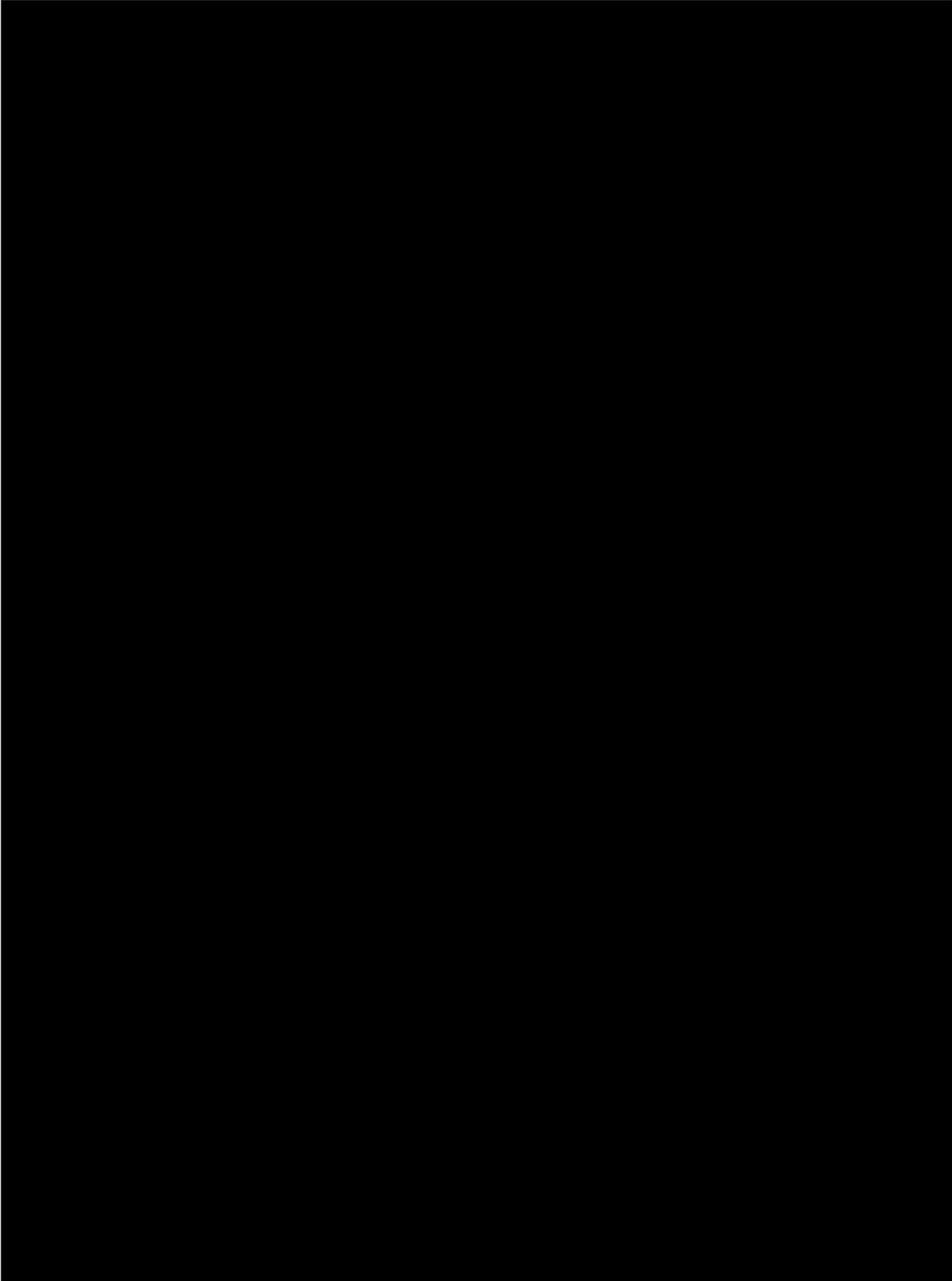


---

---



$\Theta = \Theta_0 = 0, \alpha = \alpha_0, \omega_z = \omega_{zq} = 0$ ;  $b$  – вектор, составленный из коэффициентов управления;  $u = \delta_\theta$  – угол отклонения руля высоты, который является основным органом управления продольным движением.

Предположим, что рассматриваемая система устойчива и управляема. Характеристическое уравнение матрицы  $U$

$$\lambda^4 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0, \quad (2)$$

где  $a_k$  ( $k=1,2,3,4$  выражаются определенным образом через ее элементы) дает две пары комплексно сопряженных корней [2]. Корни  $\lambda_1 = H + i\Omega$ ,  $\lambda_2 = H - i\Omega$ , являясь большими по модулю, соответствуют “быстрой” составляющей движения воздушного судна. Малые по модулю корни  $\lambda_3 = h + i\omega$ ,  $\lambda_4 = h - i\omega$  характеризуют “медленную” его составляющую.

Проведем расщепление системы уравнений (1). Разобьем собственные значения матрицы  $U$  на две группы. К первой отнесем  $\lambda_1^{(1)} = \lambda_1$ ,  $\lambda_2^{(1)} = \lambda_2$ , а во вторую включим  $\lambda_3^{(2)} = \lambda_3$ ,  $\lambda_4^{(2)} = \lambda_4$ . Условия  $|\lambda_i^{(1)} - \lambda_j^{(2)}| > 0$ ,  $i=1,2; j=1,2$  при этом выполняются.

Тогда существуют такие блочные матрицы

$$K = (K_1, K_2), \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix},$$

что  $U = K\Lambda M = K_1\Lambda_1M_1 + K_2\Lambda_2M_2$ , где  $M = K^{-1}$ , причем между субматрицами  $K_\sigma, \Lambda_\sigma$  и  $M_\sigma$ ,  $\sigma=1,2$  имеются равенства

$$M_\sigma K_s = \begin{cases} I, & s = \sigma, \\ 0, & s \neq \sigma, \end{cases} \quad UK_s = K_s \Lambda_s, \quad (3)$$

где  $I$  – единичная матрица.

Введем замену переменных

$$x = \sum_{\sigma=1}^2 K_\sigma y_\sigma, \quad (4)$$

где  $K_\sigma$  – субматрица преобразующей матрицы  $K$  размера  $4 \times 2$ ;  $y_\sigma$  – вектор новых переменных размера  $2 \times 1$ .

Подставив выражение (4) в уравнение (1), получим

$$\sum_{\sigma=1}^2 K_\sigma \dot{y}_\sigma = \sum_{\sigma=1}^2 UK_\sigma y_\sigma + bu.$$

В силу второго условия (3) имеем

$$\sum_{\sigma=1}^2 K_\sigma (\dot{y}_\sigma - \Lambda_\sigma y_\sigma) = bu. \quad (5)$$

Умножим равенство (5) слева на матрицу  $M$ , получим

$$M \sum_{\sigma=1}^2 K_\sigma (\dot{y}_\sigma - \Lambda_\sigma y_\sigma) = Mbu. \quad (6)$$

Соотношение (6) эквивалентно следующим двум равенствам:

$$M_1 \sum_{\sigma=1}^2 K_{\sigma} \left( \dot{y}_{\sigma} - \Lambda_{\sigma} y_{\sigma} \right) = M_1 b u ;$$

$$M_2 \sum_{\sigma=1}^2 K_{\sigma} \left( \dot{y}_{\sigma} - \Lambda_{\sigma} y_{\sigma} \right) = M_2 b u .$$

Отсюда с учетом первого условия (3) получим

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \Lambda_1 y_1 + M_1 b u, & y_1(t_0) &= y_{10}, \\ \dot{y}_2 &= \Lambda_2 y_2 + M_2 b u, & y_2(t_0) &= y_{20}. \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, с помощью преобразования переменных (4) система (1) расщепилась на две независимые подсистемы (7). Переменные  $y_{\sigma}$ ,  $\sigma=1,2$  представляют собой главные колебания.

Основным является получение преобразующей матрицы  $K$ , которая составляется из двух субматриц  $K_1$  и  $K_2$ .

Рассмотрим матрицу

$$\Delta_1(U) = (U - \lambda_1^{(2)} I_4) (U - \lambda_2^{(2)} I_4).$$

Ранг ее равен двум. Определим субматрицу  $K_1$  выбором двух линейно независимых столбцов. Аналогично найдем субматрицу  $K_2$ . Матрица

$$\Delta_2(U) = (U - \lambda_1^{(1)} I_4) (U - \lambda_2^{(1)} I_4)$$

отличается от  $\Delta_1(U)$  тем, что вместо  $h$  и  $\omega$  в ее элементах стоят соответственно  $H$  и  $\Omega$ . Субматрицу  $M_1$  размера  $2 \times 4$  сформируем из первых двух строк матрицы  $M$ , а  $M_2$  - из двух оставшихся. Нахождение блочных матриц  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  свелось к перемножению полученных матриц:

$$\Lambda_1 = M_1 U K_1, \quad \Lambda_2 = M_2 U K_2.$$

Дополнительно упростим уравнения (7). С помощью преобразования переменных  $z_{\sigma} = L_{\sigma} y_{\sigma}$ ,  $\sigma=1,2$ , где матрица

$$L_{\sigma} = \begin{pmatrix} \Lambda_{21}^{(\sigma)} & \beta_1^{(\sigma)} - \Lambda_{11}^{(\sigma)} \\ 0 & \beta_2^{(\sigma)} \end{pmatrix}$$

содержит вещественную  $\beta_1^{(\sigma)}$  и мнимую  $\beta_2^{(\sigma)}$  части комплексного корня многочлена  $|\lambda I_2 - \Lambda_{\sigma}| = 0$ , получим уравнения (7) в виде

$$\dot{z}_{\sigma} = \Psi_{\sigma} z_{\sigma} + H_{\sigma} u, \quad z_{\sigma}(t_0) = z_{\sigma 0}, \quad \sigma = 1, 2, \quad (8)$$

где  $\Psi_{\sigma} = L_{\sigma} \Lambda_{\sigma} L_{\sigma}^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_1^{(\sigma)} & -\beta_2^{(\sigma)} \\ \beta_2^{(\sigma)} & \beta_1^{(\sigma)} \end{pmatrix}$ ,  $H_{\sigma} = N_{\sigma} b$ ,  $N_{\sigma} = L_{\sigma} M_{\sigma}$ .

Предположим теперь, что не все элементы матрицы  $U$  известны. Её элементы  $u_{24}, u_{31}, u_{33}, u_{34}$ , связанные с условиями устойчивости и управляемости воздушного судна, из-

вестны лишь приближенно и подлежат оцениванию. Их априорное задание позволяет осуществить расщепление уравнения (1).

Исходной информацией для задачи идентификации являются обработанные числовые последовательности зарегистрированных параметров полета, упорядоченные во времени. В них содержится полезный сигнал  $x_p(t)$  и данные о погрешностях.

Для исследования случая, когда погрешности представляют собой белые центрированные шумы, рассматриваемые как стационарные, эргодические, некоррелированные и неавтокоррелируемые процессы, примем модель измерений в виде

$$\bar{x} = x_p(t) + \xi(t), \quad (9)$$

где  $\xi(t)$  - вектор случайных помех, для которого выполняются условия

$$E[\xi(t)] = 0, \quad E[\xi(t) \cdot \xi^T(\tau)] = \text{diag}\{D_{\xi_1}, D_{\xi_2}, D_{\xi_3}, D_{\xi_4}\} \delta(t - \tau),$$

$D_{\xi_i}$  - дисперсия его  $i$ -й компоненты;  $\delta(t - \tau)$  - дельта-функция Дирака.

Преобразуем модель (9) в базисы расщепленных подсистем, получим

$$\bar{z}_\sigma = N_\sigma \dot{x} = z_\sigma^{(p)}(t) + \eta_\sigma(t), \quad \sigma = 1, 2,$$

где  $z_\sigma^{(p)}(t) = N_\sigma x_p(t)$ ,  $\eta_\sigma(t) = N_\sigma \xi(t)$ .

Причем

$$E[\eta_\sigma(t)] = 0, \quad E[\eta_\sigma(t) \cdot \eta_\sigma^T(\tau)] = N_\sigma D_\xi N_\sigma^T.$$

Матрица  $N_\sigma$  зависит от преобразующей матрицы  $K$ . Однако в силу неоднозначности выбора столбцов в матрицах  $\Delta_1(U)$  и  $\Delta_2(U)$  матрица  $K$  не является единственной. На основании численного анализа выявлено, что дисперсии  $D[\eta_\sigma(t)]$ ,  $\sigma = 1, 2$  могут существенно различаться из-за выбора субматриц  $\bar{K}_\sigma^{i_\sigma j_\sigma}$ ,  $\sigma = 1, 2$ ,  $i_\sigma = 1, 2, 3$ ;  $j_\sigma = 2, 3, 4$ , причем  $j_\sigma > i_\sigma$ . Индексы  $i_\sigma$  и  $j_\sigma$  указывают порядковые номера столбцов матрицы  $\Delta_\sigma(U)$ . Из различных комбинаций субматриц  $\bar{K}_\sigma^{i_\sigma j_\sigma}$ ,  $\sigma = 1, 2$ , формирующих матрицу  $K = (K_1^{i_1 j_1} K_2^{i_2 j_2})$ , можно выбрать такую комбинацию, которая соответствует ковариационной матрице  $E[\eta_\sigma(t) \cdot \eta_\sigma^T(\tau)]$  с наименьшим следом.

При проведении идентификации параметров расщепленной системы используем критерий близости между  $\bar{z}_\sigma$  и  $z_\sigma(\beta^{(\sigma)})$  в виде

$$\Phi_\sigma(\beta) = \int_{t_0}^{t_1} [\bar{z}_\sigma - z_\sigma(\beta^{(\sigma)})]^T R [\bar{z}_\sigma - z_\sigma(\beta^{(\sigma)})] dt, \quad \sigma = 1, 2, \quad (10)$$

где  $R = R^T$  - весовая матрица.

Определим исходный вектор  $\beta_0^{(\sigma)}$  в соответствии с уравнением (2). Действительный вектор  $\beta^{(\sigma)}$  отличается от  $\beta_0^{(\sigma)}$  на  $\Delta\beta^{(\sigma)}$ . Задача состоит в получении оценки  $\Delta\hat{\beta}^{(\sigma)}$  вектора  $\Delta\beta^{(\sigma)}$ . Считая  $|\Delta\beta^{(\sigma)}|$  малым, аппроксимируем решение уравнения (8) в окрестности точки  $\beta_0^{(\sigma)}$  линейной частью ряда Тейлора:

$$z_\sigma(\beta_0^{(\sigma)} + \Delta\beta^{(\sigma)}) = z_\sigma(\beta_0^{(\sigma)}) + \frac{\partial z_\sigma(\beta_0^{(\sigma)})}{\partial \beta^T} \cdot \Delta\beta^{(\sigma)}. \quad (11)$$

Подставим выражение (11) в уравнение (10), вычислим производную  $\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \beta^{(\sigma)}}$  и приравняем ее к нулю. Из полученного соотношения найдем

$$\Delta \hat{\beta}^{(\sigma)} = S^{-1}(Q + \Xi),$$

$$\text{где } S = \int_{t_0}^{t_k} \frac{\partial z_\sigma^T(R(\sigma))}{\partial \hat{\beta}} L R \frac{\partial z_\sigma(R(\sigma))}{\partial \hat{\beta}} L dt; \quad Q = \int_{t_0}^{t_k} \frac{\partial z_\sigma^T(\beta_0^{(\sigma)})}{\partial \beta} R [z_\sigma^{(p)} - z_\sigma(\beta_0^{(\sigma)})] dt;$$

$$\Xi = \int_{t_0}^{t_k} \frac{\partial z_\sigma^T(\beta_0^{(\sigma)})}{\partial \beta} L R \eta_\sigma(t) dt.$$

Вычислим математическое ожидание и дисперсию поправки  $\Delta \hat{\beta}^{(\sigma)}$ :

$$E \left[ \Delta \hat{\beta}^{(\sigma)} \right] = S^{-1}(Q - E[\Xi]) = S^{-1}Q;$$

$$D \left[ \Delta \hat{\beta}^{(\sigma)} \right] = S^{-1} \cdot \left\{ \int_{t_0}^{t_k} \int_{t_0}^{t_k} \frac{\partial z_\sigma^T(t, \beta_0^{(\sigma)})}{\partial \beta} R N_\sigma D_\xi N_\sigma^T D_\beta^T \frac{\partial z_\sigma(\tau, \beta_0^{(\sigma)})}{\partial \beta} d\tau dt \right\} (S^{-1})^T.$$

Поскольку матрицы  $U$  и  $\Psi = \{a_{ij}, \hat{\gamma}_i, \Psi_2\}$  подобны, то полученные оценки собственных значений  $\hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_2 = \hat{\beta}_1 + i\hat{\beta}_2^{(1)}$  и  $\hat{\lambda}_3 = \hat{\lambda}_4 = \hat{\beta}_1 + i\hat{\beta}_2^{(2)}$  субматриц  $\Psi_\sigma$ ,  $\sigma = 1, 2$  будут одновременно и собственными значениями матрицы  $U$ . Используя формулы Виета, получим оценки коэффициентов  $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3, \hat{a}_4$  характеристического уравнения (2), которые, в свою очередь, выражаются через элементы матрицы  $U$ . Обернув эти зависимости, получим оценки исходных искомых параметров

$$\hat{u}_{24} = \frac{1}{2a} \left( -b + \sqrt{b^2 - 4ac} \right); \quad \hat{u}_{33} = \hat{u}_{24} \cdot \left( \hat{a}_1 + a_{11} \right);$$

$$\hat{u}_{31} = -\frac{1}{a_{14}} \left[ A_2 - a_{21}(a_{12} + a_{14})\hat{u}_{33} \right]; \quad \hat{u}_{34} = A_1 - \hat{u}_{24}\hat{u}_{33},$$

$$\text{где } a = -\frac{a_{12}a_{21}}{a_{14}} > 0, \quad b = -\frac{1}{a_{14}} \left[ A_2 + a_{12}a_{21}(\hat{a}_1 + a_{11}) \right] < 0; \quad c = -\left( a_{21}A_1 + \frac{\hat{a}_4}{a_{12}} \right) > 0.$$

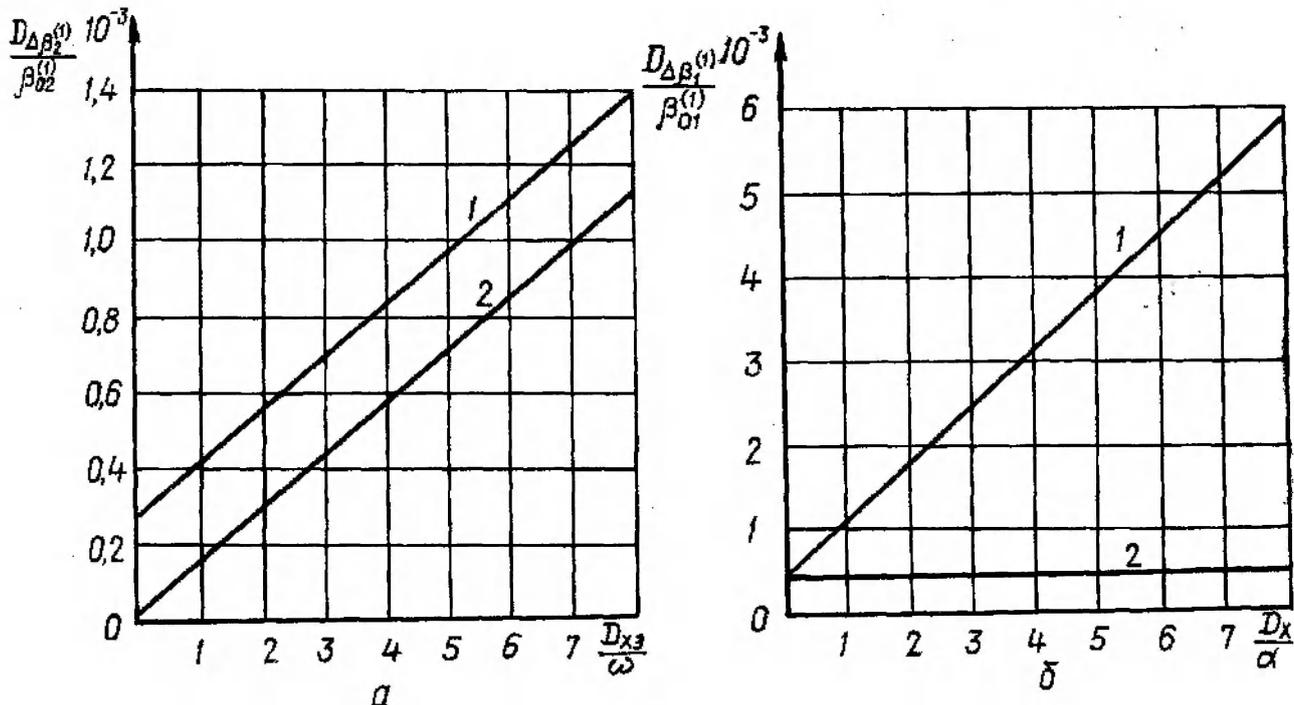
$$A_1 = -\left[ a_2 - a_{21} \left( \hat{a}_{12} + a_{14} \right) + a_{11} \left( \hat{a}_1 + a_{11} \right) \right]; \quad A_2 = -\left( \hat{a}_3 - a_{11}A_1 \right).$$

Элементы  $a_{11}, a_{12}, a_{14}, a_{21}$  матрицы  $U$  известны,  $a_{43} = 1$ , остальные ее элементы равны нулю.

В табл. 1 и на рисунке отражены результаты численного исследования, которые получены на основе расщепления динамических уравнений самолета Ту-154Б. Эти результаты

дают картину, соответствующую расщеплению уравнений каждой из преобразующих матриц  $(K_1^{24} K_2^{14})$  и  $(K_1^{34} K_2^{12})$ .

Средние квадратические отклонения физических переменных приведены в табл. 2.



Определение статистических оценок параметров полета при разделении движений:  
 а  $-\omega_1$  - амплитуда первого колебания  $x_3(t)$ ; б  $-\alpha_1$  - амплитуда первого колебания  $x_4(t)$ ;  
 1 - матрица  $(K_1^{24} K_2^{14})$ ; 2 - матрица  $(K_1^{24} K_2^{12})$

Таблица 1

Средние квадратические отклонения новых переменных состояний	$(K_1^{24} K_2^{14})$	$(K_1^{34} K_2^{12})$
$\sigma_{z_1}^{(1)}$	$1,0035102 \cdot 10^{-2}$	$4,3175022 \cdot 10^{-3}$
$\sigma_{z_2}^{(1)}$	$3,916869 \cdot 10^{-3}$	$4,6891524 \cdot 10^{-3}$
$\sigma_{z_1}^{(2)}$	$2,1997049 \cdot 10^{-3}$	$2,7548118 \cdot 10^{-4}$
$\sigma_{z_1}^{(2)}$	$4,8643185 \cdot 10^{-3}$	$6,0918543 \cdot 10^{-4}$

Таблица 2

$\sigma_{x1}$	$\sigma_{x2}$	$\sigma_{x3}$	$\sigma_{x4}$
2,501	$3,53 \cdot 10^{-3}$	$8,01 \cdot 10^{-3}$	$1,201 \cdot 10^{-2}$

Сравнение их позволяет сделать заключение, что с точки зрения статистического оценивания параметров вторая матрица предпочтительнее первой.

### Список литературы

1. *Абгарян К.А.* Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем. - М.: Наука, 1973. - 432 с.
2. *Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В.* Аэродинамика самолета: динамика продольного и бокового движения. - М.: Машиностроение, 1979. - 352 с.

Стаття надійшла до редакції 23 червня 1998 року.

**Володимир Олександрович Кас'янов** (1935) закінчив Миколаївський судобудівельний інститут в 1959 році. Доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної механіки Київського міжнародного університету цивільної авіації, член експертної ради ВАК України та спеціалізованих рад з захисту дисертацій. Автор понад 170 публікацій з різних областей: аеромеханіка, динаміка, безпека польотів, керування динамічними системами, ідентифікація, прикладна статистика та обробка експериментальних даних, деякі проблеми мікроекономіки.

**Volodymir A. Kasianov** (b. 1935) graduated from Nikolayev Shipbuilding Institute (1959). DSc (Eng), professor, head of Theoretical Mechanics Department of Kyiv International University of Civil Aviation. Member of Expert Council of HAC of Ukraine, member of Specialized Councils for thesis defense. Author of more than 170 publications in the sphere of aeromechanics, electrodynamics, statical mechanics, flight dynamics, safety of flight, dynamical system control, identification theory, applied statistics, experimental data processing, some problems of microeconomics.

**Станіслав Георгійович Єфремов** (1946) закінчив Київський державний університет імені Т.Г. Шевченка в 1972 році. Старший викладач кафедри теоретичної механіки Київського міжнародного університету цивільної авіації. Наукові інтереси пов'язані з наступними напрямками: теорією коливань, математичним моделюванням динамічних систем, оптимальним управлінням, теорією стійкості руху. Має 14 опублікованих робіт.

**Stanislav G. Efremov** (b.1946) graduated from T.G. Shevtchenko Kyiv State University (1972). Senior teacher of Theoretical Mechanics Chair of Kyiv International University of Civil Aviation. Specializes in oscillation theory, simulation of dynamic systems, optimal control, theory of motion steadiness. Author of 14 publications.