УДК 621.372

А.Я. Белецкий, В.В. Клобуков

ЧАСТНЫЙ АЛГОРИТМ УПОРЯДОЧЕНИЯ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ УОЛША

Рассмотрен один из алгоритмов упорядочивания базисных функций Уолша, который позволяет (с учетом фазовых характеристик спектра) установить однозначное соответствие частот на входе и выходе процессора быстрого преобразования Фурье.

Функции Уолша обладают особыми свойствами, привлекающими к ним все большее внимание. Важнейшими из них являются следующие: по функциям Уолша можно производить разложение произвольных сигналов в ряд Уолша-Фурье, и они принимают всего два значения (+1 или -1), поэтому удобны для вычисления на ЭВМ.

Сведенные вместе и пронумерованные функции Уолша разных порядков образуют систему. Число функций, включаемых в систему, обычно равно числу отсчетов каждой функции, так как при дискретном спектральном анализе сигналов с N отсчетами число спектральных составляющих также должно быть равно N. Функции Уолша являются периодическими с двоично-рациональным периодом, поэтому их, как правило, задают на интервале $N=2^n$, n=1,2, ...

Поскольку нумерация (упорядочение) функций Уолша может быть произведена разными способами, то возможны различные системы функций Уолша. Удобным способом представления этих систем является изображение их в виде квадратных матриц, в которых каждая строка - это функция Уолша, причем для простоты вместо значений элементов (+1) и (-1) записывают только знаки "+" или "–".

Наиболее изученными системами функций Уолша являются системы Уолша-Адамара, Уолша-Пэли и классических функций Уолша [1]. Данными системами не исчерпываются все возможные системы функций Уолша. Помимо них, существует много других систем, как симметрических, так и несимметрических.

Рассмотрим один из частных способов упорядочивания функций Уолша, основанный на формировании матриц дискретного преобразования с использованием дерева быстрого преобразования Фурье [2]. Принцип формирования коэффициентов последней ступени преобразования на примере 16-ти точечного БПФ приведён в табл.1.

При N=32 и b=1 (номер базиса в предложенной классификации) последняя ступень БПФ содержит N/2=16 весовых коэффициентов, каждый из которых равен (+). Последующие базисы (b≥ 2) формируются по правилу: весовые коэффициенты базиса делятся на $m=2^{b-1}$ блока, причем весовые коэффициенты нечетных блоков принимаются равными соответствующим коэффициентам базиса b-1, а весовые коэффициенты четных блоков принимаются противоположными соответствующим весовым коэффициентам базиса b-1. Так, для N=32 и b=2 количество блоков $m = 2^{2-1} = 2$. Первый блок (нечетный) содержит первые восемь элементов (0–7), которые равны соответствующим весовым коэффициентам первого базиса (т.е. "+"), второй блок (четный) – следующие восемь элементов (8–15), которые равны

Таблица 1

					5	4	3	2	1	
				5	4	3	2	1		
			5	4	3	2	1			
		5	4	3	2	1				
W_i	5	4	3	2	1					
0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
1	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-
2	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-
3	+	+	+	-	+	+	+	+	+	+
4	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-
5	+	+	-	-	+	+	+	+	+	+
6	+	+	-	+	+	+	+	+	+	+
7	+	+	-	+	-	-	-	-	-	-
8	+	-	-	-	-	-	-	-	-	-
9	+	-	-	-	+	+	+	+	+	+
10	+	-	-	+	+	+	+	+	+	+
11	+	-	-	+	-	-	-	-	-	-
12	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+
13	+	-	+	+	-	-	-	-	-	-
14	+	-	+	-	-	-	-	-	-	-
15	+	-	+	-	+	+	+	+	+	+
	b=1	b=2	b=3	b=4	b=5					

соответствующим весовым коэффициентам первого базиса, взятым с противоположным знаком (т.е. "–"). В общем случае при b>1 можно записать:

$$W_{b,i\,(\text{нечетный блок})} = W_{b-1,i}$$

$$W_{b,i\,(\text{четный блок})} = -W_{b-1,i}\ ,$$

где b - номер базиса; i - номер по порядку весового коэффициента последней ступени БПФ.

При данном методе синтеза базисов Уолша существует всего $m = \log_2 N$ различных способов упорядочивания совокупности весовых коэффициентов последней ступени БПФ.

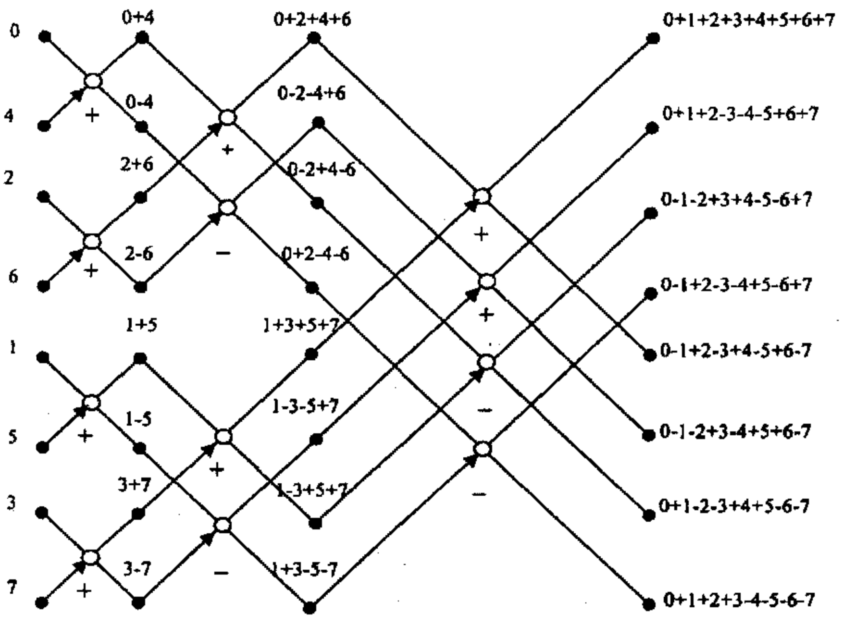
Матрицу ДПФ можно получить непосредственно из дерева БПФ, задавая ту или иную последовательность сигналов на входе дерева. Так, если входные сигналы сохраняют естественную последовательность, мы приходим к матрице типа Адамара. Подвергнув входные сигналы двоично-инверсной перестановке, можно получить матрицу преобразования, подобную преобразованию Пэли.

Наибольший интерес, из приведенных выше базисов, представляет второй базис Уолша (b=2), поскольку лишь он единственный (при учете фазовых характеристик спектра) дает возможность установить однозначное соответствие частот на входе и выходе процессора БПФ. В табл. 2 приведены значения "поворачивающих" множителей для 16-ти точечного БПФ в базисе Уолша (b=2).

Таблица 2

	Ступени БПФ				
W_i	1	2	3	4	5
0	+	+	+	+	+
1	+	-	+	+	+
2	+	+	-	+	+
3	+	-	-	+	+
4	+	+	+	-	+
5	+	-	+	-	+
6	+	+	-	-	+
7	+	-	-	-	+
8	+	+	+	+	-
9	+	-	+	+	-
10	+	+	-	+	-
11	+	-	-	+	-
12	+	+	+	-	-
13	+	-	+	-	-
14	+	+	-	-	-
15	+	-	-	-	-

Рассмотрим дерево БПФ, показанное на рис. 1. Для N=8 весовые коэффициенты последней ступени БПФ для базиса Уолша-2 будут иметь вид: [+ + - -]. Произведем двоично-инверсную перестановку входных отсчетов и выполним операцию БПФ. Как видно из рисунка, выходные отсчеты БПФ образуются путем суммирования N входных отсчетов, взятых с различными знаками ("+" или "- ").



Дерево БПФ для базиса Уолша

Выписав отдельно эти знаки и сгруппировав их в виде матрицы, получим матрицу W_2P_8 системы базисных функций Уолша2-Пэли:

$$W_2P_8 = \begin{vmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & - & - & + & - & + & + & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & + & + & + & - & - & - & - \end{vmatrix}$$

Заметим, что в матрице Уолша2-Пэли любая строка, кроме первой, содержит равное число знаков "+ " и "–". Этим свойством обладают все матрицы системы функций Уолша2. Кроме того, эта матрица является симметрической, т.е. не изменяется, если строки и столбцы меняются местами.

С помощью простого мнемонического правила можно получить матрицу Уолша-Пэли произвольного порядка ($N=2^n$). Для $N=2$ матрица W_2P_2 имеет следующий вид:

$$W_2P_2 = \begin{vmatrix} + & + \\ + & - \end{vmatrix}.$$

При $N=4$ матрица будет иметь такую структуру:

$$W_2P_4 = \left|\begin{array}{c|c} (1) & (2) \\ \hdashline (3) & (4) \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc|cc} + & + & + & + \\ + & - & - & + \\ \hdashline + & - & + & - \\ + & + & - & - \end{array}\right|$$

Разбив условно квадратную матрицу четвертого порядка на четыре блока второго порядка, устанавливаем следующую особенность. Матрица (1) является матрицей W_2P_2. Матрица (2) образуется в результате зеркального отображения матрицы (1) (т.е. W_2P_2) относительно вертикальной оси (обозначим эту матрицу через $W_2P_2^v$). Матрица (3) образуется как результат зеркального отображения матрицы W_2P_2 относительно горизонтальной оси (операция $W_2P_2^g$) и, наконец, матрица (4) есть ни что иное, как зеркальное отображение матрицы (1) относительно побочной диагонали (операция $W_2P_2^d$), поэлементно умноженное на (-1).

Аналогичным образом можно построить матрицы преобразования Уолша2-Пэли для произвольного N=2^n. В общем случае имеем:

$$W_2P_{2^{n+1}}=\begin{vmatrix} W_2P^{*}_{2^n} & W_2P^{*v}_{2^n} \\ W_2P^{*g}_{2^n} & -W_2P^{*d}_{2^n} \end{vmatrix},$$

где $W_2P^{*n}_2$ - матрица Уолша2-Пэли, полученная путем двоично-инверсной перестановки строк в матрице Уолша2-Адама $(W_2H^n_2)$ порядка $N=2^n$.

Матрицу преобразования в базисе Уолша2-Адамара можно получить также через дерево преобразования БПФ. Для N=8 матрица системы функций Уолша2-Адамара имеет вид:

$$W_2H_8=\begin{vmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & - & - & + & - & + & + & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & + & - & + & - & + & - \end{vmatrix}$$

Таким образом, в матрице Уолша2-Адамара, как и в матрице Уолша2-Пэлли, любая строка, кроме первой, содержит равное число "+" и "-". Но в отличие от матрицы Уолша2-Пэли, данная матрица не является симметрической. Это, в частности, означает, что для преобразования Уолша2-Адамара не существует обратного БПФ.

Матрицу Уолша2-Адамара произвольного порядка (N=2^n) можно построить с помощью простого мнемонического правила. При N=2 любая матрица Уолша имеет следующий вид [3]:

$$W_2H_2=\begin{vmatrix} + & + \\ + & - \end{vmatrix}$$

В общем случае для N=2^n имеем:

$$W_2H_{2^{n+1}}=\begin{vmatrix} W_2H_{2^n} & W_2H^{v}_{2^n} \\ W_2H_{2^n} & -W_2H^{v}_{2^n} \end{vmatrix}.$$

Применение в цифровых методах обработки сигналов, помимо классических функций Уолша, и других систем базисных функций, основанных на функциях Уолша, может открыть новые возможности для решения теоретических и практических задач в различных областях науки и техники.

Список литературы

1. *Трахтман А.М.* Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. – М. : Сов. радио, 1972. – 352 с.

2. *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М. : Мир, 1978. – 848 с.

3. *Трахтман А.М., Трахтман В.А.* Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. – М. : Сов. Радио, 1975. – 206с.

Стаття надійшла до редакції 9 червня 1999 року.

Анатолій Якович Білецький (1939) закінчив радіотехнічний факультет Київського інституту цивільного повітряного флоту в 1962 році. Доктор технічних наук, професор, проректор з наукової роботи Київського міжнародного університету цивільної авіації. Автор більше 170 наукових і науково-методичних праць. Головний напрямок наукової діяльності - статистичні методи цифрової обробки сигналів.

Anatolyi Ya. Biletskiy (b. 1939) graduated from Radio Engineering Department of Kyiv Institute of Civil Aviation Engineers (1962). DSc (Eng), professor, prorector of Science and Research Department of Kyiv International University of Civil Aviation. Author of more than 170 scientific and methodical publications specializes in the field of statistical methods of digital processing of information.

Клобуков Віталій Віталійович (1972) закінчив Київський міжнародний університет цивільної авіації в 1997 році. Аспірант кафедри радіоелектронних систем Київського міжнародного університету цивільної авіації. Напрямок наукової діяльності - спектральні методи цифрової обробки інформації.

Vitalyi V. Klobukov (b. 1972) graduated from Aviation Radio-Electronic Systems Department of Kyiv International University of Civil Aviation (1997). Post graduate student of Radio Engineering Department of Kyiv International University of Civil Aviation. Specializes in the field of spectral methods of digital processing of information.