

УДК 517.2

Є.О. Гаєв, д.т.н., проф.

ЛАМІНАРНИЙ ПОТІК КРІЗЬ ТРУБУ З ЛЕГКОПРОНИКНОЮ ШОРСТКІСТЮ НА ОСІ

Інститут гідромеханіки НАН України

E-mail: Ye_Gayev@voliacable.com

Запропоновано математичну модель ламінарного потоку через круглу трубу з пористою вставкою (легкопроникною шорсткістю) в центрі труби вздовж осі. Досліджено поля швидкості, тертя на ділянці стабілізованої течії та гідравлічний опір такої труби залежно від щільності і висоти легкопроникної шорсткості.

Ключові слова: ламінарний потік, пористе середовище, труба, шорсткість.

Постановка проблеми

Математичне моделювання нещільних пористих шарів у потоці в'язкої та турбулентної нестисливої рідини біля стінок каналу або труби розвинуто в роботах [1–6].

З огляду на розташування такі шари називають легкопроникною шорсткістю (ЛПШ). Логіка попереднього дослідження та перехід до питань руху рідини із вставкою, що її закручує, приводить саме до такої структури шарів, що розташована, однак, на осі круглої труби [7; 8].

Зберігаючи математичну модель легкопроникного середовища та змінюючи лише граничні умови, отримуємо результати, що розширюють уявлення про фундаментальні риси взаємодії ЛПШ з потоком.

Аналіз публікацій

Узагальнення визнаних гідромеханічних уявлень про шорсткість поверхні задля опису руху та теплообміну і масообміну з потоком проникних складних структур різної природи наведено в роботах [1–7; 9–11].

Аналогічні структури у потоці, такі, як ліс або сільськогосподарські насадження під дією вітру, зарості у водному потоці, вивчаються у літературі під назвою «сапору» [1]. Дослідження мотивуються екологічними проблемами [1], розрахунками бризкальних охолоджувачів [9] та інших технічних систем [8; 11].

Мета роботи – отримання попередніх уявлень про якісні риси потоку, що досліджується, з використанням математичної моделі ЛПШ.

Математична модель ЛПШ, апробована на задачі, досліджується теоретично з найпростішим припущенням щодо режиму течії (ламінарний).

Постановка задачі

Нехай однорідний потік в'язкої нестисливої рідини рухається вздовж циліндричного каналу радіуса R із ЛПШ, елементи якої розміщуються в деякому уявному циліндрі радіуса $h < R$, вісь якого збігається з віссю каналу (рис. 1).

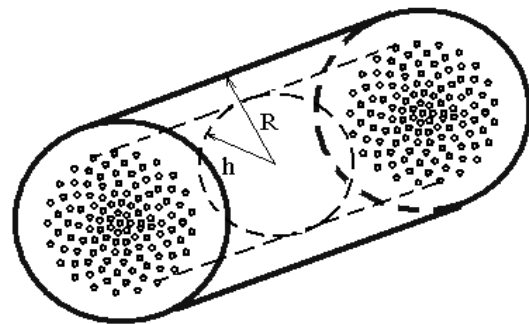


Рис. 1. Схема труби з ЛПШ (пористим шаром) радіусом $h < R$ в околі осі

Шар перешкод, ЛПШ, створюється малими нерухомими сферами, рівномірно розподіленими в об'ємі уявного циліндра радіусом h . Концентрація перешкод є сталою: $n(r, \varphi) = \text{const}$. Задача полягає в знаходженні характеристик ламінарного потоку в трубі з такою однорідною ЛПШ в околі осі.

Неможливо задовольнити умову прилипання на поверхні кожної з численних сфер, та й потреби знати в деталях рух рідини в околі кожної з них немає. Тому застосовують «феноменологічний» опис проникного середовища в області $0 \leq r \leq h$, тобто ЛПШ, замінюючи його розподіленою локальною (об'ємною) силою від перешкод на рідину $f(r, U)$, що дорівнює нулю в інших частинах потоку в трубі. Цю силу беремо як лінійну [4–7]:

$$f = k\rho nU,$$

де k – коефіцієнт пропорційності;

ρ – щільність рідини;

U – поздовжня швидкість рідини, яка залежить лише від радіусу r .

Можлива й квадратична залежність [10].

Математична постановка задачі для таких умов течії рідини є аналогічною тій, яку було розглянуто в роботах про ЛПШ біля стінок [1–7; 9]. Невеличка відмінність полягає у тому, який вигляд матиме другий доданок у правій частині рівняння

$$\frac{1}{r} \frac{d(r\tau)}{dr} = p' + \begin{cases} k\rho n U(r), & 0 \leq r \leq h; \\ 0, & h < r \leq R, \end{cases} \quad (1)$$

де τ – тертя (ламінарне) між шарами рідини:

$$\tau = \mu \frac{dU}{dr};$$

μ – в'язкість рідини;

p' – поздовжній градієнт тиску, що рухає рідину в трубі.

Очевидно, що мають виконуватися граничні умови прилипання на стінці $r=1$ та симетрії на осі $r=0$, тобто

$$\begin{aligned} r=1, \quad U=0; \\ r=0, \quad \tau=0. \end{aligned} \quad (2)$$

На спільній границі $r=h$ мають виконуватись очевидні умови спряження:

$$\begin{aligned} U(h-0) &= U(h+0); \\ \tau(h-0) &= \tau(h+0). \end{aligned} \quad (3)$$

Задача (1), (2) є узагальненням класичної задачі про ламинарний потік крізь «звичайну» трубу без ЛПШ [12;13] і переходить у неї за умови $h=0$ або $n=0$. Для неї відомо та легко отримати з задачі (1), (2) за названих умов найбільшу швидкість у трубі (на осі $r=0$) та тертя на стінці:

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{4\mu} p' R^2; \\ \tau_w &= -\frac{1}{2} p' R. \end{aligned}$$

Знак « \rightarrow » береться тому, що градієнт тиску від'ємний:

$$p' = (p_2 - p_1) / L_x < 0.$$

Такий потік беремо за еталонний, названі величини – за масштаби.

У безрозмірних змінних [4–6]

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \frac{r}{R}, \\ \bar{U} &= \frac{U}{W}, \\ \bar{\tau} &= \frac{\tau}{\tau_w} \end{aligned}$$

вихідне рівняння (1) набуває безрозмірного вигляду:

$$\frac{1}{\bar{r}} \frac{d(\bar{r}\bar{\tau})}{d\bar{r}} = -2 + \begin{cases} \frac{1}{2} A \bar{U}, & \bar{r} \in [0, \bar{h}]; \\ 0, & \bar{r} \in (\bar{h}, 1], \end{cases} \quad (4)$$

де A – безрозмірна щільність ЛПШ [4–6]:

$$A = \frac{knR^2}{\nu}.$$

Граничні умови та умови спряження для рівняння (4) будуть аналогічні умовам (2), (3). Умову (3) доречно записати у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{z} = \bar{h}, \quad \bar{U}(\bar{h}-0) = U(\bar{h}+0) = \bar{U}_h; \\ \bar{\tau}(\bar{h}-0) = \bar{\tau}(\bar{h}+0) = \bar{\tau}_h. \end{aligned} \quad (5)$$

Поки невідомі значення швидкості ковзання \bar{U}_h та тертя $\bar{\tau}_h$, що відповідають рівню ЛПШ, $\bar{r} = \bar{h}$ підлягають знаходженню. Причому безрозмірне тертя визначатиметься за формулою

$$\bar{\tau}(\bar{r}) = \frac{1}{2} \frac{d\bar{U}}{d\bar{r}}. \quad (6)$$

Надалі риску як ознаку безрозмірності опускатимемо.

Швидкість і тертя

Розв'язок задачі (2), (4), (5), (6) будемо шукати окремо в середині ЛПШ $r \in [0, h]$ і зовні $r \in [h, 1]$, а потім об'єднаємо в єдиний профіль на основі умов спряження.

В області без ЛПШ

$$r \in [h, 1]$$

рівняння (4) має вигляд:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right) = -4. \quad (7)$$

Інтегруючи рівняння (7), отримуємо загальні вирази для розподілів тертя і швидкості між стінками труби і ЛПШ:

$$\tau(r) = -r + \frac{C_1}{r};$$

$$U(r) = -r^2 + 2C_1 \ln r + C_2,$$

де C_1, C_2 – деякі константи, значення яких знайдемо з граничної умови прилипання (2) та першої з умов спряження (5):

$$\begin{aligned} U(1) &= 0; \\ U(h) &= U_h. \end{aligned} \quad (8)$$

Звідси одержуємо

$$C_1 = \frac{U_h + h^2 - 1}{2 \ln h}; \quad C_2 = 1.$$

Остаточно маємо формули для профілю швидкості і тертя зовні від ЛПШ:

$$U(r) = 1 - r^2 + \frac{U_h + h^2 - 1}{\ln h} \ln r;$$

$$\tau(r) = \frac{U_h + h^2 - 1}{2r \ln h} - 2r.$$

Незвичним і несподіваним порівняно зі «звичайною» задачею [9] є те, що розподіл швидкості в зоні, вільної від ЛПШ, не є параболічним, а розподіл тертя – не є лінійним.

Отримані профілі можна було б побудувати, якби значення U_h було відоме. Задля цього далі використаємо значення похідної $\frac{dU}{dr}$ при $r = h + 0$:

$$\left. \frac{dU}{dr} \right|_{r=h+0} = -2h + \frac{U_h + h^2 - 1}{h \ln h}. \quad (9)$$

В області ЛПШ $\bar{r} \in [0; \bar{h}]$ для опису потоку рідини потрібно рівняння (4) розглянути в такому вигляді:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right) = -4r + ArU. \quad (10)$$

Для даного випадку граничними умовами будуть умова симетрії з виразу (2) та умова з рівняння (8) з невідомим U_h . Тоді автоматично буде задоволена перша з умов спряження (3).

Аналітичний розв'язок поставленої задачі можна знайти засобами MATLAB [14; 15]. Для цього в командному вікні середовища системи введемо команди:

```
>> syms U h t A Uh
>> U = dsolve('t*D2U + DU + 4*t - A*t*U = 0', ...
'DU(0)=0', 'U(h)=Uh').
```

У результаті отримаємо нескладний аналітичний вираз для швидкості, що містить функції Бесселя першого роду та параметри ЛПШ (висоту h , щільність A):

$$U = \text{besselj}(0, (-A)^{(1/2)*t}) * (-4 + Uh*A) / \text{besselj}(0, (-A)^{(1/2)*h}) / A + 4/A, \quad (11)$$

де параметр t відповідає незалежній змінній r у нашій задачі (10). Вираз (11) на мові звичайної математики запишемо так:

$$U(r) = \left(U_h - \frac{4}{A} \right) \frac{J_0(\sqrt{-A} \cdot r)}{J_0 \sqrt{-A} \cdot h} + \frac{4}{A}.$$

Тепер отримаємо формулу для похідної від швидкості. Для функцій Бесселя відомо зокрема

$$\frac{dJ_0(r)}{dr} = -J_1(r),$$

звідки

$$\frac{dU}{dr} = -\sqrt{-A} \left(U_h - \frac{4}{A} \right) \frac{J_1(\sqrt{-A} \cdot r)}{J_0 \sqrt{-A} \cdot h}. \quad (12)$$

З урахуванням формули (6) отримуємо розподіл тертя. Таку саму формулу можна отримати й диференціюванням у MATLAB.

Для визначення швидкості ковзання U_h з виразу (12) отримуємо похідну швидкості на границі ЛПШ $r = h - 0$

та порівнюємо її з виразом (9). Знаходимо невизначену раніше U_h :

$$U_h = \frac{2Ah^2 \ln h J_0 + 4\sqrt{-A} h \ln h J_1 + (1 - h^2) A J_0}{A(\sqrt{-A} h \ln h J_1 + J_0)}. \quad (13)$$

Таким чином, остаточний алгоритм виглядає так:

- за заданими параметрами ЛПШ A і h знаходимо швидкість ковзання (13);
- будуюмо профілі швидкості і тертя:

$$U = \begin{cases} \left(U_h - \frac{4}{A} \right) \frac{J_0(\sqrt{-A} \cdot r)}{J_0 \sqrt{-A} \cdot h} + \frac{4}{A}, & r \in [0, h]; \\ 1 - r^2 + (U_h + h^2 - 1) \frac{\ln r}{\ln h}, & r \in (h, 1]; \end{cases}$$

$$\tau = \begin{cases} \sqrt{-A} \left(U_h - \frac{4}{A} \right) \frac{J_1(\sqrt{-A} \cdot r)}{2J_0\sqrt{-A} \cdot h}, & r \in [0, h]; \\ r - \frac{U_h + h^2 - 1}{r \ln h}, & r \in (h, 1). \end{cases}$$

Задача розв'язана.

Отримані розподіли швидкості та тертя в трубі з ЛПШ на осі демонструє рис. 2, а, б.

Фізичні поля потоку суттєво відрізняються від тих, що отримували для ЛПШ біля стінок круглої труби [12; 13]:

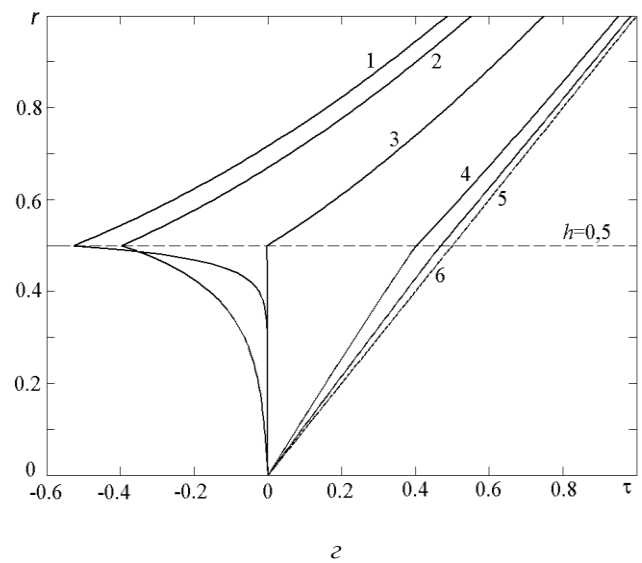
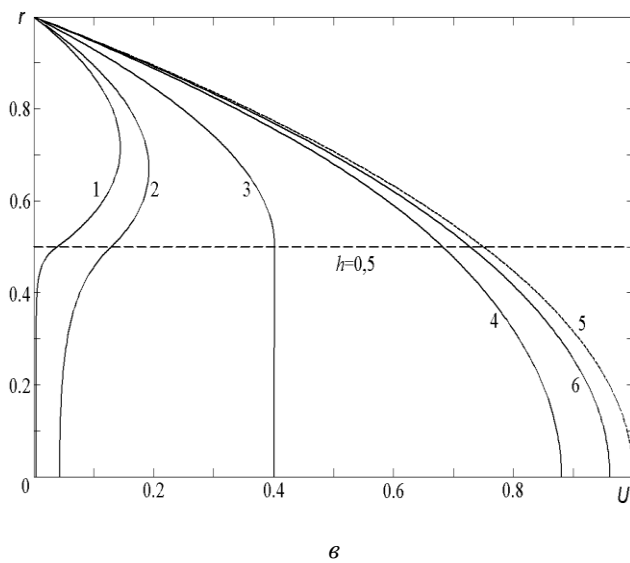
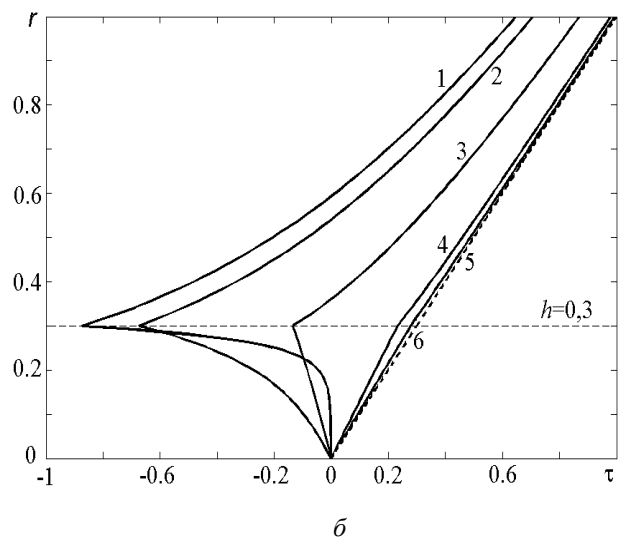
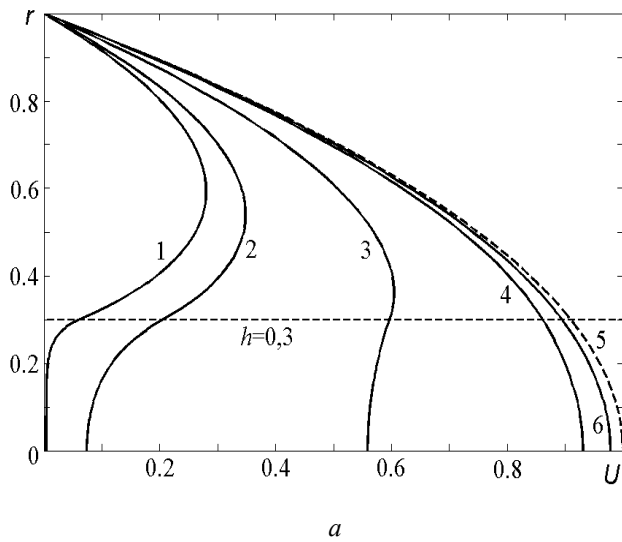


Рис. 2. Розподіли характеристик потоку в трубі з ЛПШ (швидкість – а, в; тертя – б, з) в околі осі залежно від щільності ЛПШ $A = \text{var}$:

- а, б – $h = 0,3$;
- в, з – $h = 0,5$;
- 1 – $A = 1000$;
- 2 – 100;
- 3 – 10;
- 4 – 1;
- 5 – 0,3;
- 6 – $A = 0$

1) профілі швидкості немонотонні, від стінок у напрямку центру труби швидкість збільшується, потік зустрічає опір середовища ЛПШ у центрі, тому швидкість у ньому зменшується тим сильніше, чим більше щільність A ;

2) для малих щільностей (криві 4, 5) розподіли $U(r)$, $\tau(r)$ мало відрізняються від таких для потоку без ЛПШ ($A=0$, криві 6), тобто $U(r)$ лишається випуклим і близьким до параболічного профілю, а $\tau(r)$ – близьким до лінійного розподілу;

3) ЛПШ з великою щільністю потік деформується суттєво, швидкість в ЛПШ стає набагато меншою, аніж зовні від неї, і на $U(r)$ з'являється незвичний для внутрішніх потоків максимум (розподіли 3, 2, 1);

4) розподіли тертя відображають трансформацію швидкості згідно з формулою (6), і тому $\tau(r)$ може приймати навіть від'ємні значення, отже, потік кінетичної енергії від швидких шарів потоку до повільних спрямований у цій частині не від осі до стінки, а у зворотному напрямку;

5) розподіли 1 відповідають дуже великій щільності $A=1000$, за якої рух у середині ЛПШ припиняється майже зовсім, тертя за таких умов дорівнює нулю в центрі труби та близько до $\tau(h)=-1$ на границі ЛПШ (нібито від однієї твердої стінки до іншої).

Розподіли на рис. 2, *в*, *г* отримано за тих самих умов, але для більш високої ЛПШ $\bar{h}=0,5$.

Порівняння кривих з однаковим номером свідчить про вплив висоти ЛПШ за умови тієї ж щільності A : швидкість падає сильніше, розподіли тертя деформуються швидше. Швидкість у середині ЛПШ виявляється рівномірною, тому тертя $\tau \equiv 0$.

Гідрравлічний опір

Гідрравлічний опір труби – часто головне, що цікавить інженера. З'ясуємо, як ЛПШ в потоці впливає на коефіцієнт гідрравлічного опору λ .

За умов відсутності ЛПШ у трубі [12; 13]

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}$$

У роботах [4; 5] це співвідношення узагальнено на випадок наявності ЛПШ:

$$\lambda \text{Re} = \frac{16}{U_{\text{cp}}},$$

де безрозмірна середня швидкість у трубі стає функцією параметрів ЛПШ:

$$\bar{U}_{\text{cp}} = \Phi(A, \bar{h}).$$

З урахуванням того, що саме число Рейнольдса ϵ

$$\text{Re} = \frac{2U_{\text{cp}}R}{\nu},$$

за обчисленими полями швидкості можемо розрахувати

$$\lambda = \lambda(A, \bar{h}).$$

Виконання граничного переходу до відомого випадку труби без ЛПШ видно з рис. 3.

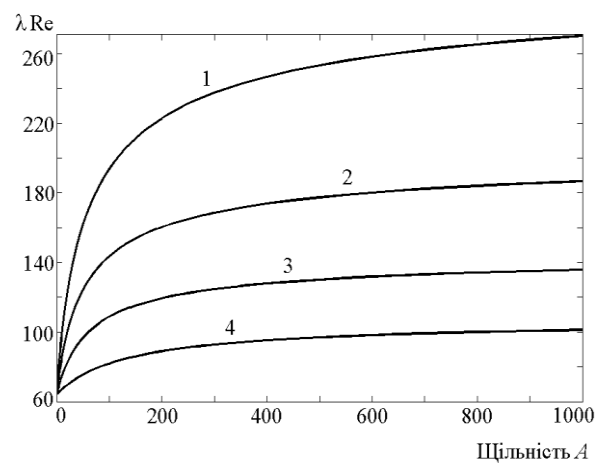


Рис. 3. Залежність опору труби з ЛПШ на осі від її параметрів – висоти ЛПШ \bar{h} і щільності A :

1 – $\bar{h} = 0,4$;

2 – $\bar{h} = 0,3$;

3 – $\bar{h} = 0,2$;

4 – $\bar{h} = 0,1$

За умови $A \rightarrow 0$ коефіцієнт наближається до $\lambda = 64$ для будь-якої висоти ЛПШ \bar{h} .

Зростання щільності A веде до збільшення опору. Це зростання більше для високої ЛПШ.

Висновки

Поля швидкості $U(r)$, тертя $\tau(r)$ та інтегральна величина гідрравлічного опору поведуть себе фізично зрозуміло залежно від параметрів A і \bar{h} . Це частково обґрунтовує запропоновану математичну модель потоку через трубу з легкопористою вставкою вздовж осі в центрі. Більш детальне обґрунтування отримуємо порівнянням із результатами інших авторів [1; 8], моделюванням турбулентного режиму потоку [10], аналізом експерименту [11].

Література

1. *Flow and Transport Processes with Complex Obstructions: Applications to Cities, Vegetative Canopies, and Industry* / Ye.A. Gayev, J.C.R. Hunt editors // NATO Science Series. – Springer Publ., 2006. – 236.– P. 350.
2. Гаєв Е.А. Длина входного участка канала с линейной легкопроницаемой шероховатостью / Е.А. Гаєв, С.З. Шихалиев // Прикладна гідромеханіка. – 2003. – Вип. 5 (77). – С. 13–19.
3. Гаєв Е.А. Ламинарное стационарное вихреобразование за пористой вставкой в плоском канале / Е.А. Гаєв, С.З. Шихалиев, Е.А. Гаєва // Прикладна гідромеханіка. – 2008. – Т. 3, № 10 (82). – С. 40–50.
4. Гаєв Є.О. Одновимірна ламінарна течія через круглу трубу з легкопроникнутою шорсткістю / Є.О. Гаєв, О.М. Бердник // Промислова гідравліка і пневматика. – 2008. – № 4 (22). – С. 34–38.
5. Гаєв Е.А. Моделирование стабилизированного потока вязкой жидкости в некруглых каналах с легкопроницаемой шероховатостью / Е.А. Гаєв, О.М. Бердник // Прикладна гідромеханіка. – 2011. – Т. 2, № 13 (85). – С. 3–16.
6. Гаєв Е.А. Алгебраическая модель турбулентности для трубы с легкопроницаемой шероховатостью на стенках / Е.А. Гаєв, О.М. Бердник // Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях. – Х.: ХНУ им. Каразина, 2011. – С. 85–95.
7. Гаєв Е.А. Аналитическая модель стабилизированного вязкого течения, закрученного решетчатым ротором / Е.А. Гаєв, Ю.Н. Савченко, О.М. Бердник // Матеріали III міжнар. наук. конф. «Прикладні проблеми аерогідромеханіки та тепломасопереносу». – Дніпропетровськ: ДНУ, 2010. – С. 64–66.
8. Мочалін Є.В. Гідродинаміка закрученого потоку навколо обертового проникного циліндра і вдосконалення ротаційних фільтрів механічної очистки рідин: дис. ... д-ра техн. наук / Є.В. Мочалін. – НТУУ «КПІ». – К., 2009.
9. Гаєв Є.О. Модели легкопроницаемой шероховатости для задач гидромеханики и теплофизики: дис. ... д-ра техн. наук / Є.О. Гаєв. – ІГМ НАН України. – К., 2001. – 345 с.
10. Гаєв Е.А. Сравнительный анализ алгебраических моделей турбулентности для легкопроницаемой шероховатости в каналах. 1. Квадратичная ЛПШ / Е.А. Гаєв // Прикладна гідромеханіка (у друку).
11. Гаєв Е.А. Обработка и анализ экспериментов с легкопроницаемой шероховатостью / Е.А. Гаєв // Прикладна гідромеханіка (у друку).
12. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1973. – 847 с.
13. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М.: Наука, 1969. – 744 с.
14. Гаєв Є.О. Універсальний математичний пакет MatLab і типові задачі обчислювальної математики: навч. посіб. / Є.О. Гаєв, Б.М. Нестеренко. – К.: НАУ, 2004. – 176 с.
15. Gayev Ye.A. MATLAB for Math and Programming. Textbook / Ye.A. Gayev, B.N. Nesterenko. – Запоріжжя: Поліграф, 2006. – 101 с.

Стаття надійшла до редакції 20.06.2012.