

УДК 539.386 (045)

С.М. Талах, к.т.н, доц.
К.І. Козловець, студ.

РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНИХ СТРИЖНЕВИХ СИСТЕМ З УРАХУВАННЯМ ДЕФОРМАЦІЙ ЗСУВУ

Національний авіаційний університет
E-mail: svetlanatalah@gmail.com

Виконано розрахунок статично невизначеної рами з урахуванням деформації зсуву. Отримано функціональні співвідношення внутрішніх зусиль і деформацій за параметром зсуву. Показано межі інтервалів впливу коефіцієнту зсуву для трансotropних матеріалів. Запропоновано деякі рекомендації щодо використання низькомодульних матеріалів.

Made the calculation of statically indeterminate frame, taking into account shear deformation and derived functional relationships of internal stress and strain on the shear parameter and shown the limits of the intervals effect of coefficient of shear transotropic materials, and also indicated some recommendations for the use of low-modulus materials.

Выполнен расчет статически неопределенной рамы с учетом деформации сдвига. Получены функциональные соотношения внутренних усилий и деформаций по параметру сдвига. Показаны границы интервалов влияния коэффициента сдвига трансotropных материалов. Предложены некоторые рекомендации по использованию низко модульных материалов.

Постановка проблеми

У прикладних задачах будівельної механіки зазвичай розглядаються пружні однорідні ізотропні матеріали (тіла).

У сучасній техніці крім ізотропних широко використовують конструктивно-анізотропні тіла. Майже всі реальні матеріали анізотропні й більшою або меншою мірою неоднорідні, в тому числі й вироби зі сталі залежно від технології виготовлення та форми лиття і прокату.

Звернемо увагу на конструктивні полімерні вироби з анізотропних матеріалів, які будуть зазнавати силових впливів:

- жорсткі склопластики;
- текстоліти;
- деревинно-шаруваті;
- полістирольні плити.

Полімерні матеріали володіють такими позитивними якостями:

- низькою теплопровідністю;
- малою питомою вагою;
- високою міцністю;

– високим коефіцієнтом конструктивності, тобто відношенням границі міцності до об'ємної маси;

– хімічною стійкістю;

– задовільною технологічністю.

Використання анізотропних матеріалів дозволяє більш раціонально розмішувати матеріал у конструкції. Це досягається суміщенням напряму великої міцності або жорсткості з напрямом найбільшими напруженнями або переміщеннями, наприклад, використанням ортотропних плит у мостобудуванні.

У галузях промислового будівництва, літакобудування, суднобудування полімерні матеріали використовують для виготовлення конструкцій у вигляді оболонок, пластин та стрижнів. Ці конструкції здебільшого є тонкостінними (більш економічні).

Тонкостінні стрижні застосовують як шпангоути та стрингери в панелях, пластинах та оболонках несучих елементів будівель і споруд.

Аналіз досліджень

Дослідження авторів праць [1; 2], показали, що врахування деформацій зсуву істотно впливає на переміщення, особливо в статично невизначених системах, і майже не впливає на кути повороту жорстких кутових елементів у рамах.

Тонкостінні стрижні належать саме до статично невизначених механічних систем.

Мета робота – на прикладі врахування зсувних деформацій для статично невизначеної рами отримати функціональні співвідношення внутрішніх зусиль і деформацій за параметром зсуву для транстропних матеріалів.

Використання низькомодульних матеріалів

Однорідне пружне анізотропне тіло у загальному випадку відповідно до узагальненого закону Гука [3] характеризується 21 пружною незалежною сталою a_{ji} або A_{ij} .

Симетрія внутрішньої будови матеріалу зумовлює до симетрії пружності. У тілі з'являються симетричні напрямлення (конструктивно заплановані), вздовж яких пружні властивості однакові.

Для таких матеріалів узагальнений закон Гука спрощується, кількість незалежних констант зменшується. Так, для тіла з однією площиною симетрії їх кількість буде становити 13. Такі тіла називають неортотропними. Коли в кожній точці тіла є три взаємно перпендикулярні площини пружної симетрії, кількість незалежних пружних сталих дорівнює дев'яти. Такі тіла називають ортотропними [3].

Якщо в кожній точці тіла є площина, в якій пружні властивості у всіх напрямках однакові, а відрізняються тільки в ортогональному напрямі відносно цієї площини ізотропії, то для таких тіл кількість незалежних пружних констант дорівнює п'яти. Такі тіла називають трансверсально ізотропними, або транстропними.

У випадку повної симетрії, коли в кожній точці тіла будь-яка площина є площиною пружної симетрії, кількість пружних незалежних констант зводиться до трьох:

- модуль пружності Юнга E ;
- модуль зсуву G ;
- коефіцієнт Пуассона ν .

Такі тіла називають ізотропними.

Прикладами ортотропних матеріалів є:

- деревина;
- фанера;
- деревинно-шаруватий пластик;
- текстоліт;
- склопластик типу СВМ.

Прикладом транстропного тіла може бути однонаправлений склопластик, якщо вважати, що нитки рівномірно розподілені в перерізі.

Пружні сталі ортотропного матеріалу в головних напрямках (коефіцієнти поздовжніх деформацій) визначаємо, виконавши один з дослідів на розтягання, стиснення або згинання. При цьому як вихідні рівняння випробувань взято вирази узагальненого закону Гука для ортотропного матеріалу [3].

Модулі пружності, визначені у результаті окремих досліджень, майже збігаються, тобто метод визначення пружних сталих різномодульних матеріалів із дослідів на згинання можна використати в лабораторній практиці [1].

Коефіцієнти поперечних деформацій ортотропних матеріалів можна також визначати в ході випробувань на розтягання, стиснення та згинання, вибравши з досліджуваного матеріалу три зразки у вигляді призм прямокутного перерізу, які орієнтовані за головними напрямками базису ортотропії.

Коефіцієнти Пуассона визначають як відношення поперечної відносної деформації до поздовжньої [1].

В окремих випадках анізотропії (ізотропного, поперечно ізотропного (трансверсального), ортотропного або з однією площиною пружної симетрії матеріалу зразка) гіпотеза плоских перерізів за чистого згинання є правдивою.

Проте в загальному випадку анізотропії ця гіпотеза стає неправдивою і вказані способи визначення пружних властивостей матеріалів використовувати не можна.

Для визначення коефіцієнтів зсуву з досліджуваного ортотропного матеріалу виготовляють три діагональні зразки прямокутного перерізу. Вісь зразка першого типу (вздовж першої головної осі ортотропії) [1] паралельна головній площині пружності і водночас становить кут 45° до головного напрямку пружності матеріалу.

З досліду розтягання (стиснення) цього зразка першого типу визначають коефіцієнти поздовжніх і поперечних деформацій, а сталу зсуву у площині 1–2 обчислюють як їх подвійну різницю, що еквівалентна формулі зсуву для цієї площини:

$$G_{12} = \frac{E_{45}}{2(1 + \nu_{45})},$$

де E_{45} , ν_{45} – модулі Юнга та коефіцієнт Пуассона, визначені в результаті дослідження зразка першого типу.

Аналогічно під час дослідження зразків II і III типів (вздовж 2-ї та 3-ї головних осей ортотропії) визначають коефіцієнти деформації та модулі зсуву відповідно a_{44} (G_{22}) та a_{55} (G_{12}).

У будівельній механіці пружні переміщення стрижня та стрижневих систем частіше визначають способом Максвелла–Мора, в разі якого будь-яке (узагальнене) переміщення δ_{ij} за напрямом i , виключене причиною j , виражається віртуальною роботою внутрішніх сил.

Загальна формула для тонкостінного стрижня містить 30 інтегралів. П'ять із них визначають переміщення тонкостінного стрижня без урахування деформацій зсуву, решта – від зсуву.

Для перерізу, симетричного відносно обох головних осей, із десяти коефіцієнтів зсуву $\mu_{ij} = \mu_{ji}$ шість дорівнюють нулю.

Коефіцієнти зсуву, як правило, обчислюють відносно головних координат x , y , w і залежать від форми і розмірів перерізу.

Для прямокутного перерізу коефіцієнт зсуву $\mu_{xx} = 1,2$.

Для симетричного двотавра з однорідного матеріалу, утвореного з вузьких прямокутників (рис. 1), коефіцієнт зсуву становить:

$$\mu_{xx} = \frac{Fb_2^2}{120I_x^2} \left[\frac{5b_1^3h_1^2}{h_1} + \frac{b_2}{h_2} (30b_1^2h_1^2 + 10b_1h_2 \times \right.$$

$$\left. \times h_1h_2 + b_2^2h_2^2) \right];$$

$$\mu_{yy} = \frac{3F}{5b_1h_1};$$

$$\mu_{ww} = \frac{2,4F^2}{h_1b_1b_2^2}.$$

Під час проектування комбінованих великопрогонових оболонкових систем складної конфігурації для забезпечення місцевої стійкості тонколистових фрагментів широко використовують ребра (шпангоути, стрингери) вставки та інші стабілізуючі елементи з комбінації тонкостінних прокатних і гнутих (закритих і відкритих перерізів) профілів [4].

У загальній дискретній моделі та розрахунковій схемі цих комбінованих механічних систем названі тонкостінні стрижневі елементи зводяться до еквівалентних прямокутних перерізів з адекватними поздовжньою та згинальною жорсткостями.

У результаті розрахунків на міцність комбінованої оболонкової конструкції на основі числового ітераційного процесу нелінійного деформування отримуємо інтегральне внутрішнє зусилля (поздовжні та поперечні сили, поперечні, тангенціальні, поздовжні та крутні моменти), що діють в елементах ребер та стабілізуючих елементах комбінованої механічної системи. Проте внутрішні напруження в еквівалентних дискретних системах, що відповідають інтегральним внутрішнім зусиллям, абсолютно не відповідають дійсним нормальним та зсувним напруженням у дійсних профілях реальних тонкостінних стрижневих елементів.

Для забезпечення обмежень за міцністю та деформативністю для перерізів із максимальними інтегральними зусиллями необхідно розв'язувати задачу статичної невизначених тонкостінних стрижнів, підставляючи до формули Максвелла–Мора з урахуванням зсувних інтегралів дійсні внутрішні зусилля з визначенням коефіцієнтів зсуву, і, як наслідок, дійсних деформацій та зусиль.

У зв'язку з цим проведено дослідження для статично невизначених рам із тонкостінних профілів або для прямокутних і двотаврових перерізів із низькомодульних матеріалів, наприклад, зі склеєної деревини.

Розрахунок рами з урахуванням зсуву

Розрахунки стрижня рами ab (рис. 2) з урахуванням деформації зсуву в загальному випадку завантаження, що виконав професор М.В. Корноухов, мають вигляд [2]:

$$M_{ab} = -\frac{EI}{l}[(3\theta+1)\varphi_a + (3\theta-1)\varphi_b - 6\theta\varphi_{ab}] + M'_{ab},$$

$$Q_{ab} = -\frac{6EI\theta}{l^2}[\varphi_a + \varphi_b - 2\psi_{ab}] + Q'_{ab},$$

де

$$M'_{ab} = -\sum_{n=1}^n \frac{P_n b_n}{2} \left\{ \left[\left(3 - \frac{2b_n}{l} \right) \theta - 1 \right] \frac{b_n}{l} + 1 - \theta \right\} - \frac{ql^2}{12};$$

$$Q'_{ab} = -\sum_{n=1}^n \frac{P_n b_n}{l} \left\{ \left[\left(3 - \frac{2b_n}{l} \right) \theta - 1 \right] \frac{\theta b_n}{l} + 1 - \theta \right\} - \frac{ql}{2};$$

$$\psi_{ab} = \frac{\delta_{ab}}{l_{ab}};$$

$$\theta = \frac{1}{1 + \frac{12EI}{l^2 GF}};$$

$$F_1 = \frac{F}{\mu} = \frac{J^2}{\int_F \left(\frac{s}{b} \right)^2 dF};$$

$$\mu_I = \mu_{xx} = \frac{F}{F_1}.$$

Коефіцієнт зсуву залежить від форми та розмірів перерізу стрижня, наприклад:

$$\mu = 1, 2;$$

$$\mu_I = \frac{F_1}{F_{sm}}.$$

Для двотавра, складеного з вузьких прямокутників, коефіцієнт зсуву становить:

$$\mu = \frac{Fb_2^2}{I_x^2 \left[5b_1^2 h_1 + \frac{b_2}{h_2} (30b_1^2 h_1^2 + 10b_1 b_2 h_1 h_2 + b_2^2 h_2^2) \right]}.$$

Виконаємо розрахунок простої симетричної рами з косиметричним рівномірно-розподіленим навантаженням (рис. 3).

Розрахункова схема рами для такого косиметричного навантаження має два невідомі:

- кут повороту вузла φ ;
- кут перекоосу стояка ψ :

$$\psi = \frac{\delta}{H}.$$

Складемо систему рівнянь для рами

$$\begin{cases} M_{31} + M_{34} = 0 \\ Q_{13} + Q_{24} - \sum W = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Виразимо зусилля через невідомі:

$$M_{31} = -\frac{EI}{H}[(3\theta+1)\varphi_3 - 6\theta\psi_{31}] - \frac{qH^2}{12};$$

$$M_{34} = -\frac{EI}{l}[(3\theta+1)\varphi_3 + (3\theta-1)\varphi_4 - 0] + 0;$$

$$Q_{13} = -\frac{6EI\theta}{H^2}[0 + \varphi_3 - 2\psi_{13}] + \frac{qH}{2};$$

$$\sum W = -2qH;$$

$$Q_{24} = -\frac{6EI\theta}{H^2}[0 + \varphi_4 - 2\psi_{24}] + \frac{qH}{2};$$

$$\varphi \equiv \varphi_3 = \varphi_4;$$

$$\psi \equiv \psi_{31} = \psi_{24}.$$

Рівняння рівноваги (1) набудуть вигляду:

$$\begin{cases} -EI \left[3\theta \left(\frac{1}{H} + \frac{2}{l} \right) + \frac{1}{H} \right] \varphi + \frac{6EI}{H} \theta \varphi - \frac{qH^2}{12} = 0; \\ -\frac{12EI}{H^2} \theta \varphi + \frac{24EI}{H^2} \theta \psi - qH = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Розв'язавши систему (2), отримаємо:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{qH^2}{6EI \left(\frac{6\theta}{l} + \frac{1}{H} \right)}; \\ \psi &= \frac{qH^2}{24EI} \left(\frac{2l}{6\theta + \frac{l}{H}} + \frac{H}{\theta} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Для забезпечення достовірності отриманих результатів (3) виконаємо канонічний розв'язок заданої рами методом переміщень за значення $\theta = 1$ (без урахування зсуву) за алгоритмом, наведеним у праці [5], тобто виконуємо контрольну перевірку.

Аналізуючи отримані розв'язки, переконаємося, що їх результати повністю збігаються.

Визначимо моменти рами та побудуємо їх епюри (рис. 4):

$$\begin{aligned} M_{31} = M_{42} &= -\frac{EI}{H} \left[(3\theta+1) \frac{qH^2}{6EI \left(\frac{6\theta}{l} + \frac{1}{H} \right)} - \right. \\ &\quad \left. - 6\theta \frac{qH^2}{24EI} \left(\frac{2l}{6\theta + \frac{l}{H}} + \frac{H}{\theta} \right) \right] - \frac{qH^2}{12} = \frac{qH^3}{6H+l} \times \\ &\quad \times \left[1 + \frac{l}{6H} - \frac{l}{H \left(6\theta + \frac{l}{H} \right)} - \frac{l^2}{6H^2 \left(6\theta + \frac{l}{H} \right)} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{13} &= -\frac{EI}{H} \left[(3\theta-1) \frac{qH^2}{6EI \left(\frac{6\theta}{l} + \frac{1}{H} \right)} - \right. \\ &\quad \left. - 6\theta \frac{qH^2}{12EI \left(\frac{6\theta}{l} + \frac{1}{H} \right)} - \frac{qH^3}{4EI} \right] + \frac{qH^2}{12} = \\ &= \frac{qH^2}{3} + \frac{qHl}{6 \left(6\theta + \frac{l}{H} \right)}, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} M_{13} &= \frac{qH^2(4H+l)}{2(6H+l)} \left[\frac{2 \left(6 + \frac{l}{H} \right)}{3 \left(4 + \frac{l}{H} \right)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{l \left(6 + \frac{l}{H} \right)}{3H \left(6\theta + \frac{l}{H} \right) \left(4 + \frac{l}{H} \right)} \right]. \end{aligned}$$

Якщо $k = \frac{l}{H}$, отримаємо

$$M_{31} = M_{42} = \frac{qH^3}{6H+l} \left[1 - \frac{k(1-\theta)}{6\theta+k} \right];$$

$$Q_{24} = Q_{13} = qH;$$

$$Q_{42} = Q_{31} = 0.$$

$$M_{13} = \frac{qH^2(4H+l)}{2(6H+l)} \left[1 + \frac{2k(1-\theta)}{(4+k)(6\theta+k)} \right]. \quad (4)$$

Знаходимо значення перерізуючих сил та будуємо їх епюру (рис. 5):

$$Q_{13} = -\frac{6EI\theta}{H^2} \left[\frac{qH^2}{6EI \left(\frac{6\theta}{l} + \frac{1}{H} \right)} - \frac{qH^2}{6EI \left(\frac{6\theta}{l} + \frac{1}{H} \right)} - \frac{2qH^3}{24EI\theta} \right] + \frac{qH}{2} = qH;$$

$$Q_{31} = -\frac{6EI\theta}{H^2} [0 + \varphi - 2\psi] - \frac{qH}{2}.$$

Перша складова аналогічна Q_{13} і дорівнює $\frac{qH}{2}$, тому

$$Q_{13} = \frac{qH}{2} - \frac{qH}{2} = 0;$$

$$Q_{34} = -\frac{6EI\theta}{l^2} 2\varphi = -\frac{12EI\theta H^2}{l^2 6EI \left(\frac{6\theta}{l} + \frac{1}{H} \right)} = -\frac{2qH^2\theta}{l \left(\frac{6\theta}{l} + \frac{1}{H} \right)},$$

або

$$Q_{34} = -\frac{2qH^3}{6EI+l^2} \left[1 - \frac{k(1-\theta)}{6\theta+k} \right];$$

Для ще одної перевірки достовірності отриманих результатів раму розраховували і за методом сил без урахування зсуву за $\theta = 1$ і отримані епюри моментів та перерізуючих сил порівнювали відповідно з рис. 4 та 5.

Для дослідження впливу деформації зсуву на величини зусиль і переміщень у цій рамі побудуємо графіки значень найбільшого моменту M_{13} , поперечної сили Q_{34} та незалежного зміщення вузлів рами δ за різних значень θ , тобто графіки функцій:

$$M_{13} = f_1(\theta);$$

$$Q_{34} = f_2(\theta);$$

$$\delta = f_3(\theta).$$

Перетворимо формулу (4) до такого вигляду:

$$M_{13} = \frac{qH^2(4H+l)}{2(6H+l)} \eta_M(\theta),$$

де

$$\eta_M(\theta) = 1 + \frac{2k(1-\theta)}{(4+k)(6\theta+k)}.$$

Побудуємо графіки функції $\eta_M(\theta) = f(\theta)$

для різних значень k (рис. 6).

Аналогічно для поперечної сили отримаємо:

$$Q_{34} = -\frac{2qH^3}{6HI+l^2} \eta_Q(\theta),$$

де

$$\eta_Q(\theta) = 1 - \frac{k(1-\theta)}{6\theta+k}.$$

Графіки функції $\eta_Q = f(\theta)$ показано на рис. 7.

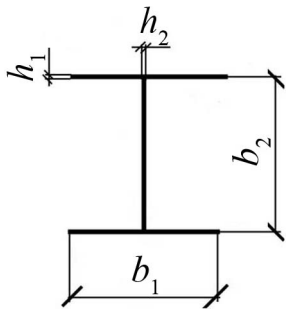


Рис. 1. Переріз двотавра

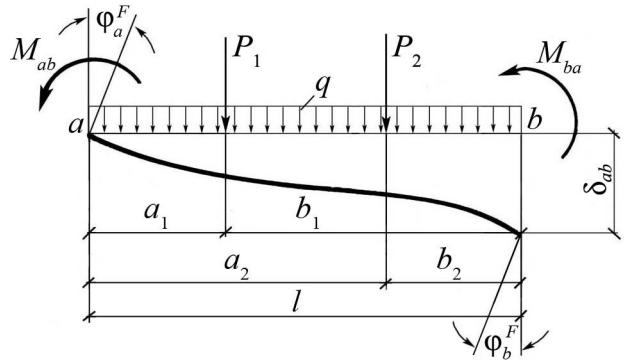


Рис. 2. Розрахункова схема стрижня \$ab\$

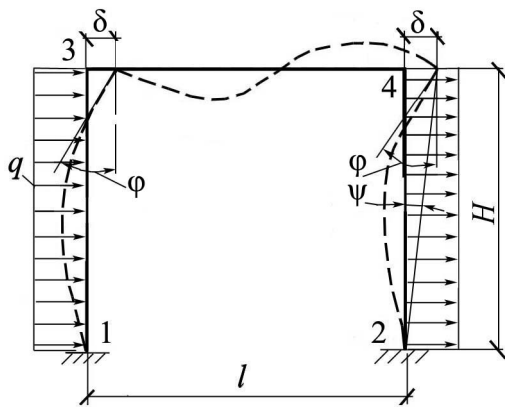


Рис. 3. Розрахункова схема рами

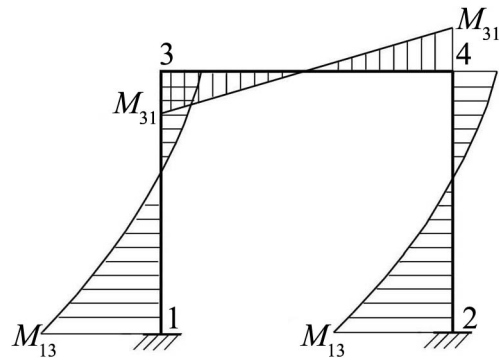


Рис. 4. Епюра моментів рами

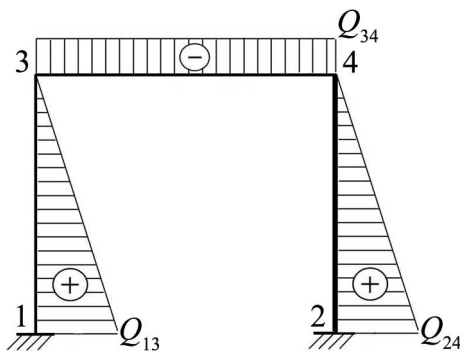


Рис. 5. Епюра перерізуючих сил

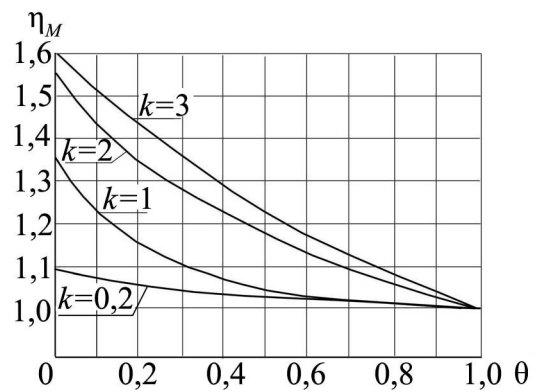
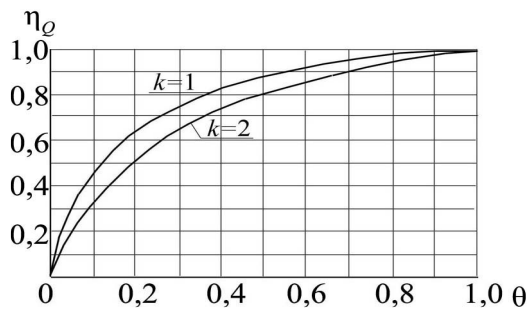


Рис. 6. Графіки функції \$\eta_M = f(\theta)\$ для різних значень \$k\$

Рис. 7. Графіки функції $\eta_\phi = f(\theta)$

Знаючи кут перекосу стояка ψ , знайдемо зміщення вузлів рами δ :

$$\delta_{13} = \frac{qH^3}{24EI} \left[\frac{2l}{6\theta + \frac{l}{H}} + \frac{H}{\theta} \right] = \frac{qH^4}{24EI} \times$$

$$\times \left[\frac{2\frac{l}{H}\theta + 6\theta + \frac{l}{H}}{\theta(6\theta + \frac{l}{H})} \right],$$

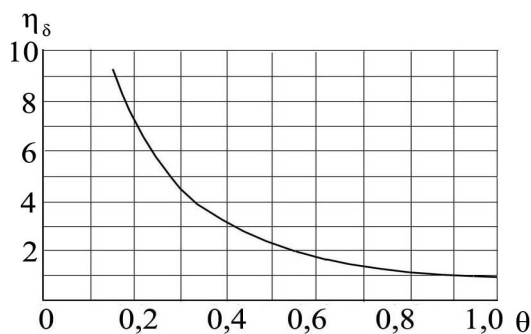
або

$$\delta = \frac{qH^4(2H+l)}{8EI(6H+l)} \eta_\delta(\theta),$$

де

$$\eta_\delta(\theta) = \frac{(2\theta+k)(6+k)}{\theta(6\theta+k)(2+k)}.$$

Обчислення функції η_δ виконуємо за $k=1$, оскільки за значень $k=2$ і $k=3$ графік майже не змінюється (рис. 8).

Рис. 8. Графік функції $\eta_\delta = f(\theta)$

Висновки

1. Деформації зсуву більшою мірою впливають на переміщення ніж на внутрішні зусилля.

2. Вплив деформації зсуву більше проявляється на низьких рамах за $k=3$, ніж на високих, тобто деформації зсуву пропорційні погонній жорсткості стрижневих елементів рами.

3. Деформації зсуву під час розрахунків рам необхідно враховувати (уточнювати величини внутрішніх зусиль під час розрахунків на міцність на величину більше 5%), коли для заданого стрижня маємо величину θ у межах 0,2 для низьких рам за $k=2-3$, або в межах $\theta 0,2-0,4$ за $k=1$, або в межах $\theta 0,2-0,8$ за $k=2-3$ і вище.

Отже, під час розрахунків рам на міцність деформації зсуву потрібно враховувати низькі рами, коли $\theta \leq 0,8$. Коли ж значення $\theta > 0,8$, розрахунки на міцність деформації зсуву можна не враховувати.

4. За рахунок деформації зсуву перерізуючі зусилля в незавантажених стрижнях рами зменшуються, причому швидше ніж збільшується момент у небезпечному перерізі рами.

5. Для уточнення зміщень рами під час розрахунків, особливо у разі використання тонкостінних стрижнів, коли значення $\theta \leq 0,75$, деформації зсуву необхідно враховувати для всіх високих і низьких рам за $k=0,2-3$.

Література

1. Семенов П.И. Расчет прочности и деформативности анизотропных тонкостенных стержней открытого профиля / П.И. Семенов. – К.: Вищ. шк., 1974. – 184 с.

2. Корноухов Н.В. Расчет сложных рам по методу перемещений с учетом деформаций сдвига и ширины стержней / Н.В. Корноухов // Науч. тр. КИСИ. – К.: КИСИ, 1959. – Вып.12. – С. 24–34.

3. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 415 с.

4. Цихановський В.К. Оптимізація форми і структури великопрогонових оболонкових систем з обмеженнями за міцністю / В.К. Цихановський, С.М. Козловець, Н.О. Костира // Промислове будівництво та інженерні споруди. – К.: ВАТ УкрНДПроектсталь-конструкція, 2009. – Вип. 3. – С. 6–10.

5. Баженов В.А. Будівельна механіка / В.А. Баженов, С.Я. Гранат, О.В. Шишов. – К.: КНУБА, 2000. – 584 с.