$

легко проінтегрувати і, скориставшись теоремою про середнє значення інтеграла, прийти до таких значень для швидкостей деформацій форми каверни на початку процесу:

$$f_0'(x_0) = \frac{\Delta\sigma_0 \Delta x}{4R_0(x_0)}, f_n'(x_0) = \frac{\Delta\sigma_n \Delta x}{2R_0(x_0)},$$

де величини $\Delta\sigma_n$ визначаються розкладами Фур'є приросту числа кавітації. Ці нульові значення мод деформацій і ненульові значення їхніх швидкостей використаємо при інтегруванні системи рівнянь (3), але з нульовими правими частинами:

$$\begin{aligned} R_0 f_0'' + 2R_0' f_0' + R_0'' f_0 &= 0, \\ R_0 f_n'' + 2R_0' f_n' - (n-1)R_0'' f_n &= 0. \end{aligned}$$

Проінтегрувавши ці рівняння, знайдемо наближений вираз для швидкостей деформацій на досить малій ділянці поверхні каверни $(x_0, x_0 + \Delta x)$:

$$f_n(x)=\frac{nR_0(x_0)\Delta\sigma_n\Delta x}{2R_k\sqrt{n-1}}\sin\left\{\frac{\sqrt{n-1}}{2}\ln\frac{[1-a(1-x)][1+a(1-x_0)]}{[1-a(1-x_0)][1+a(1-x)]}\right\}$$

$$f_n'(x)=\frac{nR_0(x_0)\Delta\sigma_n\Delta x}{2R_k\sqrt{n-1}}\cos\left\{\frac{\sqrt{n-1}}{2}\ln\frac{[1-a(1-x)][1+a(1-x_0)]}{[1-a(1-x_0)][1+a(1-x)]}\right\},$$

де R_k - відносний радіус мідельового перерізу каверни; a – стала, яка залежить від числа кавітації . Нагадаємо, що радіус міделя каверни та її півдовжина залежать від перетину зриву струменів і числа кавітації:

$$R_k=R_н\sqrt{\frac{c^0{}_x(1+\sigma)}{k\sigma}},\ L_k=R_н\frac{1{,}92-3\sigma}{\sigma},$$

а для радіуса перетину каверни використана функція

$$R_0(x)=R_н\sqrt{1-a^2|1-x|^2},\ a^2=\frac{1-3\sigma}{1+\sigma}.$$

Аналіз отриманих результатів показує, що в перетині каверни, де діють місцеві збурення тиску, осесиметричне розширення, викривлення осі каверни і деформації форми каверни відсутні, оскільки ці величини при $x=x_0$ дорівнюють нулю. Отже, для визначення цих величин необхідно знати значення $\Delta\sigma_н$ (n=0,1,2,...), які можна наближено відшукати за інтегральними характеристиками місцевих збурень тиску.

Нехай існує k ізольованих збурень. Якщо прийняти, що область тиску від кожного з них обмежується кутом $2\vartheta_0$, і позначити імпульс збурення через T^* (наприклад, імпульс повітряного струменя), то можна отримати співвідношення

$$R^*{}_0\ (x_0)\int_{-\vartheta_0}^{\vartheta_0}d\vartheta\int_{x^*(\vartheta)}\Delta P^*dx=\frac{T^*}{k}\sin\beta,$$

де β – кут, який утворює вектор швидкості збурення з віссю каверни; $x^*(\vartheta)$ – межа області тиску. Нехай надлишковий тиск ΔP^* розподіляється за законом

$$\int_{x^*(\vartheta)}\Delta P^*dx=D^*\cos\frac{2\pi\vartheta}{2k\vartheta_0}.$$

Тоді можна отримати таке співвідношення :

$$\Delta\sigma\Delta x=\frac{\pi T\sin\beta}{2k^2\vartheta_0R_0\sin(\pi/k)}\cos\left(\frac{\pi\vartheta}{k\vartheta_0}\right),$$

в якому всі величини віднесено до півдовжини каверни $L^*{}_k$ та швидкісного напору, що тепер дозволяє знайти наближені значення як мод деформацій, так і їхніх швидкостей:

$$f_0(x)=\frac{(x-x_0)T\sin\beta}{4\pi kR_0(x)\sin(\pi/k)},\ f_0'(x)=\frac{TR_k{}^2\left[1-a^2(1-x)(1-x_0)\right]}{4\pi kR_0(x)R^3{}_0(x)\sin(\pi/k)}.$$

Аналогічно можна знайти і вищі моди та швидкості деформацій.

Список літератури

1. *Plesset M.S.* On the stability of fluid flows with spherical shape symmetry// J. Appl. Phys. – 1954. – N.25.– P.96–98

2. *Логвинович Г.В.* Гидродинамика течений со свободными границами// Тр. ЦАГИ. – 1965.– Вып. 935 . – 298 с.

3. *Журавлев Ю.Ф.* Методы теории возмущений в пространственных струйных течениях.// Тр. ЦАГИ.– 1973.– Вып. 532.-С. 1–22.

4. *Логвинович Г.В., Буйвол В.Н., Шевчук Ю.Р.* Система уравнений возмущенного движения тонких каверн. Серия А// Доклады АН УССР.– А.-К:– 1985.– С. 29–32.

5. *Воронин В.В.*, Журавлев Ю.Ф. К вопросу о деформации тонких осесимметричных каверн.// Тр. ЦАГИ.– 1985.– Вып.2272.– С.29–35.

6. *Буйвол В.Н.* Движение и деформация газонаполненных полостей в жидкости// Прикл. гидромеханика: Сб. – К. : Наук. думка, 1989.– С. 5–27.

7. *Yeh H.-C. and Yang W.-J.* Dynamics of bubbles moving in liquids with pressure gradient//J. Appl. Phys.–1968.–V.39.– N.7

8. *Herman W.A.H.J.* On the instability of the translating gas bubble under the influence of a pressure step.// Philips Res. Repts Suppl.–1973.–N.3.– P.2–26.

9. *Воинов О.В., Петров А.Г.* Движение пузырей в жидкости// Итоги науки и техники. МЖГ.- М.: ВИНИТИ, 1976.– Т.10.– С. 86–147.

10. *Воронин В.В., Мачехина Т.Н.* Современное состояние исследований кавитационных течений.// Обзоры. – М.: ОНТИ ЦАГИ,1985.– N 651.– 146 с.

Стаття надійшла до редакції 4 лютого 1999 року.

Василь Миколайович Буйвол (1934) закінчив Київський державний університет ім. Т.Г.Шевченка в 1957 р.. Доктор фізико-математичних наук, професор кафедри вищої математики Київського міжнародного університету цивільної авіації. Підготував 10 кандидатів наук, має близько 130 наукових праць, в тому числі три монографії і п'ять навчальних посібників. Спеціаліст в області математичної фізики і механіки суцільних середовищ.

Vasyl M. Buivol (b.1934) graduated from T.G. Shevchenko Kyiv State University. DSc in Phys-Math. Sciences, professor of the Higher Mathematics Department of Kyiv International University of Civil Aviation. He has prepared 10 specialists with PhD scientific degree. Author of 130 scientific publications, including three monographs and five textbooks. Specialises in the sphere of mathematical physics and mechanics of continuous media.