УДК 62.50

[1]**С.В. Павлова,** д.т.н., доц.
[2]**В.В. Павлов,** д.т.н., проф.
[3]**В.І. Чепіженко,** к.т.н., с.н.с.

МЕТОД ГАРАНТОВАНОГО ОЦІНЮВАННЯ ОБЛАСТІ ПОВНІСТЮ КЕРОВАНОГО СТАНУ СКЛАДНОЇ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ

[1,3]Національний авіаційний університет
[1]E-mail: psv@nau.edu.ua
[3]E-mail: chiv@nau.edu.ua
[2]Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій і систем НАН України
E-mail: vpavlov@nau.edu.ua

На основі процедури імерсування «мірних» об'єктів у вихідний об'єкт розроблено метод гарантованого оцінювання області повністю керованого стану.

On the basis of procedure of immersion of the «measuring» objects in an initial object the secure estimation method of the fully controlled state area has been developed.

На основе процедуры иммерсирования «мерных» объектов в исходный объект разработан метод гарантированного оценивания области полностью управляемого состояния.

Постановка проблеми

У роботі [1] розглянуто клас істотно нелінійних динамічних систем, описаних диференціальними рівняннями вигляду:

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = f(t,x,u,v); \\ &x \in Q_x \subset R_x^n; \\ &u \in U \subset R_u^m; \\ &v \in V \subset R_v^l; \\ &t \in T = [t_0;\infty], \end{aligned} \tag{1}$$

де f – n-вимірна нелінійна кусково-безперервна вектор-функція:

$f(t,x,u,v) = (f_1(\cdot),\ldots,f_n(\cdot)) \in C^s$, $s \geq 0$;

t – час;

x – n-вимірний вектор стану процесу $n \geq 3$;

u – m-вимірний вектор стану керуючих чинників процесу;

v – l-вимірний вектор стану збурюючих чинників процесу;

Q_x – n-вимірна багатозв'язна неопукла область станів процесу;

R_x^n, R_u^m, R_v^l – евклидові n-, m-, l-вимірні простори визначення функції $f(t,x,u,v)$ за x, за u і за v.

n, m, l – довільні, натуральні, позитивні числа;

U – m-вимірна багатозв'язна неопукла множина станів керуючих чинників процесу;

V – l- вимірна багатозв'язкова неопукла множина станів збурюючих чинників процесу;

T – інтервал визначення системи;

t_0 – початковий момент часу.

Як було показано в роботі [1], у ході дослідження класу завдань синтезу керувань в умовах невизначеності для істотно нелінійних систем, для яких характерними властивостями є неопуклість і незв'язність, особливо гостро постає проблема створення методів й алгоритмів високоякісного керування.

Для цього класу систем в роботі [1] запропоновано метод розв'язання задачі «якості», необхідної для синтезу керування нелінійними динамічними системами у «великому».

У процесі розв'язання задачі керування складною нелінійною динамічною системою (1) потрібно синтезувати алгоритм зміни керуючої дії, як функції стану об'єкта і середовища

$$u = u(t_0, x^0, x, v) \in U, \tag{2}$$

так, щоб траєкторія

$X*(x^0, x^к, x) \in Q_x$,

поведінки системи (1), (2) в R_x^n не виходила з області обмежень $L(t,x)$ на стани системи (1) у ході керованого руху системи з початкового стану системи x^0 в кінцевий стан системи $x^к$:

$$X*(t_0,t)\in L(t,x)\,, \qquad (3)$$

де $L(t,x)\subseteq R_x^n$ – обмежена багатозв'язкова область допустимих станів об'єкта.

Мета роботи – розроблення методу гарантованого оцінювання області повністю керованого стану складної нелінійної динамічної системи у «великому».

Системні властивості області повністю керованого стану

У роботі [1] при формулюванні умови функціональної коректності завдання керування складними динамічними системами використано поняття області повністю керованого стану. Розглянемо загальні системні властивості області повністю керованого стану складної нелінійної динамічної системи.

Визначення 1 у термінах завдання (1), (3). Областю повністю керованого стану системи (1), (3) за вектором $x_k, k\le n$, де k – розмірність вектора, називають в теорії ергатичних систем [2] таку область

$$Q_{x_k}^{кс}\subseteq Q_x\bigcap L\subset R_x^n\,,$$

будь-які дві точки x_k^1 і x_k^2 якої можуть бути взаємно з'єднані при відповідному виборі обмеженого керування (2).

Надалі нижній індекс «k» опускається.

Зауваження. У визначенні 1:

– термін «керований стан» системи за сенсом ототожнюється з терміном «досяжний стан» [2];

– «досяжність» розглядається як вид «керованості» [3];

– відповідно поняття «досяжність» характеризується областю простору станів, кожна точка якого може бути досягнута під час керування, обмеженого заданою областю [3];

– область $Q_x^{кс}$ у визначенні 1 розуміється в розширеному сенсі «взаємної досяжності» всіх точок, що створюють область, тобто досяжність x^2 із x^1 і обернено, досяжність x^1 із x^2 для всіх $x^1, x^2\in Q_x^{кс}$.

Висновок 1. У роботі [1] дано визначення керування «у великому»/«у цілому», з якого випливає важливий системний факт. Якщо система (1), (3) повністю керована, то існують такі функції керування (2), що в поведінці замкненої системи (1), (2), (3) утворюються у фазовому просторі орбіти (цикли) $O(x)$, що містять в собі позиції x^1 і x^2.

Виявляється, що кожні дві позиції x^1 і x^2 із $Q_x^{кс}$ можуть належати одночасно деякій підмножині $M_{(x^1,x^2)}\subseteq M$ орбіт $O_i(x,x^1,x^2)$:

$$M_{(x^1,x^2)}\{O_i(x,x^1,x^2)\; i\in I_{(x^1,x^2)}\}\,,$$

де $I_{(x^1,x^2)}$ – множина індексів орбіт, що містять в собі позиції x^1 і x^2.

Висновок 2. Область $Q_x^{кс}$ повністю керованого стану системи (1), (3) за визначенням утворюється контактною множиною всіх орбіт $O_i(x)$ системи (1), (2), (3):

$$Q_x^{кс}=M\{O_i(x)\subseteq Q_x\bigcap L,\quad i\in I\}\,,$$

де I – множина індексів орбіт.

Визначення 2. Контактною множиною M орбіт O_i $i\in I$ називається така множина орбіт O_i, що будь-які два цикли O_l і O_k з його числа володіють прямим або непрямим (опосередкованим іншими контактними орбітами) контактом.

Постановка завдання вимірювання області повністю керованого стану $Q_x^{кс}$

Для істотно нелінійних об'єктів (1), (3) що функціонують в умовах наявності обмежень (Q_x,U,V,L) довільного вигляду, які є не обов'язково опуклими областями, побудова області $Q_x^{кс}$ є серйозною проблемою.

Проте проблемність завдання побудови області $Q_x^{\text{кс}}$ може бути певною мірою подолана, якщо замінити її іншим завданням – завданням оцінювання її знизу, а точніше – оцінювання області зсередини.

Для оцінювання області $Q_x^{\text{кс}}$ зсередини для об'єкта (1), (3) пропонується застосувати як вимірник (міру) області $Q_x^{\text{кс}}$ деяку іншу динамічну систему, побудову і оцінку області керованості та досяжності $Q_x^{\text{кс}}$ якої добре методично обґрунтовану [4].

При виконанні вимог узгодження характеристик цього нового об'єкта з властивостями вихідного об'єкта (1), (3), що забезпечують так звану властивість імерсування (вкладеності) нового об'єкта у вихідний об'єкт, надається можливість по області $Q_x^{\text{кс}}(\sigma)$ судити про область $Q_x^{\text{кс}}$ вихідної системи:

$$Q_x^{\text{кс}}(\sigma) \subseteq Q_x^{\text{кс}}.$$

Параметр σ характеризує клас об'єктів, що «вкладаються»

Міра (одиниця) вимірювання області $Q_x^{\text{кс}}$ повної керованості об'єкта

Як міру (одиницю) вимірювання області $Q_x^{\text{кс}}$ пропонується використовувати два типи мір: безінерційну, інерційну.

Визначення 3. Безінерційною мірою для вимірювання області $Q_x^{\text{кс}}$ об'єкта (1) назвемо модель руху точки x в n-вимірному просторі під дією одиничної сили, яка може надавати цій точці швидкість, що не перевершує за модулем одиницю і направлена в будь-яку сторону:

$$\frac{dx_i}{dt} = p_i,$$
$$p_i \in P_i^{\square} = (-1,+1),\ i = 1,\ldots,n. \quad (4)$$

Визначення 4. Інерційною мірою для виміру області $Q_x^{\text{кс}}$ об'єкта (1) назвемо модель руху в n-вимірному просторі точки x, що володіє одиничною масою під дією одиничної керуючої сили, яка може надавати цій точці прискорення, що не перевершує за модулем одиницю і направлене в будь-яку сторону:

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = p_i,\ p_i \in P_i^{\square} = (-1,+1),\ i = 1,\ldots,n, \quad (5)$$

чи у фазових змінних (x_i, y_i) положення та швидкості точки:

$$\frac{dx_i}{dt} = y_i;$$
$$\frac{dy_i}{dt} = p_i,\ p_i \in P_i^{\square} = (-1,+1),\ (x_i, y_i) \in R_x^n \times R_y^n. \quad (6)$$

Вибір моделей (4), (5) і (6) як вимірюючих систем обґрунтований існуючим детальним аналізом і синтезом їх певних оптимальних рухів, що повністю використовують притаманний ним ресурс керування $p = \pm 1$ для досягнення цілей керування [4].

Запропоновано безінерційну мірну систему (4) використовувати для оцінювання області $Q_x^{\text{кс}}$ стосовно динамічних нелінійних об'єктів загального вигляду (1), що задаються у формі:

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(t, x_i, u_i, v_i),\ i = 1,\ldots,n, \quad (7)$$

а інерційну систему (6) – для динамічних об'єктів (1), що мають форму

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = F_i\left(t, \frac{dx_i}{dt}, x_i, u_i, v_i\right),\ i = 1,\ldots,n. \quad (8)$$

Природним є і те, що для комбінованого випадку моделі (1) у вигляді

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i\left(t, \frac{dx_j}{dt}, x_i, u_i, v_i\right),\ i = 1,\ldots,n_1;$$
$$\frac{d^2x_j}{dt^2} = F_j\left(t, \frac{dx_j}{dt}, x_j, x_i, u_j, v_j\right),\ j = n_1+1,\ldots,n \quad (9)$$

має бути використана й комбінована мірна модель вигляду:

$$\frac{dx_i}{dt} = p_i,\ \ p_i \in P_i^{\square} = (-1,+1),\ i = 1,\ldots,n_1;$$
$$\frac{d^2x_j}{dt^2} = p_j,\ p_j \in P_j^{\square} = (-1,+1),\ j = n_1+1,\ldots,n. \quad (10)$$

Властивість області керованого стану мірних систем у відкритих просторах

Мірні системи (4), (5), (10) мають області $Q_x^{\text{кс}}$ повністю керованого стану, що утворюються добутком ортогональних $Q_{x_i}^{\text{кс}}$ областей керованого за x_i, $i \in N$ станів.

Кожна область $Q^{\text{кс}}_{x_i}$, $i \in N$ збігається з усім підпростором R^n_x при $n = 1$ в безінерційному випадку, $n = 2$ в інерційному випадку. При цьому [4]:

$$Q^{\text{кс}}_x = \prod_{i \in N} Q^{\text{кс}}_{x_i} = R^n_x .$$

Відповідно до основного положення математичної теорії оптимальних процесів [4]:

1) будь-які дві точки x^1 і x^2, відповідні системам (4), (5) або (10), що з'єднуються оптимальними за швидкодією траєкторіями, кожна з яких утворюється однією граничною фазовою траєкторією в разі системи (4) і двома граничними фазовими напівтраєкторіями у випадку (6), кожна з яких відповідає керуванню з модулем 1;

2) а у випадку $x^1 \to x^2$, $x^1 = x^2$ такі оптимальні траєкторії утворюють оптимальні цикли $O_i(x^1, x^2, x^1 = x^2)$, що заповнюють для всіх x^1, $x^2 \in R_{x_i}$ весь простір R_{x_i} (рис. 1).

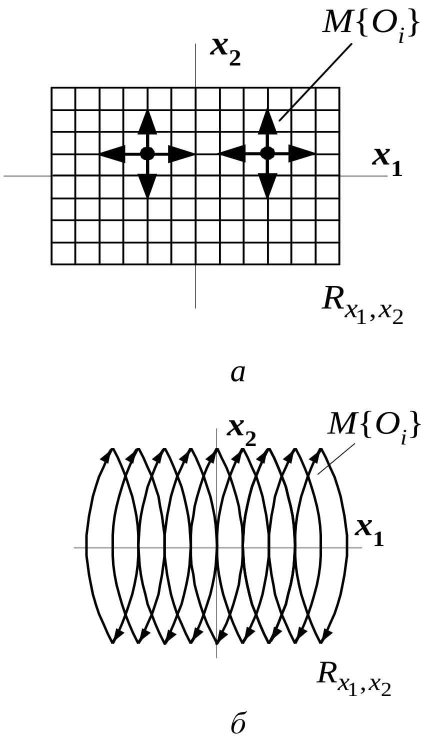

Рис. 1. Структурна організація простору R_{x_i} за властивістю керованості мірних систем:
а – система (4);
б – система (6)

У цьому випадку вся сукупність циклів (рис. 2)

$$M\{O_i(x_i, x_i^1, x_i^2), \forall x_i^1, x_i^2 \in R^n_{x_i} \quad \text{для системи (4)},$$
$$M\{O_i((x_i, y_i), (x_i^1, y_i^1), (x_i^2, y_i^2), \forall (x_i^1, x_i^2) \in \qquad (11)$$
$$\in R^n_{x_i}, (y_i^1, y_i^2) \in R^n_{y_i} \quad \text{для системи (6)},$$

системно опосередкована мірами (4), (5), (10), утворює в R^n_x структуру станів систем, впорядкованих траєкторіями оптимально керованих «мірних» систем (рис. 1).

Мірні системи (4), (6) породжують у R_x симетричну систему криволінійних (гауссівих) координатних ліній розфарбованих знаком керуючої функції $\operatorname{sign} p = +1$ чи $\operatorname{sign} p = -1$. Кожна з криволінійних ліній у них є інтегральною кривою руху системи (4), (6) у фазовому просторі R_x під дією постійного за величиною $|p|$ керуючого впливу з позитивним і негативним знаком. У разі використання як мірної системи моделі (4) фазовими траєкторіями є сім'я прямих ліній

$$x_i = c_i = \text{const}, \qquad (12)$$

а у випадку (6) це сім'я парабол

$$x_i - \frac{1}{2p_i}(y_i)^2 = c_i;\ c_{i+1} = 0, \text{ якщо } \operatorname{sign} p_i = +1;$$
$$x_i + \frac{1}{2p_i}(y_i)^2 = c_i;\ c_{i+1} = 0, \text{якщо} \operatorname{sign} p_i = -1, \quad (13)$$

де c_i – постійні інтегрування для x_i невизначених фіксацій.

У разі побудови системи гауссівих координатних ліній постійні c_i утворюють натуральну низку чисел:

$-\infty$, ., -2, -1, 0, 1, 2 ., $+\infty$.

Більш того, кожна вибрана пара

$$(+p_i, -p_i) \in P$$

задає на евклідовому просторі свою систему гауссівих координат $S(-p, +p; M_R : M_c)$ для вимірювання повної керованості систем (7), (8), (9) (рис. 3), де $(M_R : M_c)$ – співвідношення масштабів евклідових просторів M_R і масштабу чисел c_i (12), (13).

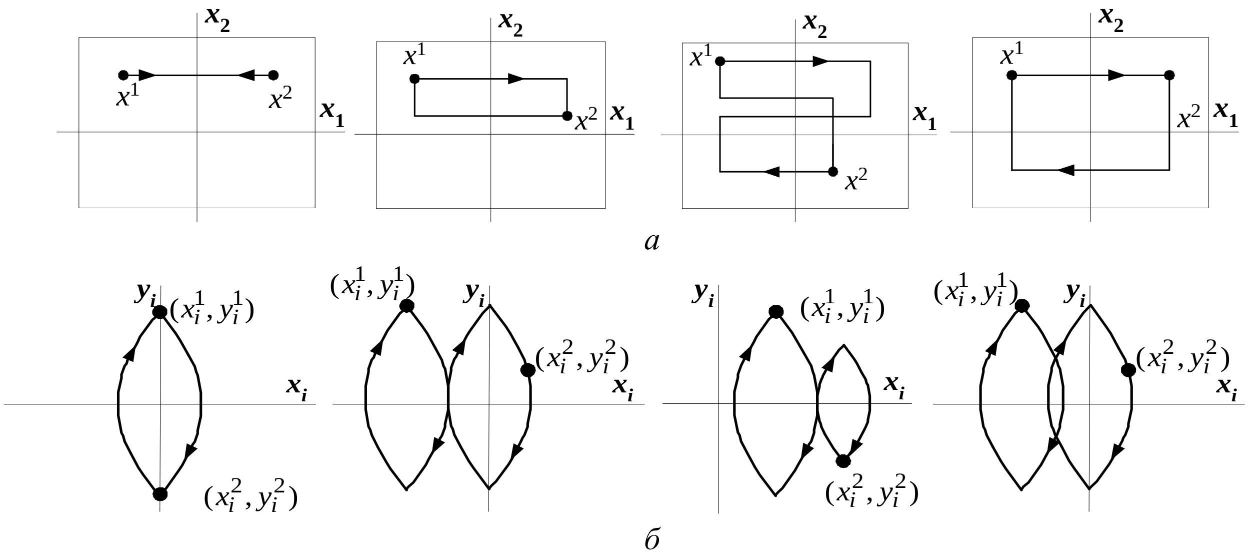

Рис. 2. Приклади форм циклів O_i для двох типів систем: *а* – системи (4); *б* – системи (6)

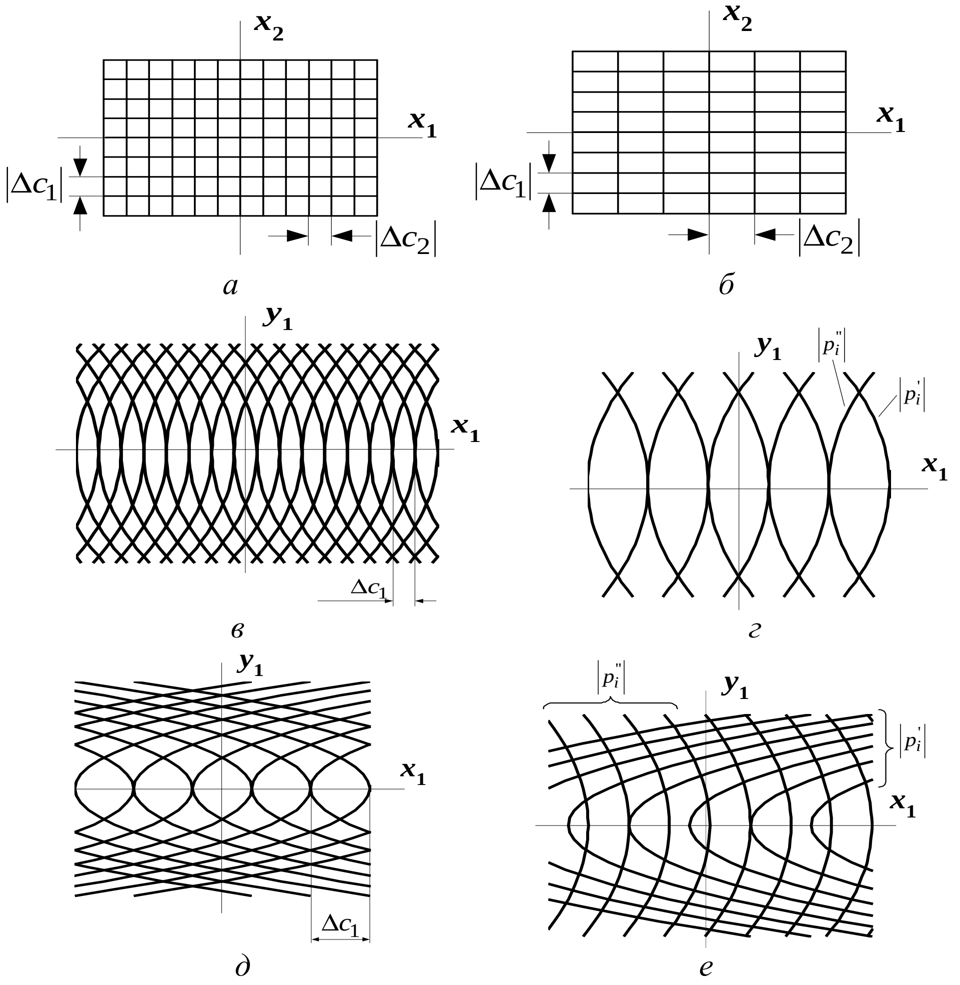

Рис. 3. Мірні сітки гауссівих координат:

а, в, г, д – гомогенна система координатних ліній $|p_i'| = |p_i''|$;

б – гетерогенна система координатних ліній $\Delta c_1 \neq \Delta c_2$;

е – гетерогенна система координатних ліній $\Delta c_1 \neq \Delta c_2$, $|p_i'| \neq |p_i''|$

Мірні цикли O_i (11) наносяться на сітки $S(-p,+p;M_R:M_c)$ і заповнюють простір R_x^n.

Кожний цикл O_i у цій структурі утворюється як мінімум двома напівтраєкторіями, що належать по-різному пофарбованим координатним $(p>0)$ чи $(p<0)$ лініям.

Висновки

Розроблений метод гарантованого оцінювання області повністю керованого стану $Q_x^{\text{кс}}$ заснований на процедурі вкладення в область стану Q_x множини мірних циклів O_i з контактом і використання симетричних систем гауссівих (нелінійних) координат, породжуваних сукупністю мірних оптимальних траєкторій одиничних об'єктів (званих мірними системами), що спеціально вводяться.

Література

1. *Павлова С.В.* Метод синтезу «якості» завдання керування складною нелінійною динамічною системою у «великому» / С.В. Павлова, В.В. Павлов, В.І. Чепіженко // Вісник НАУ. – 2011. – №1. – С. 18–23.

2. *Павлов В.В.* Начала теории эргатических систем / В.В. Павлов. – К.: Наук. думка, 1975. – 240 с.

3. *Справочник* по теории автоматического управления / под ред А.А. Красовского. – М.: Наука, Гл. ред.физ.-мат. лит., 1987. – 712 с.

4. *Математическая* теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.А. Гамкрелидзе, Е.Ф. Миленко. – М.: Физ.-мат. лит., 1961. – 392 с.

Стаття надійшла до редакції 31.01.2011.