ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

УДК 371.01

Л.І. Нестеренко, викл.
М.М. Логвин, викл.
Л.М. Покидько, здобувач

ЗАСТОСУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРІЇ У ФІЗИЦІ

Національний авіаційний університет
E-mail: mila.list@yandex.ru

Розглянуто використання тригонометричних функцій та тригонометричних перетворень для розв'язанні задач з фізики. Наведено тригонометричні поняття, які використовують у різних сферах діяльності.

In the article it is considered using of trigonometric functions and trigonometric transformations for the decision of tasks from physics. The use of trigonometric concepts is considered in the different spheres of human activity.

Рассмотрено использование тригонометрических функций и тригонометрических превращений при решении задач физики. Приведены тригонометрические понятия, применяемые в разных сферах деятельности.

Вступ

Підготовка з математичних дисциплін дає змогу здобути необхідні знання та набути вміння, що сприяють формуванню світогляду, забезпечують можливість оволодіти комплексом професійно-орієнтованих дисциплін.

Математика має широкі можливості розвитку логічного мислення, просторових уявлень і уяви, алгоритмічної культури, формування вмінь встановлювати причинно-наслідкові зв'язки, обґрунтовувати твердження, моделювати ситуації.

Математичні методи та математичне моделювання застосовують для розв'язання практичних задач різних галузей науки, економіки, виробництва.

Особливу увагу привертає до себе тригонометрія – розділ математики, який використовує досягнення інших її розділів.

Тригонометрія виникла з практичних потреб людини. З її допомогою можна визначити відстань до недосяжних предметів, скласти карту місцевості тощо.

Аналіз досліджень і публікацій

Різним аспектам проблеми навчання тригонометричного матеріалу присвячено праці І.К. Андронова, І.В. Баумана, М.М. Бескіна, В.М. Брадіса, Л.І. Жогіної, Д.М. Маєргойза, С.І. Новосьолова, А.К. Окунєва, В.В. Пікан, В.В. Репєва, З.І. Слепкань, В.Г. Чиги-ріна [1–4].

Але математична підготовка має такі істотні недоліки:

– формалізація математичних знань;

– відсутність міжпредметних зв'язків тригонометрії з іншими дисциплінами природничого циклу;

– слабкі навички у використанні математичного апарату.

Постановка задачі

Тригонометрія має велике значення для розв'язанні багатьох практичних задач:

– знаходження поверхонь і об'ємів у геометрії;

– складання і розкладання сил у механіці;

– визначення недоступних віддалей у топографії, великих відстаней на поверхні Землі методом тріангуляції;

– астрономічні дослідження.

Мета роботи – аналіз тригонометричних функцій і перетворень під час розв'язування фізичних задач, а також зв'язку тригонометрії з питаннями коливальних рухів.

Коливальний рух і тригонометрія

Розвиток учення про коливальні рухи, звукові, світлові, електромагнітні хвилі привів до того, що одним з основних завдань тригонометрії стало вивчення та опис коливальних процесів [1].

Часто коливання, як вільні, так і вимушені, що відбуваються в реальних системах, мають форму гармонічних коливань або дуже близьку до неї.

Вивчення гармонічних коливань має велике значення, оскільки є модельним процесом для вивчення найбільш загальних процесів. Крім того, довільний періодичний процес можна подати як суперпозицію (накладання) гармонічних коливань. Під час їх вивчення застосовують різні способи зображення [2]:

– аналітичний;
– графічний;
– векторний.

Тригонометричним зображенням гармонічних коливань є рівняння

$$x = A\cos(\omega t + \alpha)$$

або

$$x = A\sin(\omega t + \alpha),$$

де A – амплітуда коливань;

ω – циклічна частота:

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

T – період;

α – початкова фаза коливань центра.

Під час вивчення закономірностей хвильових процесів особливу роль мають гармонічні хвилі:

– по-перше, згідно з гармонічним аналізом довільний складний хвильовий процес можна подати як суперпозицію гармонічних хвиль;

– по-друге, це найпростіші хвилі, їх вивчення дозволяє зрозуміти найбільш загальні властивості хвильових процесів.

Гармонічні хвилі є результатом поширення гармонічних коливань.

Точки середовища, що віддалені на відстань x, будуть виконувати коливання, які описує рівняння

$$\xi = A\cos(\omega(t - \Delta t) + t) =$$
$$= A\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) + \alpha\right), \qquad (1)$$

де ξ – зміщення точки від положення рівноваги.

Рівняння (1) описує рух довільної точки середовища в довільний момент часу t, тому воно є рівнянням хвильового процесу, рівнянням гармонічної хвилі.

Часто трапляються випадки, коли тіло одночасно бере участь у двох (або більше) коливаннях.

Розглянемо деякі із них.

1. Коливання здійснюються в одному напрямку:

– рівняння коливань першого тіла:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1);$$

– рівняння коливань другого тіла:

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2);$$

– умови:

$$T_1 = T_2,\ A_1 \neq A_2,\ \alpha_1 \neq \alpha_2;$$

– рівняння результуючих коливань:

$$x = x_1 + x_2 =$$
$$= A_1\cos(\omega t + \alpha_1) + A_2\cos(\omega t + \alpha_2)$$

або

$$x = A\cos(\omega t + \alpha);$$

– результуюча амплітуда за теоремою косинусів:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1);$$

– початкова фаза результуючих коливань:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}.$$

2. Коливання здійснюються у взаємно перпендикулярних напрямках:

– рівняння коливань першого тіла:

$x = A_1 \cos\omega t$;

– рівняння коливань другого тіла:

$y = A_2 \cos\omega t$.

Рівняння результатуючого коливання

$$y = \frac{A_1}{A_2} x. \qquad (2)$$

є рівнянням прямої, що проходить через початок координат.

Кут нахилу прямої до осі визначають зі співвідношення:

$$tg\alpha = \frac{A_1}{A_2}.$$

Тригонометричні функції в техніці

Найважливішим поняттям, що пов’язує елементарну й вищу математикою, є тангенс кута. На цій найпотрібнішій із тригонометричних функцій аналітичної геометрії, диференціального числення грунтуються розділи вищої математики та теоретичної фізики [3].

Тангенс використовують для технічних характеристик деяких приладів. Наприклад, втрати енергії в конденсаторі визначаються втратами в діелектрику і на його обкладинках.

Під час протікання змінного струму через конденсатор вектори напруги і струму зсунуті на кут

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \delta,$$

де δ – кут діелектричних втрат.

Якщо втрат $\delta = 0$ немає, то тангенс кута втрат визначається відношенням уявної і дійсної частин комплексної діелектричної проникності

$$\mathrm{tg}(\delta) = \frac{\varepsilon_{im}}{\varepsilon_{re}}$$

або відношенням активної потужності $P_а$ до реактивної $P_р$ за синусоїдального струму певної частоти

$$\mathrm{tg}(\delta) = \frac{P_а}{P_р}.$$

Обернена величина $\mathrm{tg}(\delta)$ називається добротністю конденсатора.

Термін «добротність і тангенс кута втрат» застосовують також для котушок індуктивності та трансформаторів [4].

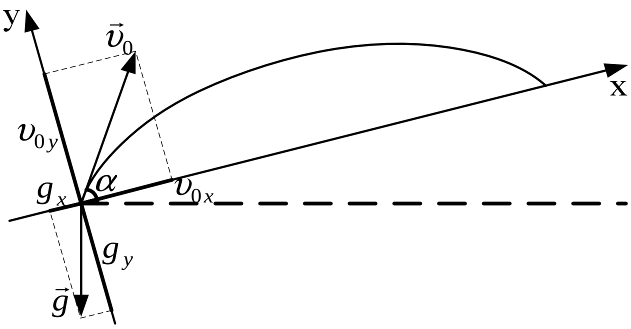
Використання тригонометричних функцій

Розглянемо застосування тригонометрії до розв’язування фізичних задач.

Задача. Визначити дальність польоту каменя, який кинули на схилі гори під кутом α до її поверхні. Початкова швидкість польоту каменя υ_0, кут нахилу гори до горизонту β. Опір повітря не враховувати.

Розв’язання. Траєкторією руху каменя є парабола. Криволінійний рух по параболі можна подати як результат накладання двох прямолінійних рухів: горизонтального (вздовж поверхні Землі) і вертикального (по нормалі до поверхні Землі).

Виберемо прямокутну систему координат з початком відліку в точці кидання каменя так, щоб осі $0x$ і $0y$ збігалися зі згаданими напрямками (див. рисунок).



Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту та поверхні землі

Спроектуємо на осі вектор початкової швидкості каменя та вектор прискорення вільного падіння. Маємо відповідні проекції на осі:

– вісь $0x$:

$g_x = -g\sin\beta$;

$\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha$;

– вісь 0*y*:

$$g_y = -g\cos\beta;$$

$$\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha.$$

Тепер рух розглядаємо як суперпозицію двох більш простіших:

– рівносповільнений рух уздовж поверхні Землі з прискоренням $g\sin\beta$;

– рівнозмінний рух вздовж нормалі до схилу гори з прискоренням $g\cos\beta$.

Запишемо рівняння руху для кожного з напрямків, урахувавши, що за час t руху вздовж осі 0*y* переміщення $S_y = 0$, а вздовж осі 0*x* $S_x = S$ переміщення дорівнює дальності польоту каменя. Маємо:

$$0 = \upsilon_0 \sin\alpha t - g\cos\beta \frac{t^2}{2}, \qquad (2)$$

$$S = \upsilon_0 \cos\alpha t - g\sin\beta \frac{t^2}{2}. \qquad (3)$$

Із рівняння (2) знаходимо час

$$t = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g\cos\beta}$$

і підставляємо в вираз (3). Матимемо

$$S = \upsilon_0 \cos\alpha \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g\cos\beta} - \frac{g\sin\beta 4\sin^2\alpha \upsilon_0^2}{2g^2\cos^2\beta} =$$

$$= \frac{\upsilon_0^2}{g\cos\beta}(\sin 2\alpha - \mathrm{tg}\beta \sin\alpha).$$

Перевіряємо одиниці вимірювання

$$[S] = \frac{\text{м}^2\text{с}^2}{\text{с}^2\text{м}} = \text{м}.$$

Відповідь:

$$S = \frac{\upsilon_0^2}{g\cos\beta}(\sin 2\alpha - \mathrm{tg}\beta \sin\alpha).$$

Аналізуючи наведене розв'язання задачі, бачимо використання означення тригонометричних функцій (проекції), тригонометричних перетворень, які реалізують міжпредметні зв'язки між фізикою та математикою.

Висновки

Розглянуто та проаналізовано використання тригонометрії до розв'язування фізичних задач. Використання математичного апарату для реалізації міжпредметних зв'язків фізики та математики веде до розуміння єдності світу та інтеграції наукових знань.

Розглянуто приклади зі зведення тригонометричних функцій до вигляду гармонічних коливань. Математика виступає як мова, яка необхідна для кодування інформації, що містить наука.

Перспективними напрямами подальшого дослідження є використання:

– міжпредметних зв'язків математики з фізикою;

– математичного апарату під час підготовки майбутніх інженерів у вищих технічних закладах.

Література

1. *Слепкань З.І.* Дидактика математики: проблеми і дослідження / З.І. Слепкань // Міжнар. зб. наук. робіт. – Донецьк: Фірма ТЕАН, 2001. – Вип.16. – С. 63 – 68.
2. *Хуторской А.В.* Методика личностно-ориентированого обучения / А.В. Хуторской. – М.: ВЛАДОС, 2005. – 383 с.
3. *Раков С.А.* Математична освіта: комплексний підхід з використанням ІКТ / С.А. Раков. – Х.: Факт, 2005. – 360 с.
4. *Профільне* навчання: теорія і практика: зб. наук. пр. за матеріалами метод. семінару АПН України / відпов. ред. О.Я. Савченко. – К.: Пед. преса, 2006. – 200 с.

Стаття надійшла до редакції 18.05.10.