УДК 536.2:517.2(045)

[1]**К. К. Гасанов,** д.ф.-м.н., проф.
[2]**А. Н. Гасанова,** м.н.с.

УПРАВЛЕНИЕ С МИНИМАЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ В ПРОЦЕССАХ, ОПИСАННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ С НЕКЛАССИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

[1]Бакинский государственный университет
[2]Азербайджанская государственная нефтяная академия
E-mail: arirguliyev@ukr.net

Рассмотрена задача управления с минимальной энергией в процессах, описываемых уравнением теплопроводности с неклассическим краевым условием.

Досліджено завдання керування з мінімальною енергією в процессах, описуваних рівнянням теплопровідності з некласичною крайовою умовою.

In the paper a problem of control with minimum energy for heat conduction equation with non-classical boundary conditions is investigated.

Постановка проблемы

Передача тепла играет важную роль в различных технологических процессах металлургического производства или сушке влажных материалов и т.д. Состояние таких процессов описано уравнениями с частными производными параболического типа [1–7].

Пусть управляемый процесс описывается функцией $y(x,t)$**,** которая в области

$$D=\{0<x<1,\, 0<t\le T\}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial y}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+u(x,t), \tag{1}$$

начальному условию

$$y(x,0)=\varphi(x),\quad 0\le x\le 1, \tag{2}$$

и граничным условиям

$$y(0,t)=\mu(t);$$

$$y_x(1,t)-y_x(0,t)=\eta(t),\, 0\le t\le T, \tag{3}$$

где $y(x,t)$ – температура в точке x в момент t.

a^2 – коэффициент температуропроводности;

$u(x,t)$ – плотность тепловых источников в точке x в момент времени t.

Управляющей функцией является $u(x,t)\in L_2(D)$.

Следуя обобщенным решениям задачи (1)–(3), назовем функцию $y(x,t)$, которая принадлежит $W_2^{1,0}(D)$, условию $y(0,t)=\mu(t)$ в обычном смысле и удовлетворяет интегральному тождеству [8]:

$$\int_0^1\left[y(x,t)\Phi(x,t)-\varphi(x)\Phi(x,0)\right]dx+$$

$$+\int_0^t\int_0^1\left[a^2y_x(x,\tau)\Phi_x(x,\tau)-y(x,\tau)\Phi_\tau(x,\tau)+\right.$$

$$\left.+u(x,\tau)\Phi(x,\tau)\right]dxd\tau-a^2\int_0^t\eta(\tau)\Phi(0,\tau)\,d\tau=0 \tag{4}$$

при $t\in[0,T]$, $\Phi\in W_2^1(D)$, $\Phi(0,t)=\Phi(1,t)$.

Сначала предположим, что функции $\mu(t)$ и $\eta(t)$ дифференцируемы. Полагая

$$y(x,t)=z(x,t)+\mu(t)+\frac{x^2}{2}\eta(t),$$

задача (1)—(3) сводится к задаче

© К. К. Гасанов, А. Н. Гасанова, 2010

$$\frac{\partial z}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+f(x,t) \quad (5)$$

с начальным условием

$$z(x,0)=\psi(x)=\varphi(x)-\mu(0)-\frac{x^2}{2}\eta(0) \quad (6)$$

и граничными условиями

$$z(0,t)=0,\quad z_x(0,t)-z_x(1,t)=0, \quad (7)$$

где

$$f(x,t)=u(x,t)+a^2\eta(t)-\mu'(t)-\frac{x^2}{2}\eta'(t).$$

Решение задачи (5)–(7) является суммой решений краевых задач:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\quad \text{в области } D, \quad (8)$$

$$\omega(x,0)=\psi(x), \quad (9)$$

$$\omega(0,t)=0,\ \omega_x(0,t)=\omega_x(1,t) \quad (10)$$

и

$$\frac{\partial W}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+f(x,t), \quad (11)$$

$$W(x,0)=0, \quad (12)$$

$$W(0,t)=0, W_x(0,t)=W_x(1,t). \quad (13)$$

Для изучения решения краевой задачи (8)–(10) применяется метод разделения переменных. Нетривиальное частное решение будем искать в виде

$$\omega(x,t)=X(x)T(t). \quad (14)$$

Подставляя формулу (14) в уравнение (8) и в краевые условия (10), получаем задачу о собственных значениях

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \quad (15)$$

$$X(0)=0,\ X'(0)=X'(1).$$

Функция $T(t)$ является решением уравнения

$$T'(t)+\lambda T(t)=0. \quad (16)$$

Задача (15), (16) является несамосопряженной, сопряженной к ней будет задача

$$Y''(x)+\bar{\lambda}Y(x)=0,\ 0<x<1, \quad (17)$$

$$Y'(1)=0, Y(0)=Y(1). \quad (18)$$

В работе [9] доказано, что задача (15)–(16) и задача (17)–(18) имеют собственные значения

$$\lambda_k=\bar{\lambda}_k=(2\pi k)^2,\quad k=0,1,2,...$$

и собственные и присоединенные функции:

$$X_0=x,\ X_{2k}(x)=\sin\sqrt{\lambda_k}x,\ X_{2k-1}(x)=$$
$$=x\cos\sqrt{\lambda_k}x,\ k=1,2,3,..., \quad (19)$$

$$Y_0(x)=1, Y_{2k}(x)=4(1-x)\sin\sqrt{\lambda_k}x, Y_{2k-1}(x)=$$
$$=4\cos\sqrt{\lambda_k}x,\ k=1,2,3,.... \quad (20)$$

Последовательности функций (19) и (20) образуют базис в пространстве $L_2(0,1)$ и биортогональны, то есть

$$(X_i,Y_j)=\int_0^1 X_i(x)Y_j(x)\,dx=\delta_{ij},$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Так как система функций $\{X_k(x)\}$ образует базис в $L_2(0,1)$ и обобщенное решение $\omega(x,t)$ задаче (8)–(10) принадлежит $L_2(0,1)$ при $t\in[0,T]$, то имеем следующее разложение:

$$\omega(x,t)=\omega_0(t)X_0(x)+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\omega_{2k-1}(t)X_{2k-1}(x)+\omega_{2k}(t)X_{2k}(x)\right). \quad (21)$$

Используя разложение (21) для решения задачи (8)–(10), получаем

$$\omega(x,t)=\psi_0X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\psi_{2k}X_{2k}(x)+$$
$$+\psi_{2k-1}\left(X_{2k-1}(x)-2a^2\sqrt{\lambda_k}tX_{2k}(x)\right)\Big]e^{-a^2\lambda_k t}, \quad (22)$$

где $\psi_0 = \int_0^1 \psi(x) Y_0(x)\,dx;$

$$\psi_{2k-1} = \int_0^1 \psi(x) Y_{2k-1}(x)\,dx;$$

$$\psi_{2k} = \int_0^1 \psi(x) Y_{2k}(x)\,dx, \quad k = 1,2,\ldots .$$

При условии $\psi \in L_2(0,1)$ из выражения (21) получаем

$$\int_0^1 \omega^2(x,t)\,dx \le M \int_0^1 \psi^2(x) dx, \quad t \in [0,T],$$

$$\int_0^t \int_0^1 \omega_x^2(x,\tau) dx d\tau \le M \int_0^1 \psi^2(x)\,dx, \ M = \text{const}.$$

Отсюда следует, что $\omega \in W_2^{1,0}(D)$.

Если в тождество (4) вместо $\varphi(x)$ подставить $\psi(x)$ и полагать, что $u \equiv 0, \mu \equiv 0, \eta \equiv 0$, то получим, что функция $\omega(x,t)$, представленная в виде выражения (22), будет удовлетворять интегральному тождеству.

Полагая

$$G(x,s;t) = X_0(x) Y_0(s) + \sum_{k=1}^{\infty} \{ X_{2k}(x) Y_{2k}(s) + $$
$$+ \left[X_{2k-1}(x) - 2a^2 \sqrt{\lambda_k} t X_{2k}(x) \right] Y_{2k-1}(s) \} e^{-a^2 \lambda_k t},$$

обобщенное решение $\omega(x,t)$ можно представить в виде

$$\omega(x,t) = \int_0^1 G(x,s;t) \psi(s)\,ds .$$

Аналогичным способом обобщенное решение задачи (11)–(13) можно представить в виде

$$W(x,t) = \int_0^t \int_0^1 G(x,s;t-\tau) f(s,\tau) ds d\tau .$$

Учитывая, что

$$y(x,t) = \omega(x,t) + W(x,t)$$

и

$$\psi(x) = \varphi(x) - \mu(0) - \frac{x^2}{2} \eta(0),$$

$$f(x,t) = u(x,t) + a^2 \eta(t) - \mu'(t) - \frac{x^2}{2} \eta'(t),$$

после некоторых преобразований получаем

$$y(x,t) = \int_0^1 G(x,s;t) \varphi(s)\,ds + \int_0^t \int_0^1 \{ G(x,s;t-\tau) u(s,\tau) +$$
$$+ \left[a^2 G(x,s;t-\tau) - G_t(x,s;t-\tau) \right] \eta(\tau) -$$
$$- G_t(x,s;t-\tau) \mu(\tau) \} ds d\tau \qquad (23)$$

Можно доказать, что при условиях

$$\varphi \in L_2(0,1), \ \mu \in W_2^1(0,T), \ \mu(0) = 0, \ \eta \in L_2(0,T)$$

функция $y(x,t)$, определенная формулой (23), является обобщенным решением задачи (1)–(3).

Управление с минимальной энергией

Пусть $a(x)$ заданная функция из $L_2(0,1)$.

В выбранном классе допустимых управлений

$$u(x,t) \in L_2(D)$$

требуется найти такое управление, чтобы соответствующее ему обобщенное решение $y(x,t)$ задачи (1)–(3), представленное в форме (23), удовлетворяло условию

$$y(x,T) = a(x) \qquad (24)$$

и при этом функционал

$$J = \iint_D u^2(x,t) dx dt$$

принимал наименьшее возможное значение.

Условия (24) понимаются так:

$$\lim_{t \to T-} \int_0^1 \left[y(x,t) - a(x) \right]^2 dx = 0 .$$

Аналогичные задачи были исследованы в работах [1; 4], когда спектральная задача является самосопряженной.

В классе допустимых управлений возьмем произвольное управление $u(x,t)$, найдем соответствующее ему обобщенное решение $y(x,t)$ задачи (1)—(3) и представим его в виде выражения (23). Тогда условие (24) можно записать в виде

$$\iint_D G(x,s;T-t)u(s,t)\,dsdt = b(x), \qquad (25)$$

где

$$b(x) = a(x) - \int_0^1 G(x,s;T)\varphi(s)\,ds +$$
$$+\iint_D \{G_t(x,s;T-t)\mu(t)+$$
$$+\left[G_t(x,s;T-t) - a^2 G(x,s;T-t)\right]\eta(t)\}\,dsdt. \quad (26)$$

Функция $b(x)$ не зависит от управления и однозначно определяется заданными функциями $\varphi(x)$, $\mu(t)$, $\eta(t)$.

Следовательно, для того чтобы управление $u(x,t)$ определяло обобщенное решение $y(x,t)$ задачи (1)–(3), удовлетворяющее условию (24), необходимо и достаточно, чтобы это управление было решением интегрального уравнения (25).

Уравнение (25) эквивалентно бесконечной проблеме моментов [10].

Метод l-проблемы моментов для решения задачи оптимального управления в системах со сосредоточенными параметрами впервые применен в работе [11].

Так как функция $b(x)$, определенная формулой (26), принадлежит $L_2(0,1)$, то функция $b(x)$ разлагается в биортогональный ряд:

$$b(x) = b_0 X_0(x) +$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\left(b_{2k-1}X_{2k-1}(x) + b_{2k}X_{2k}(x)\right), \qquad (27)$$

где коэффициенты b_0, b_{2k-1}, b_{2k} вычисляют по формулам

$$b_0 = \int_0^1 b(x)Y_0(x)\,dx;$$
$$b_{2k-1} = \int_0^1 b(x)Y_{2k-1}(x)\,dx;$$
$$b_{2k} = \int_0^1 b(x)Y_{2k}(x)\,dx.$$

Учитывая формулу (27) в равенстве (25) и сравнивая коэффициенты функций $X_k(x)$, $k=1,2,\ldots$, получаем:

$$\int_0^T u_0(t)\,dt = b_0, \qquad (28)$$

$$\int_0^T u_{2k-1}(t)e^{-a^2\lambda_k(T-t)}\,dt = b_{2k-1},\ k=1,2,\ldots, \qquad (29)$$

$$\int_0^T\left[u_{2k}(t) - 2a^2\sqrt{\lambda_k}(T-t)u_{2k-1}(t)\right]e^{-a^2\lambda_k t}\,dt =$$
$$= b_{2k},\ k=1,2,\ldots, \qquad (30)$$

где

$$u_0(t) = \int_0^1 u(x,t)Y_0(x)\,dx,\ u_{2k-1}(t) =$$
$$= \int_0^1 u(x,t)Y_{2k-1}(x)\,dx, u_{2k}(t) =$$
$$= \int_0^1 u(x,t)Y_{2k}(x)\,dx.$$

Задачу об управлении с минимальной энергией сформулируем как проблему моментов следующим образом.

Надо найти такие функции $u_0(t), u_{2k-1}(t), u_{2k}(t)$, $k=1,2,\ldots$, чтобы они удовлетворяли уравнениям (28), (29), (30) и при этом функционал

$$J = \int_0^T\int_0^1 u^2(x,t)\,dxdt$$

принимал наименьшее возможное значение, где

$$u(x,t) = u_0(t)X_0(x) +$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}(u_{2k-1}(t)X_{2k-1}(x) + u_{2k}(t)X_{2k}(x)).$$

Для решения системы (29) в $L_2(0,T)$ выделим одномерное пространство H_{2k-1} элементов $\upsilon_{2k-1}(t)$, определяемых формулой

$$\upsilon_{2k-1}(t)=c_{2k-1}e^{-a^2\lambda_k(T-t)}, \qquad (31)$$

где c_{2k-1} – произвольная постоянная.

Известно, что тогда любой элемент $u_{2k-1}\in L_2(0,T)$ можно однозначно представить в виде [6]:

$$u_{2k-1}(t)=\upsilon_{2k-1}(t)+r_{2k-1}(t),$$

где $r_{2k-1}(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^T \upsilon_{2k-1}(t)r_{2k-1}(t)\,dt=0. \qquad (32)$$

С учетом условия (32) имеем

$$\int_0^T u_{2k-1}^2(t)\,dt=\int_0^T \upsilon_{2k-1}^2(t)\,dt+\int_0^T r_{2k-1}^2(t)\,dt, \qquad (33)$$

$$\int_0^T e^{-a^2\lambda_k(T-t)}u_{2k-1}(t)\,dt=\int_0^T e^{-a^2\lambda_k(T-t)}\upsilon_{2k-1}(t)\,dt.$$

Если $u_{2k-1}(t)$ принадлежит H_{2k-1}, то $\int_0^T u_{2k-1}^2(t)\,dt$ будет меньше, чем выражение (33), поэтому решение системы (29) надо искать в пространстве H_{2k-1}.

Подставляя функцию (31) в уравнение (29), находим, что это уравнение в H_{2k-1} имеет единственное решение

$$u_{2k-1}(t)=\frac{2\lambda_k a^2 b_{2k-1}}{1-e^{-2a^2\lambda_k T}}e^{-a^2\lambda_k(T-t)}, \qquad (34)$$

$k=1,2,3,....$

При этом значение функционала J_{2k-1} равно

$$J_{2k-1}=\int_0^{\mathrm{T}} u_{2k-1}^2(t)\,dt=2a^2\frac{\lambda_k\tilde{b}_{2k-1}^2}{1-e^{-2a^2\lambda_k\mathrm{T}}}.$$

Подставляя функцию (34) в уравнение (30), получаем:

$$\int_0^T u_{2k}(t)e^{-a^2\lambda_k(T-t)}dt=\tilde{b}_{2k},\quad k=1,2,3,..., \qquad (35)$$

где

$$\tilde{b}_{2k}=b_{2k}+\frac{2\sqrt{\lambda_k}b_{2k-1}}{1-e^{-a^2\lambda_k T}}\left[\frac{1}{2a^2\lambda_k}-\left(T+\frac{1}{2a^2\lambda_k}e^{-2a^2\lambda_k T}\right)\right].$$

Система (35) решается в H_{2k} [12; 13].

Выводы

При

$$u_{2k}(t)=\frac{2\lambda_k a^2\tilde{b}_{2k}}{1-e^{-a^2\lambda_k T}}e^{-a^2\lambda_k(T-t)},$$

$k=1,2,3,...,$

значение функционала I_{2k} будет

$$J_{2k}=\frac{2a^2\lambda_k\tilde{b}_{2k}^2}{1-e^{-2a^2\lambda_k T}},\quad .$$

$k=1,2,3,...$

Пусть существуют функции $a(x)$, $\varphi(x)$, $\mu(t)$, $\eta(t)$, такие, что

$$J=J_0+\sum_{k=1}^{\infty}(J_{2k-1}+J_{2k}),$$

где

$$J_0=\frac{\tilde{b}_0^2}{\mathrm{T}^2};$$

$$J_{2k-1}=2a^2\frac{\lambda_k\tilde{b}_{2k-1}^2}{1-e^{-2a^2\lambda_k\mathrm{T}}};$$

$$J_{2k}=2a^2\frac{\lambda_k\tilde{b}_{2k}^2}{1-e^{-2a^2\lambda_k\mathrm{T}}}.$$

Тогда функция

$$u(x,t)=u_0(t)X_0(x)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(u_{2k-1}(t)X_{2k-1}(x)+u_{2k}(t)X_{2k}(x)\right)$$

является оптимальным управлением, а наименьшее значение функционала

$$J=J_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(J_{2k-1}+J_{2k}\right).$$

В результате получили что, функция является оптимальным управлением, а наименьшее значение – найденным функционалом.

Литература

1. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами / А.Г. Бутковский. – М. : Наука, 1975 . – 568 с.

2. *Бутковский А.Г.* Оптимальное управление нагревом металла / А.Г. Бутковский, С.А. Малый, Ю.Н. Андреев. – М. : Металлургия, 1972. – 440 с.

3. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. – М. : Наука, 1981. – 400 с.

4. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров. – М. : Наука, 1978 – 464 с.

5. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. – М. : Мир, 1972. – 414 с.

6. *Тихонов А.Н.* Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М. : Наука, 1972. – 680 с.

7. *Fattorini H.Q.* Exait controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension, Arch. for. Rational and Anal / H.Q. Fattorini, D.L. Russel. – 1971.– Vol. 43. – №4.

8. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики / О.А. Ладыженская. – М. : Наука, 1973 – 408 с.

9. *Ионкин Н.И.* Решение краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим условием. Дифференциальные уравнения / Н.И. Ионкин. – 1977. – Т. XIII, № 2. – С. 294–304.

10. *Крейн М.Г.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи / М.Г. Крейн, А.А. Нудельман. – М.: Наука, 1978. – 552 с.

11. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением / Н.Н. Красовский. – М.: Наука, 1968.– 476 с.

12. *Ионкин Н.И.* Об устойчивости одной задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. Дифференциальные уравнения / Н.И. Ионкин. – 1977. – Т. XIII, № 2. – С. 294–304.

13. *Люстерник Л.А.* Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 520 с.

Стаття надійшла до редакції 30.09.10.