

УДК 629.3.025.2(045)

О.А. Сущенко, к.т.н., доц.

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ СИСТЕМИ СТАБІЛІЗАЦІЇ ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНОГО КОМПЛЕКСУ НА РУХОМІЙ ОСНОВІ

Національний авіаційний університет

E-mail: fsu@edu.ua

*Створено математичну модель системи стабілізації інформаційно-вимірювальною комплексу на рухомій основі. Подано результати моделювання.*

### інформаційно-вимірювальний комплекс, платформа, стабілізація

#### Вступ

Досліджувана система призначена для керування інформаційно-вимірювальним комплексом на рухомій основі. Ця система має низку особливостей:

– являє собою платформну систему, тобто реалізує принцип безпосередньої стабілізації корисного навантаження;

– має декілька режимів, а саме: виставлення платформи відносно площини горизонту, виставлення комплексу на задані кути рискання, тангажа та крену та стабілізації платформи відносно виставленого положення;

– забезпечує розвороти за кутами рискання, тангажа та крену у широкому діапазоні.

Крім інформаційно-вимірювального комплексу, на платформі встановлюються три гіроскопічні вимірювачі кутової швидкості, вимірювальні осі яких є ортогональними і в початковий момент часу збігаються з осями крену, тангажа та рискання, а також два акселерометри, осі чутливості яких у вихідному стані збігаються з осями тангажа та крену. В осях рамок карданового підвісу, відносно яких здійснюються повороти на кути рискання, тангажа та крену, встановлюються відповідні датчики кутів.

#### Аналіз досліджень і публікацій

Використання платформних систем керування кутовим рухом об'єктів різного призначення на підставі інформації, отриманої від гіроскопічних вимірювачів, завжди було актуальною проблемою.

У праці [1] викладено основні принципи побудови гіростабілізаторів різного типу та гіроскопічних систем орієнтації, призначених для експлуатації на літальних та космічних апаратах.

У праці [2] акцентується увага на належності гіростабілізаторів до систем автоматичного регулювання, основною функцією яких є забезпечення високої точності вимірювання, і розглядаються методи оптимального синтезу гіростабілізаторів з урахуванням умов експлуатації. У праці [3] оцінюються підходи до стабілізації двох груп вимірювальних пристроїв, а саме пеленгаційних пристроїв та навігаційних датчиків, причому акцент робиться саме на стабілізації пеленгаційних пристроїв, тобто візирів, антен радіолокаторів, секстантів, телескопів та ін. Праця [3] спрямована на дослідження стабілізації вимірювальних пристроїв в умовах їх застосування на судні, яке піддається дії морського хвилювання, хоча викладені у цій праці загальні підходи можуть бути поширені і на рухомі об'єкти іншого типу.

Сучасні підходи до створення систем стабілізації та навігації подано у працях [4–7].

#### Математична модель інформаційно-вимірювального комплексу на рухомій основі

Під час створення моделі вводять такі основні припущення:

1) за модель об'єкта керування беруть корисне навантаження, момент інерції якого приводиться до вала двигуна з урахуванням передавального числа редуктора;

2) модель гіроскопічного вимірювача кутової швидкості визначають статичною характеристикою волоконно-оптичного гіроскопа;

3) модель широтно-імпульсного модулятора вважають лінійною.

Математична модель платформної системи стабілізації інформаційно-вимірювального комплексу з урахуванням усіх каналів (рискання,

тангажа, крену) може бути створена на підставі рівнянь руху платформи в інерціальному просторі. Моменти керування формуються на підставі обчислених складових відносної кутової швидкості платформи, які визначають складовими вимірюваної абсолютної кутової швидкості об'єкта стабілізації.

Рух об'єкта стабілізації, тобто платформи може бути описаний системою диференціальних рівнянь [8]

$$\begin{aligned}
 & J_x \dot{\omega}_{xp} - J_{xy} \dot{\omega}_{yp} - J_{xz} \dot{\omega}_{zp} + (J_z - J_y) \omega_{yp} \omega_{zp} + \\
 & + J_{yz} (\omega_{zp}^2 - \omega_{yp}^2) + J_{xy} \omega_{xp} \omega_{zp} - J_{xz} \omega_{xp} \omega_{yp} = M_{xp}; \\
 & J_y \dot{\omega}_{yp} - J_{zy} \dot{\omega}_{zp} - J_{xy} \dot{\omega}_{xp} + (J_x - J_z) \omega_{xp} \omega_{zp} - f_x \omega_{xp} + \\
 & + J_{yz} (\omega_{zp}^2 - \omega_{yp}^2) + J_{xy} \omega_{xp} \omega_{zp} - \\
 & - J_{xz} \omega_{xp} \omega_{yp} = M_{yp}; \\
 & J_z \dot{\omega}_{zp} - J_{xz} \dot{\omega}_{xp} - J_{yz} \dot{\omega}_{yp} + (J_y - J_x) \omega_{xp} \omega_{yp} + \\
 & + J_{xy} (\omega_{yp}^2 - \omega_{xp}^2) + J_{xz} \omega_{yp} \omega_{zp} - J_{yz} \omega_{xp} \omega_{zp} = M_{zp},
 \end{aligned}$$

де  $J_x, J_y, J_z$  – осьові моменти інерції платформи відносно її власних осей;

$J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}$  – відцентрові моменти інерції платформи.

Положення системи координат, зв'язаної зі стабілізованою в інерціальному просторі платформою  $O X_n Y_n Z_n$ , відносно вихідної системи координат  $O X_r Y_r Z_r$  визначають послідовністю трьох поворотів на кути  $\psi, \vartheta, \gamma$ , як це показано на рис. 1.

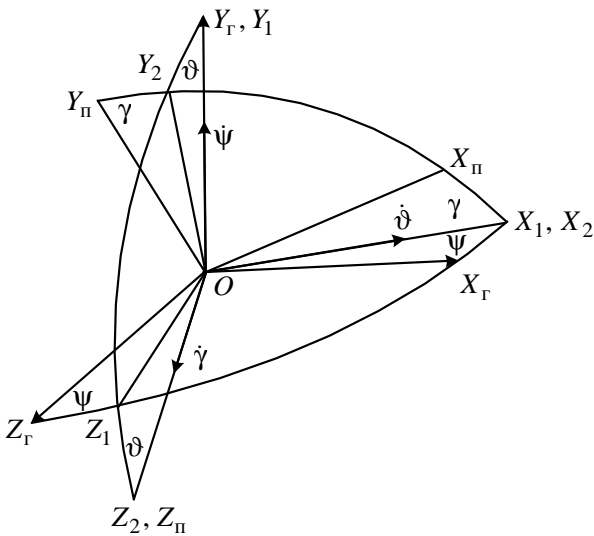


Рис. 1. Послідовність поворотів, що визначає положення стабілізованої платформи

У разі цього відповідні матриці напрямних косинусів набувають вигляду

$$\begin{matrix}
 & X_1 & Y_1 & Z_1 \\
 \mathbf{A}_1 = & X_r & \cos \psi & 0 & \sin \psi \\
 & Y_r & 0 & 1 & 0 \\
 & Z_r & -\sin \psi & 0 & \cos \psi
 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix}
 & X_2 & Y_2 & Z_2 \\
 \mathbf{A}_2 = & X_1 & 1 & 0 & 0 \\
 & Y_1 & 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\
 & Z_1 & 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta
 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix}
 & X_n & Y_n & Z_n \\
 \mathbf{A}_3 = & X_2 & \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\
 & Y_2 & \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\
 & Z_2 & 0 & 0 & 1
 \end{matrix}$$

На підставі цих співвідношень матриці напрямних косинусів осей  $X_n Y_n Z_n$  відносно осей  $X_r Y_r Z_r$  та  $X_n Y_n Z_n$  відносно осей  $X_r Y_r Z_r$  є такими:

$$\begin{matrix}
 & X_n \\
 \mathbf{A}_1 = & X_r & \cos \psi \cos \gamma + \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma \\
 & Y_r & \cos \vartheta \sin \gamma \\
 & Z_r & -\sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma
 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix}
 & Y_n \\
 \mathbf{A}_2 = & X_r & -\cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma \\
 & Y_r & \cos \vartheta \cos \gamma \\
 & Z_r & \sin \psi \sin \gamma + \cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma
 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix}
 & Z_n \\
 \mathbf{A}_3 = & X_r & \sin \psi \cos \vartheta \\
 & Y_r & -\sin \vartheta \\
 & Z_r & \cos \psi \cos \vartheta
 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix}
 & X_r \\
 \mathbf{A}_1^T = & X_n & \cos \psi \cos \gamma + \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma \\
 & Y_n & -\cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma \\
 & Z_n & \sin \psi \cos \vartheta
 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix}
 & Y_r \\
 \mathbf{A}_2^T = & X_n & \cos \vartheta \sin \gamma \\
 & Y_n & \cos \vartheta \cos \gamma \\
 & Z_n & -\sin \vartheta
 \end{matrix}$$

$$\mathbf{A}_3^T = \begin{matrix} X_{\Pi} \\ Y_{\Pi} \\ Z_{\Pi} \end{matrix} \begin{matrix} Z_r \\ -\sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma \\ \sin \psi \sin \gamma + \cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma \\ \cos \psi \cos \vartheta \end{matrix}$$

Кутові швидкості, які має відпрацьовувати система стабілізації, визначають у такий спосіб. Якщо  $\omega$  – кутова швидкість платформи у кардановому підвісі, на якій встановлюється інформаційно-вимірювальний комплекс із вимірювачами кутової швидкості об’єкта в інерціальному просторі, а  $\Omega$  – кутова швидкість платформи під дією моментів керування, визначених системою стабілізації та діючих за осями рамок карданового підвісу, умова точної стабілізації набуває вигляду [3]  $\Omega + \omega = 0$ .

Якщо вважати, що швидкість об’єкта носія інерціальної стабілізованої платформи задається виразом  $\omega_{\Pi} = \omega_x X_r + \omega_y Y_r + \omega_z Z_r$ , а перехід до нового положення інерціальної стабілізованої платформи у просторі відповідно до рис. 1 відбувається на кути  $\psi, \vartheta, \gamma$ , то швидкості всіх рамок карданового підвісу визначатимуться в такий спосіб

$$\begin{bmatrix} \omega_{\psi x} \\ \omega_{\psi y} \\ \omega_{\psi z} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1^T \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + \mathbf{A}_1^T \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \omega_{\vartheta x} \\ \omega_{\vartheta y} \\ \omega_{\vartheta z} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1^T \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + \mathbf{A}_2^T \left( \mathbf{A}_1^T \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\vartheta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right);$$

$$\begin{bmatrix} \omega_{\gamma x} \\ \omega_{\gamma y} \\ \omega_{\gamma z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{\vartheta x} \\ \omega_{\vartheta y} \\ \omega_{\vartheta z} \end{bmatrix} + \mathbf{A}_3^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} =$$

$$= \mathbf{A}_3^T \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1^T \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + \mathbf{A}_3^T \left( \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1^T \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{A}_2^T \begin{bmatrix} \dot{\vartheta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \mathbf{A}^T \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\vartheta} \cos \gamma + \dot{\psi} \cos \vartheta \sin \gamma \\ -\dot{\vartheta} \sin \gamma + \dot{\psi} \cos \vartheta \cos \gamma \\ \dot{\gamma} - \dot{\psi} \sin \vartheta \end{bmatrix}.$$

При цьому послідовність поворотів під час стабілізації буде визначатись відповідно до рис. 2.

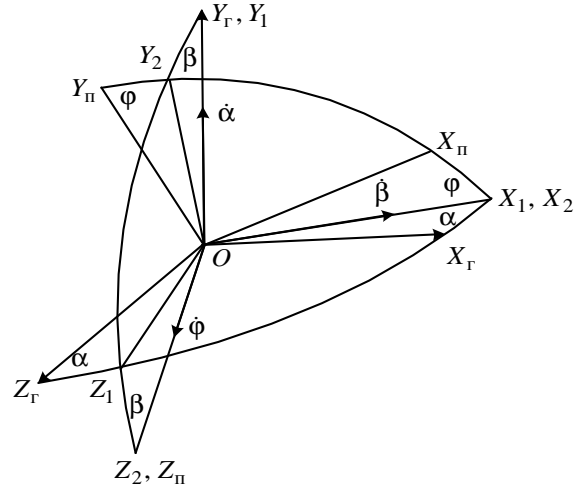


Рис. 2. Послідовність поворотів осей карданового підвісу стабілізованої платформи

Перша складова отриманої формули являє собою проекції переносної кутової швидкості платформи на зв’язані з нею осі, а друга складова – відповідні проекції відносної кутової швидкості платформи. Для досліджуваного випадку вважається, що осі рухомого об’єкта збігаються з осями карданового підвісу інерціальної стабілізованої платформи.

Відповідно до рис. 2 вектор кутової швидкості стабілізації визначатиметься виразом

$$\Omega = \alpha Y_1 + \beta X_1 + \phi Z_2,$$

де  $\alpha, \beta, \phi$  – кутові швидкості поворотів зовнішньої і внутрішньої рамок карданового підвісу та самої платформи.

Умова точної стабілізації в проекціях на осі платформи має вигляд

$$\Omega_{x_{\Pi}} + \omega_{x_{\Pi}} = 0; \Omega_{y_{\Pi}} + \omega_{y_{\Pi}} = 0; \Omega_{z_{\Pi}} + \omega_{z_{\Pi}} = 0. \quad (1)$$

Проекції швидкості стабілізації платформи на її власні осі відповідно до рис. 2 можна визначити за такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \Omega_{x_{\Pi}} &= \beta \cos \gamma + \alpha \cos \vartheta \sin \gamma; \\ \Omega_{y_{\Pi}} &= -\beta \sin \gamma + \alpha \cos \vartheta \cos \gamma; \\ \Omega_{z_{\Pi}} &= \phi - \alpha \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (2)$$

На підставі співвідношень (2) з урахуванням рівнянь (1) можна отримати формули для визначення кутової швидкості платформи:

$$\begin{aligned} -\omega_{x_{п}} &= \dot{\beta} \cos \gamma + \dot{\alpha} \cos \vartheta \sin \gamma; \\ -\omega_{y_{п}} &= -\dot{\beta} \sin \gamma + \dot{\alpha} \cos \vartheta \cos \gamma; \\ -\omega_{z_{п}} &= \dot{\phi} - \dot{\alpha} \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (3)$$

На підставі виразів (3) після деяких перетворень можна отримати диференціальні рівняння, що описують процес змінювання кутів повороту осей рамок карданового підвісу стабілізованої платформи:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\frac{1}{\cos \vartheta} (\omega_{x_{п}} \sin \gamma + \omega_{y_{п}} \cos \gamma); \\ \dot{\beta} &= -\omega_{x_{п}} \cos \gamma + \omega_{y_{п}} \sin \gamma; \\ \dot{\phi} &= \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} (\omega_{x_{п}} \sin \gamma + \omega_{y_{п}} \cos \gamma) - \omega_{z_{п}}. \end{aligned}$$

Обчислювальну схему моделі інерціальної стабілізованої платформи у режимі стабілізації з урахуванням усіх її каналів показано на рис. 3. Результати моделювання подано на рис. 4.

Під час складання моделі платформи у кардановому підвісі необхідно враховувати, що моменти керування формуються за рамками ристання, тангажа, крену відповідно, а власне модель платформи визначається в проєкціях кутової швидкості на її власні осі. Вирази для визначення моментів можна визначити на підставі таких перетворень:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M_{x_{п}} \\ M_{y_{п}} \\ M_{z_{п}} \end{bmatrix} &= \mathbf{A}_3^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{z\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{z\gamma} \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} M_{x_{п}} \\ M_{y_{п}} \\ M_{z_{п}} \end{bmatrix} &= \mathbf{A}_3^T \mathbf{A}_2^T \begin{bmatrix} M_{x\vartheta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma M_{x\vartheta} \\ -\sin \gamma M_{x\vartheta} \\ 0 \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} M_{x_{п}} \\ M_{y_{п}} \\ M_{z_{п}} \end{bmatrix} &= \mathbf{A}_3^T \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1^T \begin{bmatrix} 0 \\ M_{y\psi} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta \sin \gamma M_{y\psi} \\ \cos \vartheta \cos \gamma M_{y\psi} \\ -\sin \vartheta M_{y\psi} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

На підставі отриманих виразів співвідношення для моментів керування платформою в проєкціях на її власні осі можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned} M_{x_{п}} &= \cos \gamma M_{x\vartheta} + \cos \vartheta \sin \gamma M_{y\psi}; \\ M_{y_{п}} &= -\sin \gamma M_{x\vartheta} + \cos \vartheta \cos \gamma M_{y\psi}; \\ M_{z_{п}} &= M_{z\gamma} - \sin \vartheta M_{y\psi}. \end{aligned}$$

У досліджуваній системі керування виконуються за сигналом абсолютної швидкості стабілізованого об'єкта, що вимірюється гіроскопічним датчиком.

Вихідний сигнал регулятора надходить на широтно-імпульсний модулятор, на виході якого формується сигнал керування, що надходить на обмотку двигуна.

Рух об'єкта стабілізації вважається відносним, рух об'єкта, на якому встановлюється стабілізована платформа, – переносним.

Створення математичних моделей систем керування взагалі та досліджуваної системи зокрема неможливе без урахування типових нелінійностей (зони нечутливості, насичення, гістерезису та ін.). Такий підхід забезпечує відповідність створюваної моделі реальній апаратурі.

Одним з найкращих засобів створення моделей із урахуванням усіх нелінійностей, притаманних реальній апаратурі, є пакет прикладних програм Simulink, який є складовою частиною системи MATLAB.

Але синтез системи на ранніх етапах її створення доцільно виконувати засобами пакета тієї ж системи Control Toolbox та Robust Control Toolbox, до яких входить великий набір процедур, що дозволяють реалізувати аналіз й оптимальний синтез систем керування та стабілізації.

При цьому можливе проектування цифрових оптимальних регуляторів для неперервної системи, що є одним з найважливіших завдань сучасного приладобудування з огляду на стрімкий розвиток сучасної комп'ютерної техніки.

Як перевагу зазначених пакетів прикладних програм слід також відзначити можливість реалізації робастного керування, що є актуальним для синтезу систем досліджуваного типу.



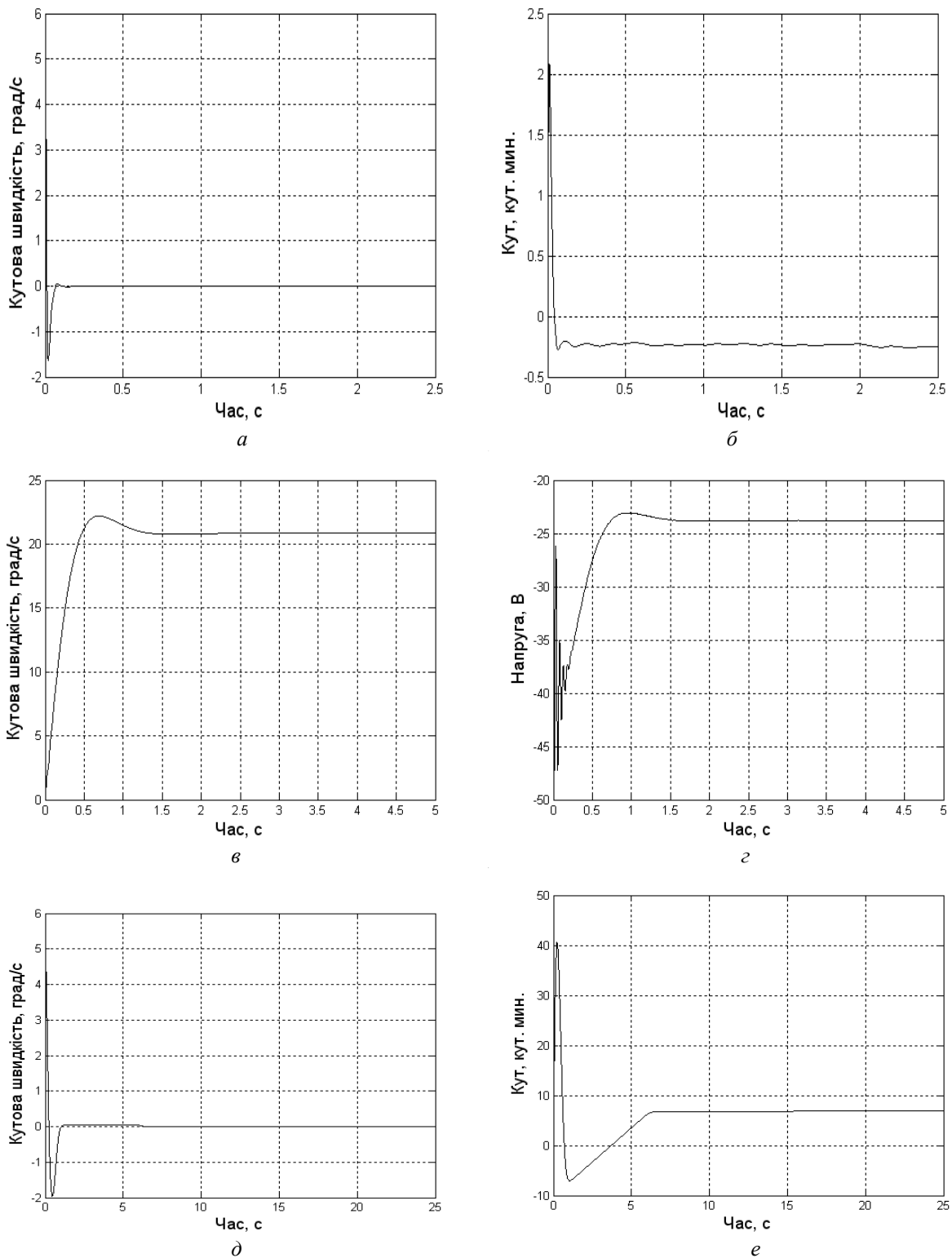


Рис. 4. Результати моделювання процесів стабілізації та виставлення: відпрацювання заданої кутової швидкості каналу рискання (*a*) та похибка визначення кутового положення (*б*) у режимі стабілізації; відпрацювання заданої кутової швидкості (*в*) та відповідний сигнал керування (*г*) у режимі виставлення у просторі; відпрацювання заданої кутової швидкості каналу рискання (*д*) та похибка визначення кутового положення (*е*) у режимі виставлення платформи відносно площини горизонту

## Висновки

Проаналізовано особливості платформної системи стабілізації інформаційно-вимірювального комплексу призначеного для експлуатації на рухомих об'єктах широкого класу.

Створено математичну модель такої системи та проведено її моделювання.

## Література

1. Пельпор Д.С. Гироскопические системы ориентации и навигации / Д.С. Пельпор. – М.: Машиностроение, 1982. – 165 с.

2. Блохин Л.Н. Оптимальные стабилизаторы: учеб. пособие / Л.Н. Блохин, А.А. Туник. – К.: КНИГА, 1983. – 44 с.

3. Ривкин С.С. Стабилизация измерительных устройств на качающемся основании / С.С. Ривкин. – М.: Наука, 1978.

4. Hilkert J.M. Inertially stabilized platform technology / J.M. Hilkert // IEEE Control Systems. – No 1, Vol. 28. – 2008. – P. 26–46.

5. Masten M.K. Inertially stabilized platforms for optical imaging systems / M.K. Masten // IEEE Control Systems. – No 1, Vol. 28. – 2008. – P. 47–64.

6. Debruin D. Control systems for mobile satcom antennas / D. Debruin // IEEE Control Systems, 2008. – No 1, Vol. 28.

7. Wang H.G. Strategic inertial navigation systems / H.G. Wang, T.C. Williams // IEEE Control Systems, 2008. – No 1, Vol. 28. –

8. Лурье А. И. Аналитическая механика / А.И. Лурье. – М.: Госиздат, 1961. – 822 с.

Стаття надійшла до редакції 24.12.09.

**О.А. Сущенко**

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО КОМПЛЕКСА НА ПОДВИЖНОМ ОСНОВАНИИ

Национальный авиационный университет

### информационно-измерительный комплекс, платформа, стабилизация

Статья посвящена стабилизации современных информационно-измерительных систем. Для информационно-измерительных систем, установленных на подвижном основании, повышение их точности невозможно без стабилизации системы. В статье представлена математическая модель системы стабилизации, которая управляет положением информационно-измерительной системы, установленной на платформе в карданном подвесе с тремя степенями свободы. Использование стабилизированных платформ, установленных на основании, которое осуществляет угловое движение, обеспечивает высокую точность стабилизации. Математическая модель включает описание динамики и кинематики платформы в карданном подвесе. В статье приведены для моментов управления, прикладываемых к внешней и внутренней рамкам подвеса и платформе, определение скоростей стабилизации и алгоритм их определения. Эффективность предложенного подхода обеспечивается результатами моделирования, которые можно использовать в области стабилизации измерительных устройств широкого класса.

**Olga A. Sushchenko**

## MATHEMATICAL MODEL OF STABILIZATION SYSTEM FOR DATA-MEASURING COMPLEX ON MOVING BASE

National Aviation University

### data-measuring complex, platform, stabilization

The paper is devoted to actual problem of measuring-data system stabilization. The trend of the modern measuring-data development is improvement of their accuracy. For measuring-data systems mounted at the moving base the further progress of this tendency is impossible without system stabilization. The paper represents mathematical model of the stabilization system which controls position of data-measuring system mounted at platform in the gimbals with three degrees of freedom. In its turn stabilized platform with stabilized data-measuring system is mounted at the base which carries out angular motion. Using of such platforms provides high accuracy of the stabilization. Mathematical model includes both dynamic and kinematic descriptions of the gimballed platform. In the paper the important obtained results are represented such as expressions for control moments applied to outer gimbal, inner gimbal and platform. Another important result is determination of stabilization speeds and corresponding algorithm of these speeds determination. Efficiency of suggested approach is proved by the represented simulation results. The obtained results may be applied in area of wide class measuring devices stabilization.