УДК 004.896(045)

В.Ю. Ларін, д.т.н., доц.
Є.В. Шкурніков, асп.

АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ МАГНІТНОГО ОСЕРДЯ, ЩО ЗАСТОСОВУЮТЬСЯ В EDA

Національний авіаційний університет
E-mail: nikshev@gala.net

Проаналізовано найбільш відомі моделі магнітного осердя, які застосовуються в математичному апараті сучасних програм класу EDA.

In the article are analysed most known models of magnetic core, which used in modern EDA programm.

Проанализированы наиболее известные модели магнитных сердечников, которые используются в математическом аппарате современных программ класса EDA.

Постановка проблеми

Усі відомі види вторинних джерел живлення містять у своєму складі електромагнітні компоненти, такі, як трансформатори та індуктори. Зазвичай ці компоненти виготовляються з використанням різних феромагнітних матеріалів, що дозволяють поліпшити їхні електричні параметри, а також зменшити розміри та масу.

У разі розрахунку дроселя та дослідження процесів у ньому важливо знати метод визначення електромагнітних параметрів, які для лінійного індуктивного елемента знаходять, скориставшись поняттям індуктивності. Для дроселя з феромагнітним осердям через нелінійні властивості останнього зв’язок між напругою і струмом встановлюється через магнітні характеристики осердя.

Індуктивний елемент із феромагнітним осердям або з осердям з іншого магнітного матеріалу є одним із небагатьох компонентів електронної техніки, які до теперішнього часу досить складно моделювати в сучасних програмних пакетах автоматизованого проектування електронних схем пристроїв. Ця обставина значно ускладнює розроблення пристроїв, які містять індуктивні елементи.

Існуючий стан справ із моделюванням індуктивних елементів призводить до того, що їх вилучають зі схем і замінюють на інші елементи, які виконуватимуть їх функції.

При цьому не враховуються позитивні якості індуктивних елементів, наприклад, добра стабільність до зміни чинників зовнішнього середовища (температури, вологості, тиску).

Мета роботи – проаналізувати відомі математичні моделі магнітного осердя, які застосовуються в сучасних програмних пакетах класу EDA, відмітити їх переваги та недоліки.

Модель, заснована на апроксимації кривих намагнічування феромагнітного осердя

Первинні моделі побудовано на апроксимації кривих намагнічування феромагнітного осердя.

Властивості феромагнітного осердя при квазістатичному режимі намагнічування $\left(\dfrac{d\varphi}{dt} \to 0\right)$ повною мірою характеризуються сім’єю статичних (квазістатичних) петель гістерезису. Описавши ці властивості аналітично, одержимо можливість виконувати розрахунки дроселів аналітичними методами.

Завдання аналітичного виразу сімей статичних петель дуже складне. Для спрощення його розв’язання введемо поняття структурних складових петель, або кривих намагнічування за реактивними (безгістерезисними) і активними (гістерезисними) процесами.

Такі характеристики можна одержати за сім'єю гістерезисних петель і потім апроксимувати. Отримані аналітичні вирази можна використати для подання шуканих петель.

Метод одержання структурних складових петель зводиться до такого.

За сім'єю гістерезисних петель знаходяться реактивні (або середні) криві намагнічування $h_p(b, B_m)$, де h_p – миттєве значення безгістерезисної (реактивної) складової напруженості поля.

За кожного значення B_m для відповідного b середні криві визначаються півсумою відповідних значень h петлі. Потім можна знайти активні криві намагнічування. Їх можна побудувати в двох координатних системах:

– у функції $h_г(b, B_m)$ магнітні характеристики мають петльовий характер;

– у функції $h_г(b_a, B_m)$ являють собою звичайні однозначні криві.

Характеристики $h_г(b)$ визначаються напруженістю, яку потрібно додати до кривої $h_р(b)$, щоб одержати дані самої петлі.

У разі одержання характеристик $h_г(b_a)$ додатково потрібно скористатися нелінійним перетворенням, яке дає можливість одержати однозначні залежності миттєвого значення активної (гістерезисної) складової напруженості поля $h_г$ від b_a, і спростити задачу їхньої апроксимації:

$$b_a = \sqrt{B_m^2 - b^2}\,, \tag{1}$$

де B_m – максимальне значення магнітної індукції при відповідному циклічному перемагнічуванні.

Миттєве значення магнітної індукції b_a перетворене відповідно до виразу (1).

Для опису безгістерезисних або реактивних кривих намагнічування використовується гіперболічний синус, для опису гістерезисних або активних кривих намагнічування – круговий синус. Вибір цих виразів переважно зроблений виходячи з необхідності забезпечення простоти розв'язання задач гармонійного аналізу.

У разі такого способу апроксимації аналіз безгістерезисних (реактивних) процесів легко виробляється за допомогою функцій Бесселя від уявного аргументу, а активних – за допомогою функцій Бесселя від дійсного аргументу. Сім'ї реактивних та активних кривих намагнічування під час апроксимації їх гіперболічним і круговим синусами мають такий вигляд:

$$h_p = \alpha_p(B_m)\, sh\beta_p(B_m)\, b, \tag{2}$$

$$h_г = \alpha_г(B_m)\, sh\beta_г(B_m)\, b_a, \tag{3}$$

де $\alpha_p(B_m), \beta_p(B_m)$, $\alpha_г(B_m), \beta_г(B_m)$ – коефіцієнти апроксимації (параметри феромагнітного осердя).

У загальному випадку ці коефіцієнти є функцією температури, зовнішніх пружних навантажень і т.д.

Характерно, що вирази (2) і (3) спільно дозволяють аналітично виразити сім'ю шуканих петель гистерезиса. Для цього досить скористатися поняттям рівнобіжної схеми заміщення магнітного ланцюга і перейти до виразу:

$$h_c = \alpha_p(B_m)\, sh\beta_p(B_m)\ \ b \pm$$

$$\pm \alpha_г(B_m) \sin\beta_г(B_m) \sqrt{B_m^2 - b^2}\,, \tag{4}$$

де h_c – значення напруженості поля за квазістатичного режиму намагнічування (за $\frac{db}{dt} > 0$ береться знак плюс, за $\frac{db}{dt} < 0$ – знак мінус).

Для одержання петель за рівнянням (4) потрібно за кожного значення B_m визначити зв'язок між h_c і b за один повний цикл перемагнічування. Підкреслимо, що закон зміни b не обумовлено. Вираз (4) інваріантно щодо часу і, отже, справедливо за (квазістатичного) характеру зміни b.

За необхідності більш точного відображення характеру петель як апроксимуючі вирази сім'ї кривих варто використовувати два гіперболічних і відповідно два кругових синуси. Точність опису гістерезисних петель значно підвищується.

Для подальших досліджень апроксимуючі вирази (2) і (3) зображаєм у відносних (безрозмірних) величинах. При цьому можна одержати спільність результатів аналізу.

Особливо зручно їх використовувати під час розрахунків ланцюгів зі сталлю без обліку гістерезиса, коли можна зневажити залежністю параметрів феромагнетіка від величини магнітної індукції (при усереднених коефіцієнтах апроксимації).

Трудомісткі розрахунки за рішенням задач гармонійного аналізу можна виконати лише один раз і надалі використовувати результати для розрахунку дроселів.

Приймемо дві системи відносних одиниць.

У разі першої системи, застосовуваної при наближених розрахунках, коли втрати в сталі можна не враховувати як базисні величини зручно обрати

$$H_{баз} = \alpha;$$

$$B_{баз} = 1/\beta.$$

За цих базисних величинах апроксимуючий вираз має такий вигляд:

$$h^0 = \mathrm{sh}\, b^0.$$

де h^0, b^0 – миттєві значення напруженості поля та магнітної індукції.

Перехід від абсолютної системи одиниць до відносної і навпаки робиться за формулами:

$$h = H_{баз}\, h^0,$$

$$b = B_{баз}\, b^0.$$

У разі другої системи відносних одиниць крива намагнічування зводиться до одиничного масштабу. У цій системі одна з точок кривої намагнічування приймається за базисну ($B_{баз}$, $H_{баз}$), а координати всіх інших точок виражаються щодо цих базисних параметрів.

Як базисні обирають такі значення $H_{баз}$ і $B_{баз}$, що знаходяться в кінці робочої ділянки кривої намагнічування осердя. Лише так можна знайти оптимальні значення коефіцієнтів апроксимацій, що відповідають потрібній ділянці робочої характеристики.

Опишемо, як можуть бути знайдені оптимальні значення коефіцієнтів апроксимуючих виразів, щонайкраще відповідній робочій ділянці якої-небудь конкретної кривої намагнічування. Залежності побудовані за такими формулами:

– у разі апроксимації кривої намагнічування гіперболічним синусом

$$h^* = \frac{sh\left(b^* B^*_{баз}\right)}{sh\left(B^*_{баз}\right)};$$

– у разі апроксимації кривої намагнічування круговим синусом

$$h^* = \frac{\sin\left(b^*_{\alpha} B^*_{баз}\right)}{\sin\left(B^*_{баз}\right)},$$

де $B^*_{баз}$ – показник нелінійності кривої намагнічування.

Спосіб визначення оптимальних коефіцієнтів апроксимуючих виразів зводиться до такого. Для базисних значень $H_{баз}$ і $B_{баз}$ криву намагнічування, що підлягають апроксимації, варто привести до одиничного масштабу та нанести на кальку в тім же масштабі, що і криві сіток. Шляхом сполучення кальки з кривими сіток підбирається найбільш оптимальна величина показника нелінійності $B^*_{баз}$.

Пошук найвигіднішого значення $B^*_{баз}$ і коефіцієнтів α і β можна зробити й аналітично, наприклад, за методом найменших квадратів, мінімізацією виразу

$$\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{h_o^2\left(b_i\right)} \left[h\left(b_i\right) - h_o\left(b_i\right) \right]^2, \tag{5}$$

де N – кількість заданих точок на реальній кривій;

$h_0(b_i)$ та $h(b_i)$ – задана й апроксимуюча функції.

Оптимальна величина $B^*_{баз}$ знаходиться так. Спершу варто прийняти $B^*_{баз}$ =1,0.

З умови необхідності прив'язки апроксимуючої залежності до заданої базисної точки ($H_{баз}$, $B_{баз}$) визначимо величину коефіцієнта, а потім з виразу (5) – величину похибки.

Далі визначаються коефіцієнти шуканої конкретної функції:

$$\alpha = \frac{H_{\text{баз}}}{\text{sh}B^*_{\text{баз}}},\ \ \beta = \frac{B^*_{\text{баз}}}{B_{\text{баз}}}.$$

Модель Джілса–Атертона

Основа моделі Джілса–Атертона безгістерезисна крива, що являє собою залежність безгістерезисної намагніченості від H [1].

Зв'язок між індукцією B, напруженістю H і намагніченістю M:

$$B = \mu_0(M + H).$$

Модель Джілса–Атертона припускає залежність безгістерезисної намагніченості M_{an} від величини напруженості H [1]:

$$M_{\text{an}} = M_S \frac{\frac{H}{A}}{\left|\frac{H}{A}\right| + 1},$$

де M_S – намагніченість насичення;

Коефіцієнт форми кривої A, визначається як величина напруженості, за якої

$$M_{\text{an}} = \frac{M_S}{2};$$

$$M_{\text{an}} = M_S \frac{H}{|H| + A}.$$

Для введення гістерезисної залежності в модель уводять диференціальне рівняння:

$$\frac{dM}{dH} = \frac{M_{an} - M}{K}\delta, \tag{6}$$

де δ – коефіцієнт перемагнічування;

K – величина коерцитивної сили петлі.

Коерцитивна сила петлі – напруженість магнітного поля, за якої індукція в зразку (намагніченість) дорівнює нулеві. Розглянемо поведінку безгістерезисної кривої M_{an} і петлі перемагнічування за напруженості H_C.

За допомогою повного рівняння Джилса–Атертона можна розрахувати петлю перемагнічування, інтегруючи рівняння (6), наприклад, методом Ейлера.

Ітераційна формула має вигляд:

$$M_{K+1} = M_K + \left\{ \frac{M_{anK} - M_K}{K}\delta + \frac{C}{1+C}\frac{dM_{an}}{dH}\bigg|_{H=H_k} \right\} \times$$
$$\times \left(H_{K+1} - H_K\right),$$

$$C \approx \frac{\mu_i}{\mu_{an}} < 1;$$

де μ_i – початкова магнітна проникність, що менше безгістерезисної μ_{an}.

Модифікувати модель можна введенням залежності K від швидкості перемагнічування:

$$\frac{dM}{dH} = \frac{M_{an} - M}{K_0 + K_f\left|\frac{dH}{dt}\right|}\delta + \frac{C}{1+C}\frac{dM_{an}}{dH},$$

де $\left|\frac{dH}{dt}\right|$ – модуль миттєвої швидкості перемагнічування матеріалу.

Модель перемагнічування Джілса–Атертона не виражає в явному виді залежність магнітної індукції B від напруженості магнітного поля H, а встановлює їхній взаємозв'язок через систему диференціальних рівнянь, що описують поведінку доменних структур.

Реальні процеси перемагнічування феромагнетіка здійснюються пружним прогином доменних границь, що передують незворотному переміщенню доменної стінки.

Рівняння, яке описує ці процеси, повинно описувати ефект «в'язкого» тертя, що у додатку до чисто механічних систем означає, що вказана складова сили пропорційна швидкості переміщення. У магнітному середовищі ця складова враховується поправкою, пропорційною dM_{an}/dH, що веде до рівняння

$$\frac{dM}{dH} = \frac{M_{an} - M}{K}\delta + \frac{C}{1+C}\frac{dM_{an}}{dH},$$

де C – постійна зсуву доменних границь.

Якщо відомо відносну магнітну проникність початкової кривої намагнічування μ_i і безгістерезисній кривій μ то їхнє відношення можна визначити за формулою

$$\frac{dM/dH}{dM_{\text{an}}/dH} \approx \frac{\mu_i}{\mu_{\text{an}}} = \frac{C}{1+C}. \quad (7)$$

Тоді константа C визначиться співвідношенням

$$C = \frac{\mu_i}{\mu_{\text{an}} - \mu_i}. \quad (8)$$

Співвідношення (7), (8) дають можливість оцінити ступінь впливу того чи іншого параметра на форму петлі перемагнічування.

Модель Джона Чена

Магнітне поле H визначається [2]:

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i N_i I_i}{l_{mag}},$$

де $0 \le k_i \le 1$ – коефіцієнт зв'язку обмотки;

N_i – кількість витків i - ї обмотки;

I_i – струм через обмотку,

l_{mag} – ефективна довжина магнітного матеріалу.

Магнітна індукція B визначається за формулою:

$$B = \mu_{\text{г}} \mu_0 H = \frac{\varphi}{A}.$$

Магнітна індукція B – нелінійна функція від H і залежить від магнітної пам'яті матеріалу, до якого прикладене поле – $B = B$ (H, history).

Під час моделювання котушок для оцінювання імпедансу обмотки трансформатора зручно ввести еквівалентну індуктивність:

$$L_{eq} = \frac{4\pi 10^{-7} \mu_{\text{г}}(H) w^2 A}{l},$$

де $\mu_{\text{г}}$ – усереднена операційна область матеріалу;

w – кількість витків;

A – площа осердя, м^2;

l – довжина осердя, м.

Межа щільності магнітного потоку B у разі збільшення H - $\lim\limits_{H \to \infty} B = \mu_0 H + B_S$, описує потік насичення B_s. На практиці в більшості випадків $\mu_0 H$ набагато менше ніж B_s. Головна петля вміщує всі криві намагнічування. Модель складається з двох рівнянь. Перше рівняння описує збільшення поля H:

$$\tilde{B}_+(H) = B_S \frac{(H + H_c)}{|H + H_C| + H_C\left(\frac{B_s}{B_r} - 1\right)}.$$

Друге рівняння описує зменшення поля H,

$$\tilde{B}_-(H) = B_S \frac{(H - H_C)}{|H - H_C| + H_C\left(\frac{B_S}{B_r} - 1\right)}.$$

У такий спосіб маємо симетричну інверсію: $\tilde{B}_+(H) = -\tilde{B}_-(-H)$.

Висновки

Існуючі моделі не цілком відображають поведінку магнітного матеріалу, особливо модель Джілса–Атертона.

Модель Чена більш придатна до моделювання. Ця модель враховує частотні характеристики феромагнетиків і, отже, може бути використана з відносним успіхом під час моделювання перемагнічування змінним струмом. Нині є потреба в більш точних моделях кривих намагнічування феромагнітного осердя.

Література

1. *Jiles D.C.* Theory of ferromagnetic hysteresis / *D.C. Jiles, D.L. Atherton* // Magnetism and magnetic materials. – 1983. – Vol. 61. – P. 48–68.

2. *Chan J.H.* Nonlinear transformer model for circuit simulation / *J.H. Chan, A. Vladimiresku, X-Ch. Gao* // IEEE transactions on computer-aided design. – 1991. – Vol. 10 – P. 476–482.

Стаття надійшла до редакції 17.09.10.