УДК 621.396.933(045)

[1]**В.М. Васильєв,** д.т.н., проф.
[2]**К.В. Науменко,** асп.

ВИКОРИСТАННЯ ОПТИМАЛЬНИХ МЕТОДІВ ОЦІНКИ ТРАЄКТОРНИХ ПАРАМЕТРІВ ЗА ДАНИМИ РАДІОДАЛЕКОМІРНИХ СИСТЕМ

Національний авіаційний університет
[1]E-mail: v_vasylyev@ukr.net
[2]E-mail: nau3000@ukr.net

Синтезовано алгоритм оптимальної оцінки траєкторних параметрів за даними вимірювань двопозиційної системи далекомірних радіонавігаційних станцій. Розглянуто проблему нелінійності, що виникає при вирішенні поставленої задачі в прямокутній системі координат. Виконано оцінку точності синтезованого алгоритму.

Ключові слова: наземна радіодалекомірна система спостереження, оптимальна одноетапна оцінка траєкторних параметрів, фільтр Калмана.

Постановка проблеми

При вирішенні задач навігації й керування рухом, насамперед, необхідно знати траєкторію переміщення керованого об’єкта, яка визначається за інформацією систем спостереження.

У сучасних радіолокаційних й радіонавігаційних системах широко застосовуються далекомірні методи визначення координат рухомих об’єктів.

Якість вирішення задач, пов’язаних із навігацією й керуванням рухом, істотно залежить від характеристики точності радіотехнічних засобів навігації, якою є похибка визначення місця розташування об’єкта.

Похибки радіонавігаційних систем мають випадковий характер. Для обробки даних систем спостереження вирішується задача синтезу системи оптимальної оцінки параметрів траєкторій польоту повітряних суден (ПС) із застосуванням теорії статистичної оцінки. При цьому задаються характеристики процесів на вході динамічної системи й необхідні статистичні характеристики процесів на виході.

Високий ступінь автоматизації процесів навігації й керування рухом вимагає адекватного математичного опису. Для запису математичних залежностей у першу чергу потрібно вибирати систему координат для забезпечення:

– розв’язання задачі з необхідною точністю;

– наочності відображуваної інформації про місцезнаходження об’єкта відносно маршруту польоту;

– одержання найбільш простих математичних співвідношень;

– витрати мінімального часу обчислення.

У системах керування повітряним рухом обробка траєкторної інформації для наступного вирішення завдань, пов’язаних із керуванням ПС, як правило, виконується в прямокутній системі координат.

При використанні далекомірних систем спостереження характерною рисою системи траєкторної оцінки є те, що функціональний зв’язок між вимірюваними дальностями й оцінюваними параметрами у прямокутної системі координат є нелінійний.

Отже, для вирішення поставленого завдання потрібне застосування нелінійних методів статистичної оцінки. При цьому відбувається деяка втрата точності.

При синтезі алгоритму оптимальної оцінки параметрів траєкторії польоту ПС проблемою є також коректне завдання початкових значень.

Аналіз досліджень і публікацій

Застосування багатопозиційних радіонавігаційних систем для визначення місцезнаходження об’єктів досить повно викладено в роботах [1–4].

Розрізняють багатопозиційні системи з одноетапною і двохетапною обробкою даних.

При одноетапній обробці даних оцінка параметрів траєкторії провадиться за один етап безпосередньо з сигналів, що первинно спостерігаються.

При двохетапній обробці даних спочатку в пристрої первинної обробки провадиться оцінка параметрів радіосигналів, а потім у пристрої вторинної обробки виконується остаточна оцінка параметрів траєкторії.

Мета роботи

Для підвищення точності обробки даних багатопозиційних радіодалекомірних систем спостереження синтезується алгоритм оптимальної оцінки параметрів траєкторії польоту ПС у прямокутній системі координат за даними двох рознесених радіодалекомірних систем за умови, що виміри дальностей попередньо перераховуються також у прямокутну систему.

Визначення виразів для статистичних характеристик похибок, перерахованих у прямокутну систему координат вимірів, а також початкових значень траєкторних оцінок дає можливість забезпечити коректність функціонування алгоритму.

Постановка завдання

Взаємне положення ПС і двопозиційної системи спостереження, що складається з двох далекомірних радіонавігаційних станцій, розміщених на віддалі d один від одного, кожна з яких вимірює дальність r_1 і r_2 до літака, показано на рис. 1.

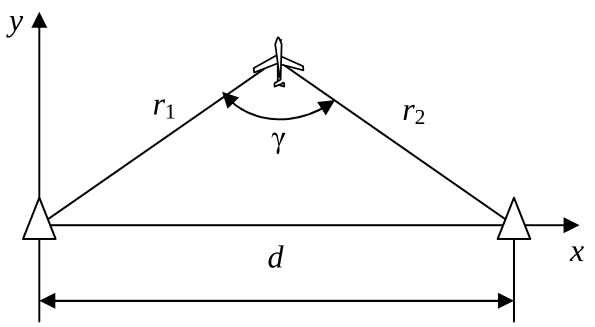

Рис. 1. Взаємне положення ПС і радіодалекомірних систем

Приймемо, що дисперсії похибок вимірювань для кожного далекоміра є відомими і їх значення дорівнюються σ_{r1}^2, σ_{r2}^2 відповідно.

Треба синтезувати алгоритм оптимальної оцінки параметрів траєкторії руху ПС у прямокутній системі координат за даними вимірів двопозиційної далекомірної системи спостереження, дослідити умови коректного функціонування синтезованого алгоритму й оцінити його точність.

Математична модель вимірів

У загальному вигляді функціональний зв'язок між виміряними значеннями дальностей r_1, r_2 і координатами місцезнаходження ПС у прямокутній системі координат записують у вигляді нелінійних функцій:

$$x = f_1(r_1, r_2),$$

$$y = f_2(r_1, r_2). \quad (1)$$

Виходячи з рис. 1, функціональні співвідношення (1) запишемо в конкретному вигляді:

– для координати x:

$$x = f_1(r_1, r_2) = \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d}; \quad (2)$$

– для координати y:

$$y = f_2(r_1, r_2) =$$

$$= \frac{1}{2d}\left(2r_1^2 d^2 - r_1^4 + 2r_1^2 r_2^2 -\right.$$

$$\left. - r_2^4 + 2r_2^2 d^2 - d^4\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2d}\sqrt{A}. \quad (3)$$

Перераховані в прямокутну систему координат виміри далекомірів подамо у вигляді:

$$x^*(i) \cong x(i) + v_x(i); \quad (4)$$

$$y^*(i) \cong y(i) + v_y(i), \quad (5)$$

де v_x, v_y – випадкові похибки визначення відповідних прямокутних координат.

Для знаходження похибок визначення прямокутних координат v_x, v_y скористаємося методом лінеаризації.

У результаті лінеаризації виразу (2) одержимо для похибки визначення координати x:

$$v_x = \Delta x = \frac{\partial f_1}{\partial r_1}\Delta r_1 + \frac{\partial f_1}{\partial r_2}\Delta r_2; \quad (6)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial r_1} = \frac{r_1}{d}; \ \frac{\partial f_1}{\partial r_2} = -\frac{r_2}{d},$$

де $\Delta r_1 = v_{r1}$; $\Delta r_2 = v_{r2}$ – похибки вимірів відповідних далекомірів.

Аналогічно для похибки визначення координати y після лінеаризації виразу (3) одержимо:

$$v_y = \Delta y = \frac{\partial f_2}{\partial r_1}\Delta r_1 + \frac{\partial f_2}{\partial r_2}\Delta r_2, \quad (7)$$

де

$$\frac{\partial f_2}{\partial r_1} = \frac{1}{d\sqrt{A}}\left(d^2 r_1 - r_1^3 + r_1 r_2^2\right);$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial r_2} = \frac{1}{d\sqrt{A}}\left(d^2 r_2 - r_2^3 + r_1^2 r_2\right).$$

На основі отриманих виразів (6), (7) для похибок визначення координат визначимо дисперсії похибок розрахунку прямокутних координат за результатами вимірів далекомірів:

– для координати x:

$$\sigma_x^2 = M\{v_x^2\} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial r_1}\right)^2 \sigma_{r1}^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial r_2}\right)^2 \sigma_{r2}^2 =$$

$$= \frac{1}{d^2}\left(r_1^2\sigma_{r1}^2 + r_2^2\sigma_{r2}^2\right); \quad (8)$$

– для координати y:

$$\sigma_y^2 = M\{v_y^2\} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial r_1}\right)^2 \sigma_{r1}^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial r_2}\right)^2 \sigma_{r2}^2 =$$

$$= \frac{1}{d^2 A}\Big[\left(d^2 r_1 - r_1^3 + r_1 r_2^2\right)^2 \sigma_{r1}^2 +$$

$$+\left(d^2 r_2 - r_2^3 + r_1^2 r_2\right)^2 \sigma_{r2}^2\Big]. \quad (9)$$

Знайдемо взаємну кореляцію похибок обчислених прямокутних координат v_x та v_y:

$$\sigma_{xy}^2 = M\{v_x v_y\} = \frac{\partial f_1}{\partial r_1}\frac{\partial f_2}{\partial r_1}\sigma_{r1}^2 + \frac{\partial f_1}{\partial r_2}\frac{\partial f_2}{\partial r_2}\sigma_{r2}^2. \quad (10)$$

У результаті для лінеаризованої моделі вимірів (4), (5) і виразів (8), (9), (10) матрицю дисперсій похибок вимірів запишемо

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

де $r_{11} = \sigma_x^2$, $r_{22} = \sigma_y^2$, $r_{11} = r_{21} = \sigma_{xy}^2$.

Не рівні нулю значення недіагональних елементів матриці $\mathbf{R}$ свідчать про те, що похибки визначення координат корельовані.

За умови, що вектор станів $\mathbf{X}$, розмірності n, який описує оцінюваний процес, поданий у прямокутній системі координат і відповідно включає координати x й y, тобто $\mathbf{X} = [x, y, \cdots]^T$, модель вимірів записується в просторі станів у лінійному вигляді.

У результаті отримано лінеаризовану математичну модель вимірів:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{HX} + \mathbf{U}, \quad (12)$$

де $\mathbf{Z} = [x^*, y^*]^{\mathrm{T}}$ – вектор перерахованих у прямокутну систему координат вимірів дальності;

$\mathbf{U} = [v_x, v_y]^{\mathrm{T}}$ – вектор похибок визначення відповідних прямокутних координат.

Структура прямокутної матриці спостережень $\mathbf{H}$ розмірності $2 \times n$ має вигляд

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Математична модель процесу

При синтезі алгоритмів оцінки важливе значення має математична модель оцінюваного процесу, у цьому випадку – опис процесу польоту ПС.

Адекватність математичної моделі реальному процесу істотно впливає на усталеність і точність оцінки.

При математичному описі процесу польоту необхідно брати до уваги той факт, що надмірна детальність опису, як правило, призводить до невиправданого ускладнення алгоритму оцінки й проблеми щодо його реалізації. На більшій частині маршруту ПС здійснюють польоти по прямої лінії зі сталою швидкістю.

Важливе значення при математичному описі має також вибір системи координат. Обробка траєкторної інформації, як правило, провадиться в прямокутній системі координат x,y.

З огляду на це, запишемо модель прямолінійного руху ПС зі сталою швидкістю в прямокутній системі координат *x*,*y* у вигляді рекурентних виразів:

$$x(t_i) = x(t_{i-1}) + V_x T,$$
$$y(t_i) = y(t_{i-1}) + V_y T, \quad (14)$$

де V_x, V_y – складові швидкості по відповідних координатах;

$T = t_i - t_{i-1}$ – крок дискретизації, який дорівнює періоду надходження траєкторних вимірів.

За вектор станів беремо вектор

$$\mathbf{X} = [x, y, V_x, V_y]^{\mathrm{T}} \quad (15)$$

і запишемо математичну модель (14) в просторі станів:

$$\mathbf{X}(t_i) = \mathbf{\Phi}\,\mathbf{X}(t_{i-1}), \quad (16)$$

де $\mathbf{\Phi}$ – перехідна матриця, яка за прийнятих умов має вигляд:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Оптимальна обробка траєкторної інформації і оцінка точності

У результаті виконаних дій вирази для математичної моделі (15)–(17), що описують рух ПС, а також модель вимірів (11)-(13) отримані у вигляді, що задовольняє рекурентний лінійний фільтр Калмана, який широко застосовується в навігаційних системах і системах керування повітряним рухом [4].

Система оцінки при цьому є нестаціонарною.

Основні рівняння фільтра стосовно до постановки задачі й прийнятих умов у дискретному вигляді записують й розв’язують послідовно в такий спосіб:

– прогноз на крок дискретизації:

$$\mathbf{X}_{ie} = \mathbf{\Phi}\hat{\mathbf{X}}_{i-1}, \quad (18)$$

$$\mathbf{P}_{ie} = \mathbf{\Phi}\,\mathbf{P}_{i-1}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}, \quad (19)$$

– оцінка (корекція прогнозу):

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{P}_{ie}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\mathbf{H}\mathbf{P}_{ie}\mathbf{H}^{\mathrm{T}} + \mathbf{R}_i)^{-1}, \quad (20)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_i = \mathbf{X}_{ie} + \mathbf{K}_i(\mathbf{Z}_i - \mathbf{H}\mathbf{X}_{ie}), \quad (21)$$

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{ie} - \mathbf{K}_i\mathbf{H}\mathbf{P}_{ie}, \quad (22)$$

де $\mathbf{K}$ – матриця коефіцієнтів корекції фільтра;

i – поточний момент часу;

$\mathbf{P}$ – матриця дисперсій похибки оцінки (матриця коваріацій);

e – індекс, що означає екстрапольоване значення.

При реалізації фільтра (18)–(22) треба на кожному кроці дискретизації обчислювати матрицю дисперсій похибок визначення прямокутних координат $\mathbf{R}$ (11), тому що матриця нестаціонарна та її елементи залежать від положення літака.

Оцінка точності оптимального оброблення траєкторних вимірювань

Реалізація алгоритму траєкторної оцінки та дослідження його точності провадилося методом комп’ютерного моделювання з використанням програмного пакета MatLab.

Для реалізації оптимальної обробки даних із застосуванням фільтра Калмана необхідно задати початкові дані для матриці коваріацій $\mathbf{P}(0)$, матриці дисперсій похибок перерахованих вимірів $\mathbf{R}(0)$ і вектора станів $\mathbf{X}(0)$.

Початкові значення елементів вектора станів $\mathbf{X}(0)$ приймалися рівними відповідно до початкового положення ПС і його швидкості для модельованого польоту ПС.

Моделювався прямолінійний політ літака зі сталою швидкістю в напрямку, перпендикулярному базі: $d = 50$ км.

Початкове положення задавалося 10 км від середини бази.

Початкові значення матриці дисперсій похибок обчислення прямокутних координат місцезнаходження ПС задавалися на основі отриманих виразів (8)–(10) з підстановкою дальностей, відповідних початковим значенням координат модельованого положення ПС. При цьому похибки вимірів дальностей задавались:

$$\sigma_{r1} = \sigma_{r2} = \sigma_r = 100 \text{ м}.$$

Початкові значення для матриці коваріацій задавалися також на основі цих виразів для початкового положення ПС:

$p_{11}(0) = \sigma_x^2(0)$;

$p_{22}(0) = \sigma_y^2(0)$;

$p_{12}(0) = p_{21}(0) = \sigma_{xy}^2(0)$;

$p_{33}(0) = 2\sigma_x^2(0)/T^2$;

$p_{44}(0) = 2\sigma_y^2(0)/T^2$.

Для прийнятої розмірності $n = 4$ вектора станів $\mathbf{X}$ (15) матриця спостережень (13) має структуру

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для оцінки точності алгоритму можна врахувати особливість фільтра Калмана, яка полягає в тому, що рівняння для матриці коваріацій не залежать від вимірів $\mathbf{Z}$ і рівняння оцінки (21). Тому потенційна точність, з якої може бути виконана оцінка траєкторних параметрів, визначається розв’язанням рівнянь, що описують розвиток дисперсії похибки оцінки (19), (20), (22).

Результат комп’ютерного моделювання показано на рис. 2 (крива *1*).

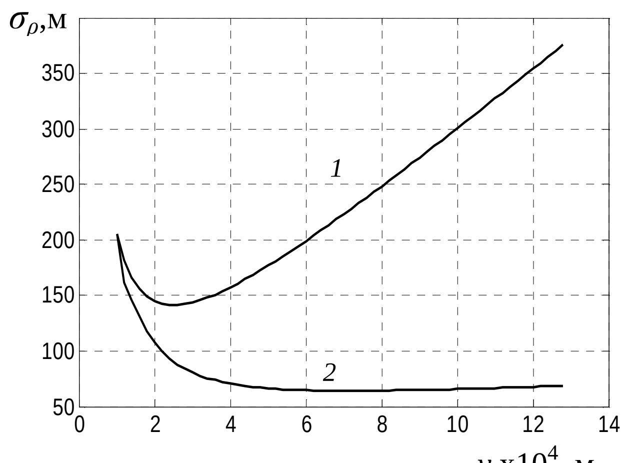

Рис. 2. Середньоквадратична радіальна похибка визначення місцезнаходження ПС

Зміна середньоквадратичного значення радіальної похибки визначення місцезнаходження ПС

$$\sigma_\rho = \sqrt{p_{11} + p_{22}}$$

залежить від віддалі ПС (координата y) від бази.

Для порівняння (крива *2*) показана зміна радіальної похибки розрахунку положення ПС за даними вимірів двох далекомірних систем без оптимальної обробки, значення якої визначається виразом [1]:

$$\sigma_\rho = \sqrt{2}\,\sigma_r \operatorname{cosec}\gamma.$$

Висновки

У роботі синтезовано алгоритм одноетапної оптимальної оцінки параметрів траєкторії руху ПС у прямокутній системі координат за результатами вимірів двопозиційної далекомірної системи спостереження.

Рішення отримане в лінеаризованому вигляді, що дозволяє застосувати добре розроблений дискретний лінійний рекурентний фільтр Калмана.

Визначено структуру фільтра й умови його коректного функціонування, особливо для завдання початковий умов для матриці коваріацій, що включає дисперсії похибок оцінки координат і складових швидкостей, а також значень нестаціонарної матриці дисперсій похибок визначення перерахованих вимірів дальностей у прямокутну систему координат.

Дослідження синтезованого алгоритму оптимальної оцінки траєкторних параметрів й оцінка його точності провадилася комп’ютерним моделюванням.

Результат показав стійку роботу алгоритму та високу точність оцінки координат місцезнаходження ПС.

Література

1. *Кондратьев В.С.* Многопозиционные радиотехнические системы / В.С. Кондратьев, А.Ф. Котов, Л.Н. Марков и др. / под. ред. проф. В.В. Цветнова. – М.: Радио и связь, 1986. – 264 с.

2. *Ярлыков М.С.* Статистическая теория радионавигации / М.С. Ярлыков. – М.: Радио и связь, 1985.– 344 с.

3.*Радіоелектронні* системи, основи побудови й теорія: довідник / Я.Д. Ширман, Ю.И. Лосєв, Н.И. Минервин та ін. / під ред. Я.Д. Ширмана. – М.: ЗАТ «Маквис», 1998. – 828 с.

4. *Балакришнан А.В.* Теория фильтрации Калмана / А.В. Балакришнан. – М.: Мир, 1988. – 200 с.

Стаття надійшла до редакції 03.06.2011.