ПРОБЛЕМИ АВІАЦІЙНОЇ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ ТА АЕРОНАВІГАЦІЙНОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ ПОЛЬОТІВ

УДК 621.396.67

А.Я. Білецький, І.В. Шелевицький, В.М. Шутко

НАБЛИЖЕННЯ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ДИСКРЕТНИХ СПЛАЙНОВИХ БАЗИСІВ

Розглянуто наближення дискретних даних за допомогою локальних сплайнів. Особливість підходу полягає в синтезі дискретних сплайнових базисів з амплітудно-частотними характеристиками або енергетичними спектрами, які відповідають даним. Задача зводиться до знаходження потрібних імпульсних характеристик нерекурсивних числових фільтрів. Зміщені в часі локальні функції утворюють квазіортогональний сплайновий базис. Характерні особливості такого базису дозволяють ефективно реалізувати розрахунок узагальнених коефіцієнтів Фур'є в знайдених базисах.

Сплайн-методи обробки даних відносяться до наукових та технологічних напрямків, які інтенсивно розвиваються. Свідченням цього є значне зростання, починаючи з 80-х років, посилань на відповідні джерела в наукових роботах. В цьому легко переконатися, виконавши пошук у системі "ResearchIndex" (The NECI Scientific Literature Digital Library: http//citeseer.nj.nec.com). Проте застосування їх обмежується в основному алгебраїчними глобальними та B-сплайнами [1]. Різноманітність реальних процесів, представлених дискретними даними, потребує більш точної відповідності характерів процесів, якими наближають до цих даних. Одним із способів побудови довільних сплайнових базисів на регулярній сітці вузлів є згортка локальних симетричних функцій [2]. Отримати аналітичні вирази для базисних сплайнів іноді досить складно. Інтеграли від породжуючих функцій можуть мати складний вигляд, або взагалі не братися аналітично. Тому розглянемо побудову таких сплайнів у дискретному варіанті.

Породжуючі функції представимо у вигляді окремих відліків на фрагменті сплайна. Для простоти розрахунків приймемо ширину інтервалу рівною одиниці, а відлік починатимемо з нуля (a=0).

$$f_i = \begin{cases} f_1(x_i), & \text{для } i = \overline{1,N} \\ f_2(x_i), & \text{для } i = \overline{N+1,2N} \\ 0, & \text{для } i = \overline{2N+1,4N} \end{cases};$$

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_1(x_i), & \text{для } i = \overline{1,N} \\ \varphi_2(x_i), & \text{для } i = \overline{N+1,2N} \\ 0, & \text{для } i = \overline{2N+1,4N} \end{cases}.$$

Дискретна лінійна згортка розраховується за виразом

$$F_i = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{i} f_{(i-n)}\varphi_n \ , \ i = \overline{1,4N} \ .$$

Сформований сплайн складатиметься з чотирьох фрагментів, які можна визначити через загальну функцію 2:

$$F1_i = F_i, \quad i = \overline{1,N};$$
$$F2_i = F_{i+N}, \quad i = \overline{1,N};$$
$$F3_i = F_{i+2N}, \quad i = \overline{1,N};$$
$$F4_i = F_{i+3N}, \quad i = \overline{1,N}.$$

Сплайновий базис складається з відліків функції F_i зміщеної пропорційно N на регулярній сітці $H_{ij} = F_i$. Внаслідок цього сума всіх базисних функцій у певній точці сітки даних є сумою чотирьох фрагментів базисного сплайна:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} H_{ij} = F1_i + F2_i + F3_i + F4_i \ .$$

Індекс j є номером базисної функції, а індекс i – номером точки на відрізку сплайна, якому ця точка належить. Ця особливість сплайнових базисів має вирішальне значення для ефективності розрахунків кардинальних сплайнів. Сплайновий базис є квазіортогональним, що дозволяє ефективно реалізовувати розрахунки з використанням скалярного добутку базисних функцій.

$$\sum_i H_{im}H_{in} = 0 \ , \text{для } |m-n| > 3 .$$

Розглянемо розрахунок узагальнених коефіцієнтів Фур'є в отриманому базисі для залежності, представленої відліками Q_i:

$$\sum_i Q_i H_{ik} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sum_i H_{ik} H_{in} \ .$$

Наслідком квазіортогональності є семидіагональна форма матриці A в рівняннях

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{Q}, \qquad (1)$$

де $\boldsymbol{A}$ – семидіагональна симетрична матриця; $\boldsymbol{C}$ – вектор-стовпець коефіцієнтів C; $\boldsymbol{Q}$ – вектор-стовпець з елементами q.

Елементи діагональної матриці розраховують за формулами:

$$a_0 = \frac{1}{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N} F1_i^2 + \sum_{i=1}^{N} F2_i^2 + \sum_{i=1}^{N} F3_i^2 + \sum_{i=1}^{N} F4_i^2\right);$$

$$a_1 = \frac{1}{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N} F1_i\, F2_i + \sum_{i=1}^{N} F2_i\, F3_i + \sum_{i=1}^{N} F3_i\, F4_i\right);$$

$$a_2 = \frac{1}{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N} F1_i\, F3_i + \sum_{i=1}^{N} F2_i\, F4_i\right);$$

$$a_3 = \frac{1}{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N} F1_i\, F4_i\right).$$

Оскільки базисні функції є зміщеними копіями, то номер фрагмента не має значення й індекс номера фрагмента сплайна у складових базисної функції c_j відсутній. Тут мова йде про внутрішні фрагменти сплайна. Розрахунок для перших і останніх фрагментів потребує врахування відсутності сусідніх вузлів. Це легко здійснити, відкинувши відповідні суми, однак, зважаючи на простоту наведених виразів, в алгоритмах реального часу операції порівняння можуть займати значний час. З огляду на регулярність сітки можна умовно продовжити послідовність вузлів у безкінечність праворуч та ліворуч і не змінювати вирази. Але уникнути факту відсутності даних на продовжених фрагментах неможливо. Вказані спрощення призведуть до наявності певного перехідного процесу на початку і в кінці оброблюваної послідовності даних. Такий перехід не простягатиметься далі двох сплайнових фрагментів.

Розрахуємо значення елементів правої частини рівняння (1):

$$q_j = \frac{1}{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N} F1_i Y_{i,j-2} + \sum_{i=1}^{N} F2_i Y_{i,j-1} + \sum_{i=1}^{N} F3_i Y_{i,j} + \sum_{i=1}^{N} F4_i Y_{i,j+1}\right),\quad j = \overline{1,R}\,.$$

Тут $Y_{i,j}$ є відліками залежності, яку наближають. Індекс j означає належність відліку до j-го фрагмента сплайна. Як і в попередніх виразах, відсутність сусідніх фрагментів на краях легко врахувати відкиданням відповідних сум. Можна вважати, що відліки та сітка сплайна продовжуються з нульовими значеннями. Наявність необмеженої послідовності сплайнових фрагментів $j = \overline{-\infty,\infty}$ не змінює вираз, оскільки базис локальний.

Узагальнені коефіцієнти Фур'є знайдемо із системи рівнянь (1):

$$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cdots\cdots \\ c_{j-3} \\ c_{j-2} \\ c_{j-1} \\ c_j \\ c_{j+1} \\ c_{j+2} \\ c_{j+3} \\ \cdots\cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots\cdots \\ q_{j-1} \\ q_j \\ q_{j+1} \\ \cdots\cdots \end{bmatrix}.$$

Оскільки матриця A симетрична, семидіагональна з діагональною перевагою, інверсна матриця $D=A^{-1}$ має елементи, які швидко зменшуються з віддаленням від діаго Довільний рядок інверсної матриці (за виключенням крайніх) повністю представляє Таким чином, якщо вважати нульовими значення елементів $d_{j\pm k\,j}$ для $k>m$, то коефіціє c_j можна визначити за формулою:

$$c_j = d_0 q_j + \sum_{k=1}^{m} d_k (q_{j+k} + q_{j-k}) \ .$$

Зважаючи на те, що інверсна матриця не залежить від відліків $Y_{i,j}$, її елементи мо розрахувати попередньо, якщо задати характеристики сітки вузлів та даних. Ост формула є ключовою для реалізації алгоритмів реального часу, для розрахунку узагальне коефіцієнтів Фур'є по сплайнових базисах.

Практично для більшості сплайнових базисів із точністю до 1% d_m можна вва рівним нулю для $m>3$.

Питання точності наближення наведених дискретних розрахунків до відпові аналогових є тривіальним. Інтеграли замінено сумами відповідно до формул прямокутн Похибка розрахунку інтеграла становить $\frac{\Delta}{2}\sum_{i=1}^{n} g'(x_i)$, де $g(x)$ – підінтегральний вир $\Delta = x_{i+1} - x_i$.

Особливістю описаного підходу є можливість синтезу дискретних сплайнових баз із заданими частотними властивостями. Оскільки імпульсна характеристика нерекурсиві числового фільтра відповідає вказаним вимогам до породжуючих сплайновий базис функ то легко отримати базис як згортку імпульсних характеристик. Методи син нерекурсивних числових фільтрів загальновідомі. Отже, сплайновий базис із зада частотними властивостями легко отримати, синтезувавши пару числових фільтрів, добу частотних характеристик яких рівнятиметься необхідній частотній характеристиці. В дан випадку розбіжність між функцією, яку наближаємо, та сплайном зручніше характеризу в термінах фільтрації сигналів у частотній області, тобто нерівномірністю амплітуд частотної характеристики сплайнового базису в області пропускання та затримки. Т підхід грунтується на тому факті, що у практиці числової обробки даних перева користуються саме частотними властивостями сигналів. З іншого боку, в багатьох випа частотні властивості даних описуються енергетичним спектром. У цьому випадку відповідного базису забезпечить відповідність енергетичних спектрів даних, які наближа та сплайна. Максимально можливу для вибраного базису близькість даних та сплай часовій області (у середньоквадратичному розумінні) гарантуватиме розрахунок значен (2) як узагальнених коефіцієнтів Фур'є. Локальні властивості сплайнових базисів дозвол при цьому виконувати наближення не лише в цілому, але й на локальних фрагментах. така модель даних є особливо зручною для наближення даних, що локально змінюють амплітуду, залишаючись неперервними в цілому. Найближчими до запропонованого під є wavelet методи [1]. Проте частотні властивості wavelet базисів задають, змінюючи ши на порядок базисів (включаючи й алгебраїчні В-сплайни). Невелика різноманітність базисів пояснюється, очевидно, труднощами отримання зручних для досліджен розрахунків аналітичних виразів. Запропонований підхід дозволяє подолати цю складність і одночасно обґрунтовано підійти до вибору сплайнового базису з точки зору відповідності амплітудно-частотних чи енергетичних спектрів сплайна та даних.

Список літератури

1. *M. Unser.* Splines: a Perfect fit for Signal Processing. Biomedical Imaging Group // Swiss Federal Institute of Technology, November 13, 1998. Submitted to IEEE Signal Processing Magazine.

2. *Шелевицький І.В.* Сплайновий характер інтерполяційних фільтрів / Защита информации: Сб. научн. тр.– К.: КМУГА, 1999. –С. 150-155.

Стаття надійшла до редакції 18 червня 1999 року

Анатолій Якович Білецький (1939) закінчив радіотехнічний факультет Київського інституту цивільного повітряного флоту в 1962 році. Доктор технічних наук професор, проректор з наукової роботи Київського міжнародного університету цивільної авіації. Автор більше 170 наукових і науково-методичних праць. Головний напрямок наукової діяльності – статистичні методи цифрової обробки сигналів.

Anatolyi Ya. Biletskyi (b. 1939) graduated from Radio Engineering Department of Kyiv Institute of Civil Aviation Engineers (1962). DSc (Eng), professor, prorector of science and research department of Kyiv International University of Civil Aviation. Author of more than 170 scientific and methodical publications Specializes in the field of statistical methods of digital processing of information.

Ігор Володимирович Шелевицький (1963) закінчив Київський інститут інженерів цивільної авіації в 1986 році. Кандидат технічних наук, докторант Київського міжнародного університету цивільної авіації. Основний напрямок наукових досліджень – розробка та дослідження сплайн-методів обробки інформації. Автор дев'яти статей.

Igor V. Shelevitsky (b. 1963) graduated from Kyiv Institute of Civil Aviation Engineers (1986). PhD (Eng), doctorate of Kyiv International University of Civil Aviation. Specializes in the field of spline-methods of information processing. Author of 9 publications.

Володимир Миколайович Шутко (1970) закінчив Московський державний технічний університет ім. М.Е. Баумана в 1993 році. Кандидат технічних наук, асистент кафедри радіоелектроніки Київського міжнародного університету цивільної авіації. Основний напрямок наукових досліджень – розробка та дослідження сплайн-методів обробки інформації. Автор 13 статей.

Volodymir M. Shutko (b. 1970) graduated from Bauman Moscow Higher Technical University in 1993. PhD (Eng), instructor of Radio Electronics Department of Kyiv International University of Civil Aviation. The fields of interest are: working out and investigation of spline-methods of processing information. Author of 13 publications.