УДК 62.50

В.К. Антонов

КОНСТРУИРОВАНИЕ РЕГУЛЯТОРОВ С ЗАДАННЫМ КАЧЕСТВОМ

Предложена теорема об устойчивости и метод построения регуляторов с заданным качеством переходных процессов.

Невозможность аксиоматического построения теории автоматического управления следует из сравнения задач упразления с основными задачами механики, когда соответственно требуется найти траекторию по заданной силе, или силу по известной траектории. В сравнении с задачами механики задачи теории управления всегда ставятся некорректно, так как объект управления, имея органы управления, поведение которых не определено до построения регулятора, является лишь частью системы автоматического управления. Доопределение объекта управления регулятором с целью получения замкнутой системы с заданными свойствами в общем случае не является единственным. Возможность построения регулятора представляется достижимой лишь при неполном использовании располагаемых ресурсов объекта управления. В противном случае исходные требования к замкнутой системе были бы наперед указаны точно соответствующими предельным возможностям объекта управления. Тогда метод построения регулятора представлял бы универсальное однозначное преобразование исходных требований к системе управления в искомый регулятор.

Непосредственно для объекта управления всегда характерно неполное использование его ресурсов по прямому назначению в связи с необходимостью реализации управления. Стремление повысить собственную устойчивость при выборе конструкции объекта или реализовать ее за счет органов управления всегда сопровождается уменьшением коэффициента полезного действия в смысле прямого назначения объекта. При этом эффективность объекта в его прямом назначении и уровень или качество его управляемости находятся в обратной зависимости. Взаимосвязь факторов внутренней и внешней устойчивости, обусловленной действием регулятора, предполагает необходимость проектирования объекта и регулятора совместно.

Цель управления сформулируем как выполнение главного требования устойчивости, предъявляемого к замкнутой системе, и выполнение требований вторичных показателей устойчивости [1], характеризующих качество переходных процессов, т. е. качество устойчивости. Для этого приведем теорему об устойчивости, ориентированную на оценку качества переходных процессов, затем вариант метода аналитического конструирования регуляторов, позволяющий обеспечивать устойчивость и качество переходных процессов.

Сформулируем теорему об устойчивости, ориентированную на обеспечение качества переходных процессов, носителем которого является система сравнения, модель, или иначе, вспомогательное дифференциальное уравнение для вспомогательной функции. Исследуем на устойчивость и качество дифференциальную систему

$$\dot{X} = F(t, X), \tag{1}$$

правые части которой определены в некоторой открытой окрестности начала фазового пространства. Далее введем вспомогательное дифференциальное уравнение для вспомогательной функции и саму вспомогательную функцию. Вспомогательное дифференциальное уравнение будем задавать заведомо устойчивым. Его можно определить в виде одного уравнения некоторого заданного порядка k :

$$\varphi(t,X,V^k,V^{k-1},...,\dddot{V},\ddot{V},\dot{V},V)=0 \qquad (2)$$

или в виде системы дифференциальных уравнений (например, того же порядка k) :

$$\dot{V}=\phi(t,X,V). \qquad (3)$$

В уравнениях (2) и (3) вектор X выполняет роль параметра. Устойчивость будем понимать в смысле Ляпунова. Для записи вспомогательного уравнения в форме (2) предполагается существование скалярной вспомогательной функции

$$V=V(t,X), \qquad (4)$$

обладающей свойством непрерывности вместе с k производными по t и X на решениях исследуемой на устойчивость системы (1). Отметим, что непрерывность на решениях вовсе не означает непрерывности вспомогательной функции и исследуемой системы одновременно. Поэтому очевидна возможность анализа разрывных динамических систем. Для записи вспомогательного уравнения в форме (3) естественно задание векторной вспомогательной функции, что соответствует концепции векторных функций Ляпунова.

Идея предлагаемой теоремы состоит в том, что устойчивое вспомогательное дифференциальное уравнение обращается в тождество на решениях исследуемой на устойчивость системы, т. е. вспомогательная функция как функция времени, поведение которой определяется вспомогательным уравнением, ведет себя точно так же, как функция V(t,X) при подстановке значений X, определяемых решениями исследуемой системы.

Дальнейшее построение направлено на выяснение свойств вспомогательной функции, при выполнении которых устойчивость исследуемой системы следует из устойчивости вспомогательной, так как очевидно, что независимо от наличия свойств устойчивости исследуемой и вспомогательной систем всегда найдется некоторая функция, реализующая обращение в тождество одной системы на решениях другой и являющаяся решением соответствующего дифференциального уравнения в частных производных. Для этого можно воспользоваться аналогиями со вторым методом Ляпунова. При этом к вспомогательной функции, в общем случае не являющейся функцией Ляпунова, предъявляются следующие требования:

- норма фазового вектора вспомогательного уравнения на решениях исследуемой системы, т. е. вектора, составленного из вспомогательной функции и ее производных, определенных в силу исследуемой системы, определена и непрерывна во всей области исследования устойчивости и больше или равна норме фазового вектора исследуемой системы (это требование может быть заменено условием отсутствия общих точек замкнутых поверхностей постоянного значения нормы фазового вектора вспомогательного уравнения, определенных в фазовом пространстве исследуемой системы или условием монотонности зависимости нормы фазового вектора вспомогательного уравнения, определенной на решениях исследуемой системы, от нормы ее фазового вектора);

- для приведенных вспомогательной и исследуемой систем норма фазового вектора вспомогательной системы на решениях исследуемой в начале фазового пространства исследуемой системы равна нулю (для асимптотически устойчивого вспомогательного уравнения) или имеет равный нулю наименьший высший предел.

Достаточность условий устойчивости согласно данной теореме следует из неоднозначности задания вспомогательного уравнения и вспомогательной функции. Множество вспомогательных уравнений с соответствующими вспомогательными функциями образует своеобразную группу, каждому элементу которой соответствует дифференциальное уравнение в частных производных относительно вспомогательной функции, получающееся подстановкой в вспомогательное уравнение этой функции и ее производных, определенных в силу исследуемой системы. В этой группе можно выделить последовательности пар вспомогательных уравнений и вспомогательных функций, являющихся мажорантами и минорантами по отношению к исследуемой системе.

Вспомогательное уравнение по отношению к исследуемому выполняет роль мажорирующего. Поэтому наиболее простое доказательство теоремы состоит в утверждении того, что исследуемое уравнение устойчиво как имеющее норму фазового вектора не большую, чем у устойчивого. Вспомогательная функция может рассматриваться как носитель информации о начальных условиях для вспомогательного уравнения.

Приведем формальное доказательство.

Рассматривая устойчивость в смысле Ляпунова для вспомогательного уравнения, получим:

$$\forall \varepsilon_v \exists \delta_v : \|V(0)\| < \delta_v \Rightarrow \|V(t)\| < \varepsilon_v . \tag{5}$$

Из условия, что норма фазового вектора исследуемой системы не больше нормы фазового вектора вспомогательного уравнения, следует существование δ_x и ε_x, которые соответственно не больше δ_v и ε_v. Выберем $\varepsilon = \varepsilon_v$ и $\delta = \delta_x$. Поскольку вспомогательное уравнение обращается в тождество на решениях исследуемого, система (1), (2) или (1), (3) совместна. Для ее фазового вектора W =col(X,V) можно построить определение, аналогичное (5):

$$\forall \varepsilon \exists \delta : \|W(0)\| < \delta \Rightarrow \|W(t)\| < \varepsilon . \tag{6}$$

В определении (6) ε произвольно, а δ существует, так как в начале фазового пространства исследуемой системы норма фазового вектора вспомогательного уравнения равна нулю и в окрестности начала непрерывно зависит от нормы фазового вектора исследуемой системы. Поэтому исследуемая система устойчива как подсистема устойчивой системы, полученной объединением исследуемой и вспомогательной. Теорема доказана.

Условия теоремы можно ослабить потребовав, чтобы минимальное и максимальное значения нормы вектора вспомогательного уравнения были ограниченными функциями нормы вектора исследуемой системы. В единственной точке - начале фазового пространства исследуемой системы эти функции равны нулю, или имеют равный нулю наименьший высший предел. Возможно также условие монотонности этих функций.

Покажем, каким образом показатели качества переходных процессов обеспечиваются посредством вспомогательного уравнения. Пусть на качество исследуется система (1). Рассматрим следующие показатели качества: Δ - норму относительной ошибки регулирования; t_p - время регулирования; c - показатель затухания переходных процессов (степень устойчивости).

Вспомогательное уравнение для положительно определенной вспомогательной функции зададим в виде линейного однородного уравнения первого порядка:

$$\dot{V} + cV = 0. \tag{7}$$

По условию теоремы вспомогательная функция возрастает при увеличении нормы фазового вектора исследуемой не медленнее, чем ее норма. Тогда из решения уравнения (7)

$$V(t) = V(0)e^{-ct}, \tag{8}$$

следует

$$\Delta = \|X(t_p)\| / V(0) \le e^{-ct_p}, \tag{9}$$

- соотношение, связывающее показатели качества переходных процессов, аналогичное известному [2].

Для вспомогательного уравнения второго порядка:

$$\ddot{V} + c_1\dot{V} + c_2 V = 0, \tag{10}$$

оценка качества имеет вид:

$$\Delta = \left\| X(t_{\text{p}}) \right\| / \left\| V(0) \right\| \le \left\| \exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c_1 & -c_2 \end{pmatrix} t_{\text{p}} \right\|. \tag{11}$$

Оценки согласно выражениям (7)-(11) естественны как мажорирующие переходные процессы в исследуемой системе. В выражениях (10) и (11) показатели затухания соответствуют наличию в исследуемом объекте двух групп переменных, отличающихся естественной скоростью переходных процессов и образуют матричный показатель затухания, соответствующий нормальной форме записи вспомогательного уравнения (10).

Можно показать, что показатель затухания в вспомогательном уравнении (7) связан с запасом устойчивости. Так, если на решениях линейной устойчивой системы $\dot{X} = AX$ в тождество обращается вспомогательное уравнение $\dot{V} + V = 0$ для вспомогательной функции $V = X^T QX$, то вспомогательное уравнение $\dot{V} + cV = 0$ обращается в тождество на решениях смещенной системы $\dot{X} = \left(A - \frac{c-1}{2} E \right) \cdot X$.

Построим метод аналитического конструирования регуляторов, ориентированный на выполнение условий устойчивости и качества переходных процессов. Пусть объект управления описывается линейной дифференциальной системой

$$\dot{X} = AX + Bu, \tag{12}$$

где A - $n \times n$, B - $n \times m$ - матрицы; X - n, u - m - векторы фазовых координат и управления.

Фазовые координаты образуют несколько групп, объединяющих координаты по скорости переходных процессов, что характерно для жестких систем. Примером такой системы являются уравнения продольного движения самолета, имеющие две группы переменных, описывающих угловое быстрое короткопериодическое и траекторное медленное длиннопериодическое движение. Следуя идее аналитического конструирования, зададим квадратичный интегральный функционал, дополнив его подинтегральное выражение членом, увеличивающим скорость уменьшения функционала

$$I = \int_0^\infty (X^* PX + \dot{X}^* G\dot{X} + u^* Ru + X^*(c_1 E_1 + c_2 E_2) QX) dt, \tag{13}$$

где P, G, R - матрицы, c_1, c_2 - показатели затухания, характеризующие быстродействие для быстрых и медленных переменных исследуемой жесткой системы, E_1, E_2 - единичные проекторы, отделяющие группы быстрых и медленных переменных, Q - симметричная эрмитова матрица квадратичной формы – функции Ляпунова-Беллмана.

Вспомогательное неоднородное уравнение и вспомогательную функцию, соответствующие функционалу (13), определим следующим образом:

$$\begin{gathered} \dot{V} + \omega(t, X, u) + c_1 V_1 + c_2 V_2 = 0, \\ \omega(\text{t}, \text{X}, \text{u}) + \text{c}_1 V_1 + c_2 V_2 > 0, \end{gathered} \tag{14}$$

$$V = X^{*}QX\,; \quad V_1 = X^{*}E_1QX\,; \quad V_2 = X^{*}E_2QX. \tag{15}$$

где V_1, V_2 - составляющие вспомогательной функции V, объединяющие быстрые и медленные переменные; ω- квадратичная часть функционала; * - символ транспонирования и комплексного сопряжения. В форме (14) вспомогательное уравнение для функции Ляпунова-Беллмана является источником дополнительного по отношению к нерасширенному функционалу затухания вспомогательной функции. Связь показателей затухания с запасом устойчивости проявляется при решении задачи синтеза в ограниченности областей значений показателей затухания, внутри которых имеет место регулярность зависимости коэффициентов матрицы регулятора от параметров затухания, что целесообразно использовать для практического определения областей значений параметров затухания. Можно показать, что уравнение (14) эквивалентно уравнению для вспомогательной функции, получаемому при введении в функционал штрафной функции за нарушение условий связи для вспомогательной функции.

Наряду с требованием заданного быстродействия весьма существенным является требование ограничения колебательности переходных процессов. Известно, что введение комплексного масштаба времени в системе, для которой строится регулятор, при выполнении требования устойчивости приводит к локализации собственных чисел замкнутой системы внутри угла в левой полуплоскости, что обеспечивает ограничение колебательности.

Учитывая жесткость нашей системы и, следовательно, невозможность обеспечения одного ограничения по колебательности для разных групп фазовых переменных, комплексный масштаб для времени зададим следующим образом:

$$t \to t(e^{i\varphi_1}E_1 + e^{i\varphi_2}E_2) = tM\,, \tag{16}$$

где i - мнимая единица, φ_1 и φ_2 - углы поворота координатных осей комплексной плоскости собственных чисел замкнутой системы для быстрых и медленных переменных; М - обозначение масштабной матрицы независимой переменной.

Вводя масштаб времени (16) в систему (12), получим масштабированную систему:

$$\dot{X} = MAX + MBu. \tag{17}$$

С обозначения квадратичной части в подынтегральном выражении функционала (13) через ω, запишем для нахождения оптимального управления модифицированное уравнение Беллмана, соответствующее вспомогательному уравнению для функции Ляпунова-Беллмана

$$0 = \min_{u}\left\{\omega + \Phi(V) + \dot{X}^{*}\frac{\partial V}{DX} + \frac{\partial V}{DX^{*}}\dot{X}\right\}. \tag{18}$$

где функция Φ определяется видом вспомогательного уравнения (14).

Подставляя в выражение (18) ω, V, $\dot{X}$ согласно (13), (14)-(15), (17), дифференцированием по u найдем выражение для управления :

$$u = -(R + B^{*}M^{*}GMB)^{-1}(B^{*}M^{*}GMA + B^{*}M^{*}Q)X. \tag{19}$$

Подставив управление (19) в модифицированное уравнение Беллмана (18), получим матричное уравнение Риккати для нахождения матрицы Q квадратичной формы вспомогательной функции:

$$J_{21} + QJ_{11} + J_{11}^{*}Q - QJ_{12}Q = 0, \tag{20}$$

где

$$J_{21} = P + A^*M^*GMA - A^*M^*GMB(R + B^*M^*GMB)^{-1}B^*M^*GMA;$$

$$J_{11} = \frac{1}{2}(c_1\bar{E}_1 + c_2E_2) + MA - MB(R + B^*M^*GMB)^{-1}B^*M^*GMA;$$

$$J_{11}^* = \frac{1}{2}(c_1\bar{E}_1 + c_2E_2) + A^*M^* - A^*M^*GMB(R + B^*M^*GMB)^{-1}B^*M^*;$$

$$J_{12} = -MB(R + B^*M^*GMB)^{-1}B^*M^*.$$

Найденный из решения уравнения (20) регулятор (19) зависит от матриц функционала (13) и параметров $c_1, c_2, \varphi_1, \varphi_2$. Их выбор может осуществляться из дополнительных условий ограничения управления путем расчета матриц обратной связи на сетке этих параметров и последующего выбора с учетом интерполяции. Для решения уравнения Риккати целесообразно использовать метод К.Г. Валеева [3].

В результате решения задачи построения регулятора при матричном комплексном масштабировании исследуемой системы (12) находится регулятор (19), матрица коэффициентов обратной связи которого является комплексной:

$$u = (K_{\mathrm{Re}} + iK_{\mathrm{Im}})X \quad . \tag{21}$$

Поэтому необходимо выполнить обратный в смысле комплексного масштабирования переход, в результате которого следует найти действительную матрицу обратных связей K такую, чтобы замыкание регулятором

$$u = KX \tag{22}$$

исходной системы (12) обеспечивало бы такие же показатели качества, которые достигаются при решении задачи синтеза для масштабированной системы (17) при замыкании ее комплексным регулятором (21). Спектр собственных чисел λ масштабированной замкнутой системы в общем случае не является симметричным, поэтому находить эквивалентный найденному комплексному действительный регулятор (22) следует путем симметризации относительно действительной оси на плоскости собственных чисел спектра замкнутой масштабированной системы и последующего решения задачи модального управления.

Список литературы

1. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов. // Автоматика и телемеханика. - 1960. - №4,5,6 .

2. *Майзель М.М.* Автоматика, телемеханика и системы управления производственными процессами. - К.: Высш. шк., 1972. - С.451.

3. *Валеев К.Г., Финин Г.С.* Построение функций Ляпунова. - К.: Наук. думка, 1981.- С. 375.

Стаття надійшла до редакції 30 червня 1999 року.

Володимир Костянтинович Антонов (1950) закінчив Київський інститут інженерів цивільної авіації в 1973 році. Кандидат технічних наук, доцент кафедри теорії автоматичного управління і авіаційних тренажерів. Автор 20 наукових публікацій в галузі теорії автоматичного управління, конструкції систем управління і літаків.

Volodymir K. Antonov (b. 1950) graduated from Kyiv Institute of Civil Aviation Engineers (1973). PhD (Eng), ass. professor of automatic control and aviation simulators Depatment. Author of 20 publications in automatic control theory, constructions of control system and airplane constructions.