УДК 62-192.003 (045)

С.В. Єгоров, асист.

ДОСЛІДЖЕННЯ СТАТИСТИЧНИХ РЯДІВ, ЯКІ СКЛАДАЮТЬСЯ З ВИПАДКОВИХ ЧИСЕЛ

Національний авіаційний університет
E-mail: ehorov@ukr.net

Проведено моделювання методом Монте-Карло випадкових вибірок із генеральної сукупності для визначення ймовірності безвідмовної роботи. Виконано аналіз статистичних рядів, що складаються з випадкових чисел.

Modeling by a method of Monte-Carlo casual samples from a general totality for the purpose of definition of probability of non-failure operation is spent. It is carried out the analysis of statistical numbers which consist of random numbers.

Проведено моделирование методом Монте-Карло случайных выборок из генеральной совокупности для определения вероятности безотказной работы. Выполнен анализ статистических рядов, состоящих из случайных чисел.

Постановка проблеми – визначення найбільш адекватної теоретичної функції розподілу для оцінки показників надійності типу ймовірності безвідмовної роботи на основі найбільш ефективних теоретичних функцій розподілу.

Аналіз досліджень і публікацій

У чинних стандартах та нормативних матеріалах рекомендуються плани та методики експериментальної оцінки ймовірності безвідмовної роботи об’єктів (систем) на основі використання різних теоретичних моделей відмов, що призводить до істотної розбіжності оцінок і різних обсягів випробувань.

У чинному стандарті [1] і монографії [2] зроблено спробу довести, що для оцінювання показників надійності найефективніше використовувати ймовірнісно-фізичні моделі відмов (DN та DM розподіли). DN розподіл використовують для аналізу надійності виробів з електронних компонентів, а DM розподіл – механічних.

Ці розподіли враховують фізичні процеси деградації на видміну від інших розподілів, наприклад, нормального, логарифмічно-нормального, розподілу Вейбулла [1, с. 20–39].

У монографії [2] докладніше описано, як використовувати DN та DM розподіли для розрахунків параметрів надійності.

Експериментальні методи передбачають проведення випробувань, в результаті яких отримують статистичний ряд, вирівняти який можна згідно з теорією ймовірності та математичною статистикою тільки за допомогою критеріїв згоди. Тому роботи [1–3] суперечать теорії ймовірності та математичній статистиці, а отже, результати робіт [1–3] є дуже сумнівними.

У монографії [2] зауважено, що час до відмови об’єкта є випадковою величиною.

Випадкова велична згідно з теорією ймовірності та математичною статистикою важко прогнозується і непередбачувана.

Отже, у разі застосування того чи іншого розподілу вноситься деяка похибка. У роботі [2] пояснено, як визначаються похибки, але без урахування похибки, яка з’являється у разі використання тієї чи іншої гіпотези для вирівнювання статистичного ряду. Неврахування похибки гіпотези може призвести до непередбачуваних наслідків.

Сучасна теорія ймовірності та математична статистика для вирівнювання статистичних рядів пропонує висунути декілька гіпотез і після цього перевірити їх правдоподібність.

ISSN 1813-1166. Вісник НАУ. 2010. №4

Критерії згоди дозволяють виявляти похибку, з урахуванням якої можна прийняти рішення. Якщо точність не задовольняє, то можна збільшити кількість випробувань.

Погодженість теоретичного та статистичного розподілів

Правдоподібність гіпотез (узгодженість теоретичного й статистичного розподілів) перевіряли за допомогою критерію згоди Пірсона χ^2 і ω^2. У результаті цього були використані такі закони розподілу й математичні вирази:

– досліджувана статистика:

$$\vartheta = \frac{r}{N},$$

де r – кількість зразків, що відмовили, за наробіток t з N зразків, поставлених на випробування;

– нормальний розподіл N:

$$\mathrm{F}(\vartheta) = \mathrm{N}(\vartheta, \hat{\mu}, \hat{\sigma}) = \Phi\left(\frac{\vartheta - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right),$$

де $\hat{\mu}$ – вибіркове середнє:

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vartheta_i}{n};$$

n – кількість вибірок;

ϑ_i – значення статистики для i - ї вибірки;

$\hat{\sigma}$ – середньоквадратичне відхилення:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{1-n}\sum_{i=1}^{n}\left(\vartheta_i - \hat{\mu}\right)^2};$$

Φ – нормований нормальний розподіл;

– DN розподіл (DN):

$$\mathrm{F}(\vartheta) = DN(\vartheta; \tilde{\mu}, \tilde{v}) = \Phi\left(\frac{\vartheta - \tilde{\mu}}{\tilde{v}\sqrt{\vartheta\tilde{\mu}}}\right) + e^{\frac{2}{v^2}}\Phi\left(-\frac{\vartheta + \tilde{\mu}}{\tilde{v}\sqrt{\vartheta\tilde{\mu}}}\right),$$

де $\tilde{\mu}$ – параметр масштабу розподілу досліджуваної статистики ϑ:

$$\tilde{\mu} = \hat{\mu};$$

$\tilde{v}$ – коефіцієнт варіації:

$$\tilde{v} = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\mu}};$$

– DM розподіл (DM):

$$\mathrm{F}(\vartheta) = \mathrm{DM}(\vartheta, \breve{\mu}, \breve{v}) = \Phi\left(\frac{\vartheta - \breve{\mu}}{\breve{v}\sqrt{\vartheta\breve{\mu}}}\right),$$

$$\breve{\mu} = \frac{5S^2 - D}{4S + \sqrt{S^2 + 3D}};$$

$$S = \hat{\mu};$$

$$\breve{v} = \left(\frac{2\left(S\sqrt{S^2 + 3D} + D - S^2\right)}{5S^2 - D}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$D = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\vartheta_i - S\right);$$

де $\breve{v}$ – коефіцієнт варіації наробітку до відмови;

D – дисперсія;

– розподіл Вейбулла (W):

$$\mathrm{F}(\vartheta) = \mathrm{W}\left(\vartheta, \hat{b}, \hat{a}\right) = 1 - e^{-\left(\frac{\vartheta}{\hat{a}}\right)^{\hat{b}}},$$

де $\hat{b} \cong \dfrac{1}{\tilde{v}};$

$$\hat{a} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\vartheta_i^{\hat{b}}\right)^{\frac{1}{\hat{b}}}.$$

– логарифмічно-нормальний розподіл (LN):

$$\mathrm{F}(\vartheta) = \mathrm{LN}(\vartheta; \breve{\mu}, \breve{\sigma}) = \Phi\left(\frac{\ln(\vartheta) - \breve{\mu}}{\breve{\sigma}}\right),$$

де $\breve{\mu} = \ln\hat{\mu} - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{D}{\hat{\mu}^2} + 1\right);$

$$\breve{\sigma} = \left(\ln\left(\frac{D}{\breve{\mu}^2} + 1 \right) \right)^{\frac{1}{2}};$$

– критерії згоди Пірсона:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{r'} \frac{\left(m_j - n_{p_j}\right)^2}{n_{p_j}},$$

$$n_{p_j} = p_j n,$$

де r' – кількість інтервалів після їх об'єднання;

m_j – кількість елементів статистики ϑ, що потрапили в j-й інтервал;

p_j – ймовірність за теоретичним розподілом;

– омега-квадрат:

$$\Omega_N^2 = -n - 2\sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{2j-1}{2n} \ln \mathrm{F}\left(\vartheta_j\right) + \left(1 - \frac{2j-1}{2n}\right) \ln\left[1 - \mathrm{F}\left(\vartheta_j\right)\right] \right\}.$$

Моделювання методом Монте-Карло було проведено таким чином. З метою перевірки правдоподібності гіпотез зроблено 100 вибірок, кожна з яких містила 100 елементів. Вибірки були змодельовані методом Монте-Карло.

Для прикладу оберемо генеральну сукупність №4 із ДСТУ [1]: кількість елементів N=463. Для моделювання приймемо емпіричну ймовірність появи відмови F=0,1 і вирішимо таке рівняння:

$$\frac{x}{N} = F \Rightarrow \frac{x}{463} = 0{,}1 \Rightarrow x \approx 46,$$

де x – порядковий номер елемента вибірки, яким потрібно обмежити вибірку для певного значення F.

За допомогою генератора випадкових чисел створюємо значення порядкових номерів у діапазоні від 1 до N (потрібно згенерувати всього сто елементів) і фіксуємо числа, які $\leq x$. Кількість генерованих чисел дорівнює кількості відмов (табл. 1).

У розглядуваному прикладі кількість відмов дорівнює 11. Таких вибірок потрібно 100. Отриманий статистичний ряд, який складається зі 100 значень (за кількістю вибірок), обчислюється за допомогою викладеного математичного апарата.

За наведеним порядком було виконано моделювання досліджуваної статистики для ряду рівнів F і використання генеральних сукупностей № 4, 5, 10 [1]. Усього було змодельовано та оброблено 1200 вибірок. Об'єм кожної вибірки складався зі 100 значень.

Отримані результати досліджень після перевірки правдоподібності гіпотез зведено в табл. 2, 3.

Таблиця 1

Випадкові числа, які були отримані за допомогою генератора випадкових чисел

458	115	42	403	371	259	122	205	103	421
266	144	129	35	92	427	282	399	372	352
192	238	289	31	4	401	367	41	133	337
80	405	209	436	236	398	93	219	275	37
392	450	287	51	186	455	342	350	50	133
400	432	45	355	344	188	145	267	196	209
15	323	276	397	273	404	309	376	86	316
33	67	147	337	17	295	363	104	138	461
310	453	74	347	342	84	343	129	173	197
283	263	278	452	104	409	137	3	222	311

Таблиця 2

Спостережувані значення χ^2 і відповідні їм рівні значущості ρ

F	DN		DM		N		LN		W	
	χ^2	ρ	χ^2	ρ	χ^2	ρ	χ^2	ρ	χ^2	ρ
Генеральна сукупність № 4										
0,1	5,5399	0,2	5,3789	0,2	5,5179	0,2	5,5048	0,2	6,3297	0,15
0,2	10,6711	0,05	10,5973	0,05	8,5541	0,2	10,7178	0,05	8,6744	0,15
0,3	1,2819	0,5	1,281	0,5	2,5923	0,5	1,2619	0,5	9,0081	0,05
0,5	2,5526	0,5	2,5529	0,5	3,8008	0,5	2,5855	0,5	8,975	0,1
Генеральна сукупність № 5										
0,1	17,2064	-	16,7797	-	6,7836	0,05	16,8374	-	5,7573	0,1
0,2	2,177	0,5	2,1678	0,5	4,99158	0,2	2,2165	0,5	8,8093	0,05
0,3	5,5633	0,3	5,5471	0,3	5,9920	0,3	5,5891	0,3	9,4391	0,15
0,5	14,9131	-	14,902	-	10,3724	0,01	14,8742	-	10,1739	0,01
Генеральна сукупність № 10										
0,1	92,046	-	90,45	-	36,04	-	88,02	-	33,51	-
0,2	6,8546	0,2	6,8061	0,2	6,0367	0,3	6,6664	0,2	11,6712	0,01
0,3	3,0054	0,3	3,0153	0,3	6,4558	0,05	3,0086	0,3	15,137	-
0,5	3,5151	0,5	3,5122	0,5	2,5103	0,5	3,4988	0,5	7,8221	0,15

Примітка. Якщо в колонці рівня значущості *ρ* прочерк, гіпотеза спростована.

Таблиця 3

Спостережувані значення ω^2

F	DN		DM		N		LN		W	
	Ω_N^2	ρ	Ω_N^2	ρ	Ω_N^2	ρ	Ω_N^2	ρ	Ω_N^2	ρ
Генеральна сукупність № 4										
0,1	1,148	0,709	1,123	0,7	0,95	0,615	1,12	0,7	1,16	0,717
0,2	1,046	0,668	1,038	0,663	0,608	0,361	1,054	0,668	0,786	0,512
0,3	0,3943	0,141	0,3935	0,141	0,471	0,222	0,39	0,141	1,369	0,789
0,5	0,3186	0,078	0,3183	0,078	0,3459	0,104	0,3204	0,078	0,9933	0,637
Генеральна сукупність № 5										
0,1	1,137	0,709	1,1183	0,7	0,943	0,610	1,1177	0,7	1,186	0,725
0,2	0,461	0,212	0,455	0,212	0,61	0,361	0,457	0,212	0,13	0,704
0,3	0,6241	0,731	0,6235	0,371	0,806	0,526	0,622	0,371	1,556	0,837
0,5	0,9827	0,632	0,9819	0,632	0,6	0,352	0,9808	0,632	1,139	0,709
Генеральна сукупність № 10										
0,1	2,426	0,945	2,399	0,944	0,937	0,610	2,384	0,943	1,344	0,780
0,2	0,558	0,313	0,556	0,313	0,676	0,424	0,549	0,304	1,421	0,803
0,3	0,34653	0,104	0,34697	0,104	0,657	0,407	0,345	0,104	1,815	0,884
0,5	0,4694	0,222	0,4692	0,222	0,434	0,181	0,467	0,222	1,534	0,831

Аналізуючи результати моделювання для різних видів емпіричних розподілів напрацювань об'єктів, можна констатувати, що розглянуті теоретичні закони розподілу не суперечать дослідним даним (табл. 2, 3). За допомогою критерію χ^2, ω^2 (як і будь-якого іншого) можна лише в деяких випадках спростувати обрану гіпотезу, що явно не узгоджується з дослідними даними.

Висновки

Для вибору найбільш адекватної теоретичної функції розподілу необхідно висувати кілька гіпотез та перевіряти її правдоподібність. Це дозволяє коректно вибрати теоретичний розподіл для вирівнювання статистичного ряду, а також оцінити похибку.

Методика, яка викладена в літературі [1–3], зробити цього не може, тому що стверджує, що в будь-якому випадку статистичний ряд, який складається з випадкових чисел потрібно вирівнювати DM чи DN розподілами. Дані з табл. 2, 3 свідчать, що це не так. Тому використання методики [1–3] неможливе.

Перевагою критерію Мізеса є швидка збіжність до граничного закону. Для цього слід зробити 40 спостережень, а не кілька сотень, як для критерію) χ^2 [4].

Зіставляючи можливості різних критеріїв [4], необхідно відзначити такі особливості. Критерій Пірсона стійкий до окремих випадкових помилок в експериментальних даних. Однак його застосування потребує групування даних за інтервалами, вибір яких відносно довільний і підданий суперечливим рекомендаціям.

Критерій Мізеса ґрунтується безпосередньо на результатах спостереження й не вимагає побудови статистичного ряду, що підвищує об'єктивність висновків, не враховує зменшення степенів вільності під час визначення параметрів розподілу за вибіркою, а це веде до ризику прийняття помилкової гіпотези. Його переважно можна застосовувати в тих випадках, коли параметри закону розподілу відомі апріорі, наприклад, під час перевірки датчиків випадкових чисел.

Література

1. *ДСТУ 3433-96.* «Надійність техніки. Моделі відмов. Основні положення». – Чинний від 01.01.09. – К.: Держстандарт України, 1998.

2. *Стрельников В.П.*. Оценка и прогнозирование надёжности электронных компонентов и систем / В.П. Стрельников, А.В. Федухин. – К.: Логос, 2002. – 486 с.

3. *ДСТУ 3004-95.* «Надійність техніки. Методи оцінки показників надійності за експериментальними даними». – К.: Держстандарт України, 1995.

4. *Ходасевич Г.Б.* Обработка экспериментальных данных на ЭВМ / Г.Б. Ходасевич. – Санкт-Петербург. гос. ун-т телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича – Режим доступа: http://dvo.sut.ru/libr/ opds/ i130hodo_part1/ 3.htm.

Стаття надійшла до редакції 18.05.10.