

УДК 539.4

В.В. Астанін, д.т.н., проф.
М.М. Бородачов, д.т.н., проф.
С.Ю. Богдан, к.т.н., доц.

РОЗРОБЛЕННЯ ЧИСЛОВОГО МЕТОДУ ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ В ЕЛЕМЕНТАХ З ТРІЩИНАМИ

Національний авіаційний університет
 E-mail: aviacosm@nau.edu.ua

Розглянуто задачу про визначення коефіцієнта інтенсивності напружень у елементах конструкцій з тріщинами. Запропоновано числовий метод його обчислення з використанням методу скінчених елементів. Проаналізовано декілька варіантів зразків.

коефіцієнт інтенсивності напружень, лінійна механіка руйнування, напруження, теорія пружності, тріщина, числовий метод скінчених елементів

Постановка проблеми

Розроблення та впровадження принципу безпечного пошкодження можливі тільки з використанням методів механіки руйнування. Відповідно до загальноновизнаних положень напружений стан тіл з тріщинами повністю характеризується коефіцієнтом інтенсивності напружень (КІН). На попередньому визначенні КІН ґрунтуються майже всі відомі нині критерії крихкого та квазікрихкого руйнування, які описують зростання тріщин від утомленості.

Для обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень пропонуються різні аналітичні та числові методи [1–3]. Великий довідниковий матеріал щодо аналізу КІН наведено в працях [4; 5]. Проте під час виконання практичних розрахунків, особливо для тіл складної форми, елементів конструкцій з пошкодженнями виникає потреба в більш зручному методі визначення КІН, для отримання точніших результатів.

Числовий метод визначення КІН в елементах конструкцій з тріщинами з використанням методу скінчених елементів дозволяє значно спростити методіку розрахунків та розширити дослідження.

Основні положення дослідження

Розглянемо необмежене пружне тіло в умовах плоскої задачі теорії пружності. У тілі є вузька внутрішня тріщина довжиною $2a$ (рис. 1).

Нехай тріщина поширюється під впливом тиску $p(x)$, який може змінюватися вздовж тріщини.

Вважаємо, що існує симетрія відносно осі x , тому задача зводиться до визначення переміщень і напружень в пружній півплощині $y \geq 0$.

Граничні умови в цьому випадку мають вигляд, якщо $y = 0$:

$$\tau_{xy} = 0, \quad -\infty < x < \infty;$$

$$\sigma_y = -p(x), \quad |x| \leq a;$$

$$v = 0, \quad |x| \geq a,$$

де v – проекція вектора переміщень на вісь y .

Розв'язуючи змішану задачу теорії пружності, знаходимо, якщо $p(x) = p = \text{const}$:

$$\sigma_y(x, 0) = -p, \quad \text{якщо } |x| < a,$$

$$\sigma_y(x, 0) = p \left[\frac{|x|}{(x^2 - a^2)^{1/2}} - 1 \right], \quad \text{якщо } |x| > a \quad (1)$$

Епюру напружень σ_y , визначених за формулою (1), показано на рис. 1. Напруження σ_y наближається до нескінченності біля вершини тріщини, тобто має особливість у кінчику.

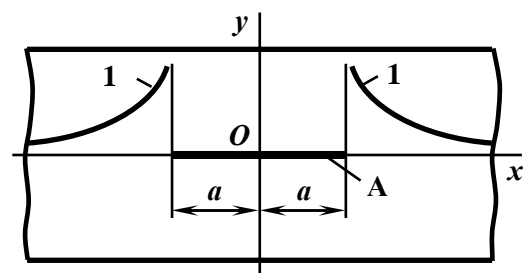


Рис.1. Пружне тіло з тріщиною A :
 1 – епора σ_y

Для встановлення характеру особливості нормального напруження біля кінчика тріщини знайдемо асимптотичне зображення для σ_y , якщо $x \rightarrow a + 0$. Спрямовуючи в формулі (1) x до $a + 0$ і відкидаючи сталий доданок, знаходимо

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{pa^{1/2}}{2^{1/2}(x-a)^{1/2}}, x \rightarrow a + 0. \quad (2)$$

Якщо ввести позначення

$$K_1 = p(\pi a)^{1/2}, \quad (3)$$

то формула (2) матиме вигляд:

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{K_1}{(2\pi)^{1/2}(x-a)^{1/2}}, x \rightarrow a + 0, \quad (4)$$

де K_1 – КІН нормального відриву.

За формулою (3) визначаємо КІН для площини з одиночною тріщиною, коли до меж тріщини прикладено рівномірний тиск p , або коли площа підлягає рівномірному розтяганню по нормалі до лінії тріщини. У цьому разі КІН залежить від тиску і розміру тріщини. Формула (4) зберігається і в тих випадках, коли тріщина міститься в пружному тілі скінченних розмірів, тоді як тиск $p(x)$ може бути не сталим. Однак у таких випадках вираз для K_1 буде відрізнятися від формули (3). Для скінченного тіла КІН залежить і від його розмірів.

Уведення поняття «КІН» виявилось дуже корисним в лінійній механіці руйнувань. Коефіцієнт інтенсивності напружень можна визначати як за відомими напруженнями, так і за переміщеннями. Із формули (4) знаходимо

$$K_1 = \lim_{x \rightarrow a+0} \left[(2\pi)^{1/2} (x-a)^{1/2} \sigma_y(x, 0) \right]. \quad (5)$$

Формула (5) дозволяє визначити КІН нормального відриву за відомими напруженнями. Коефіцієнт K_1 можна знайти і за відомими переміщеннями v :

$$K_1 = \frac{(2\pi)^{1/2} \mu}{1 + \chi} \lim_{x \rightarrow a-0} \left[\frac{v(x, +0) - v(x, -0)}{(a-x)^{1/2}} \right]; \quad (6)$$

$$K_1 = -\frac{2\mu}{1 + \chi} \lim_{x \rightarrow a-0} \left\{ (2\pi)^{1/2} (a-x)^{1/2} \times \frac{\partial}{\partial x} [v(x, +0) - v(x, -0)] \right\}, \quad (7)$$

де μ – модуль зсуву;

$\chi = 3 - 4\nu$ – для плоскої деформації;

$\chi = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ – для узагальненого плоского напруженого стану;

ν – коефіцієнт Пуассона.

Для визначення КІН поперечного K_2 і поздовжнього зсуву K_3 існують формули, аналогічні формулам (5) – (7) [4].

Числовий метод визначення коефіцієнта інтенсивності напружень

У межах лінійної механіки руйнування, яка розглядає модель ідеально пружного тіла і зображує тріщину у вигляді розрізу нульової товщини, поверхні якого вільні від напружень, задача, яка розглядається, зводиться до крайової задачі теорії пружності.

Коефіцієнт K_1 є основною базовою характеристикою напружено-деформованого стану матеріалу в околі тріщини, що має надзвичайно важливе значення в механіці руйнування.

Хоча реальні матеріали і не виявляють ідеально пружної поведінки під час руйнування, тим не менше моделі лінійної механіки руйнування залишаються для них правильними за умови обмеженості зони пластичних процесів (за умови реалізації схеми квазікрихкого руйнування). Це дозволяє вважати, що розмір зони передруйнування та стан матеріалу в ній у цілому контролюється КІН [4].

Мета роботи – визначення величини K_1 для тіл з тріщинами різної конфігурації на основі розв'язку відповідних крайових задач та порівняння отриманих результатів з відомими розв'язками.

Для задач, що розглядаються, отримати точний аналітичний розв'язок майже не можливо, тому для обчислення коефіцієнтів K_1 застосовувався числовий метод скінченних елементів (МСЕ) у формі метода переміщень, реалізований у програмних комплексах.

Для узагальненого плоского напруженого стану формула (6) перетворюється у форму, зручну для використання у разі застосування МСЕ:

$$K_1 = \frac{(2\pi)^{1/2} (1+\nu) \mu}{4} \cdot \frac{v\left(x, +\frac{\delta}{2}\right) - v\left(x, -\frac{\delta}{2}\right)}{(a-x)^{1/2}}, \quad (8)$$

де $v\left(x, +\frac{\delta}{2}\right)$ та $v\left(x, -\frac{\delta}{2}\right)$ – переміщення в точках біля вершини тріщини в напрямку осі y (рис. 2); δ – товщина тріщини.

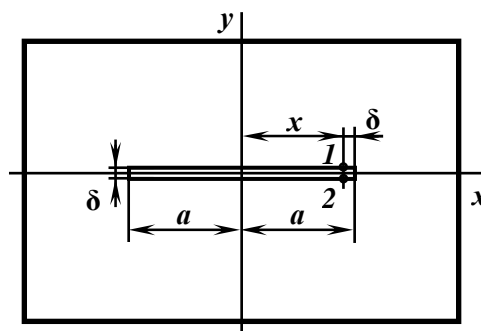


Рис. 2. Дослідження переміщень тіла біля вершини тріщини

У деяких програмних комплексах (ANSYS) КІН обчислюється за декількома точками біля вершини тріщини.

Задача обчислень полягала також у дослідженні оптимальної кількості точок та їх розміщенні біля вершини тріщини деформованого тіла під час визначення коефіцієнта K_1 і його порівнянні з відомими розв'язками.

Для розв'язання поставленої задачі та апробації запропонованого методу визначення КІН K_1 розглянуто два типи тіл з тріщинами:

- прямокутну пластину з центральною тріщиною (рис. 3, а);
- смугу з двома симетричними крайовими тріщинами при осьовому розтяганні нормальним напруженням $\sigma = 100$ МПа (рис. 3, б).

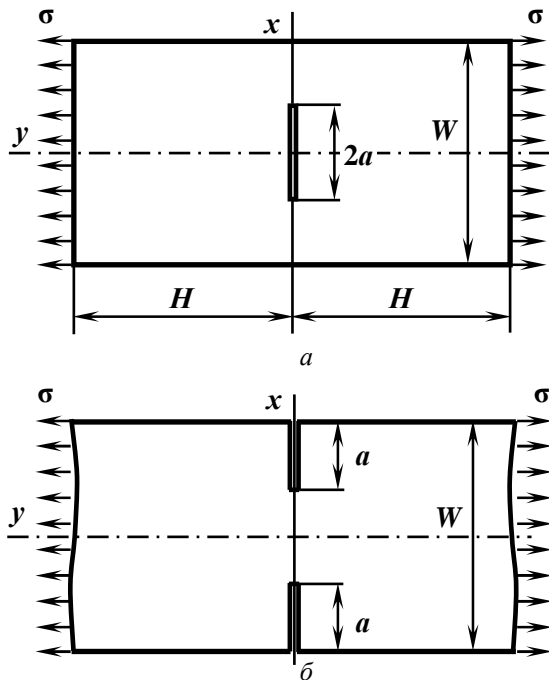


Рис. 3. Розрахункові схеми досліджуваних тіл при осьовому розтяганні:

а – прямокутна пластина з центральною тріщиною;
б – смуга з симетричними крайовими тріщинами

Товщина тіл $t = 3$ мм, ширина $W = 150$ мм. Для всіх варіантів припускалася товщина тріщини $\delta = 0,1$ мм.

Матеріал тіл – маловуглецева сталь з характеристиками:

$$\nu = 0,28;$$

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$\mu = 7,9 \cdot 10^4 \text{ МПа}.$$

Виконано аналіз напружено-деформованого стану пластини та смуги з використанням МСЕ та програмного комплексу.

Пластину та смугу, розбивали на скінченні елементи з автоматичним згущенням сітки навколо вершини тріщини (рис. 4) і мали такі розміри, що дозволяли дослідити деформаційну поведінку матеріалу тіл у зазначених точках біля кінчика тріщини.

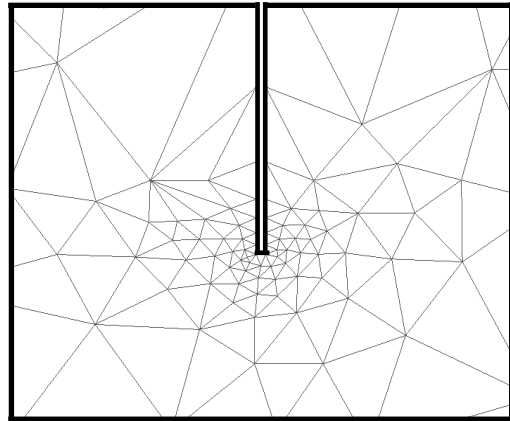


Рис. 4. Згущення сітки навколо вершини тріщини

Коефіцієнти K_1 для тріщин нормального відриву визначалися за формулою (8) та порівнювали з розв'язком [5] для пластини, отриманим сумісним методом розкладу комплексних потенціалів напруження і граничної колокації

$$K_1 = \sigma \sqrt{\pi a} F_1(\alpha, \beta), \quad (9)$$

та для смуги, отриманим методом об'ємних сил:

$$K_1 = \sigma \sqrt{\pi a} F_1(\alpha);$$

$$F_1(\alpha) = 1,122 - 0,154\alpha + 0,807\alpha^2 - 1,894\alpha^3 + 2,494\alpha^4;$$

$$\alpha = \frac{2a}{W};$$

$$\beta = \frac{2H}{W},$$

де $F_1(\alpha, \beta)$, $F_1(\alpha)$ – функції, які залежать від геометрії тіл та визначаються відповідно до праці [5].

Задані варіації коефіцієнтів α , β (табл. 1) дозволяли розширити область дослідження та вплив геометрії на КІН.

Таблиця 1

Залежність коефіцієнтів α , β
від довжини тріщини a та розміру тіла H

α	a , мм	β	H , мм
0,4	30,0	1	75,0
0,3	22,5	1,2	90,0
0,2	15,0	1,5	112,5
0,1	7,5	2	150

Результати дослідження впливу кількості точок та їх розміщення біля вершини тріщини пластини на величину КІН показали, що оптимальним достатнім варіантом є визначення переміщень уздовж осі у за двома точками, розташованими на відстані δ від кінця тріщини (рис. 2).

Результати аналізу двох типів розташування шести точок показано на рис. 5.

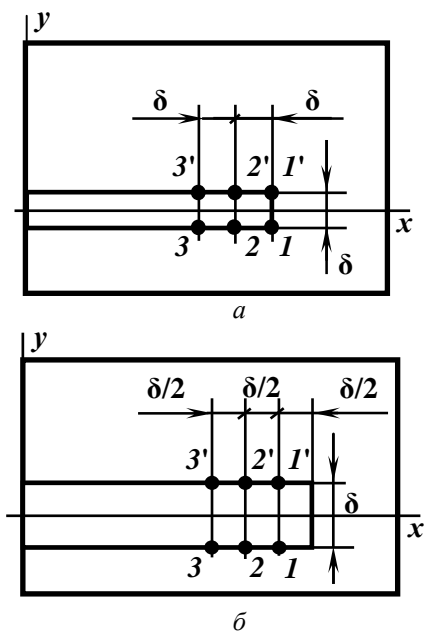


Рис. 5. Типи розміщення характерних точок на поверхні тріщини:

а – I тип;
б – II тип

Порівняльний аналіз коефіцієнтів K_1 , отриманих запропонованим способом (8) та визначених за формулою (9) [5], для пластини при $\beta = 1,5$ наведено в табл. 2 та на рис. 6.

Отримані результати порівняння величин K_1 свідчать про більшу точність визначення значень КІН за двома точками біля вершини тріщини. Розбіжність не перевищує 4 % [5].

Таблиця 2

Порівняльний аналіз визначення K_1 пластини ($\beta = 1,5$)

α	а, мм	КІН K_1 , МПа · м ^{1/2}						
		за формулою (9)	за двома точками, за формулою (8)	Відсоток	за шістьма точками		Відсоток	
					I тип	II тип	I тип	II тип
0,4	30,0	34,45	33,08	3,97	30,73	32,76	10,78	4,89
0,3	22,5	28,34	27,50	2,97	25,54	27,19	9,89	4,08
0,2	15,0	22,34	21,67	2,98	20,09	21,48	10,07	3,83
0,1	7,5	15,46	15,08	2,43	14,00	14,95	9,40	3,25

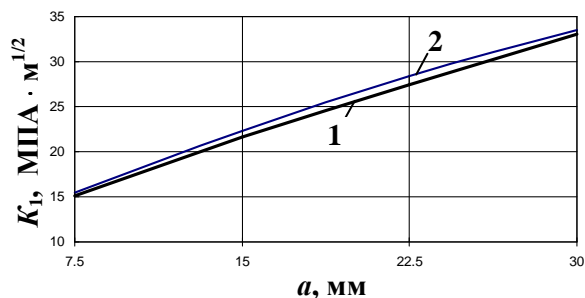


Рис. 6. Порівняння величин K_1 в пластині, якщо $\beta = 1,5$:

1 – визначені за формулою (8);
2 – визначені за формулою (9)

Для отримання широкого спектру результатів проаналізовано напружено-деформований стан пластин та смуг з тріщинами відповідно до табл. 1 та виконано порівняльний аналіз значень КІН K_1 . Результати аналізу наведено в табл. 3 для пластин та табл. 4 для смуг залежно від довжини відповідних тріщин.

Таблиця 3

Порівняння величин K_1 для пластин

β	α	а, мм	K_1 , МПа · м ^{1/2}		Відсоток
			за формулою (8)	за формулою (9)	
1	0,4	30,0	34,345	37,331	7,9
	0,3	22,5	27,945	29,857	6,4
	0,2	15,0	21,672	22,902	5,3
	0,1	7,5	15,081	15,548	3,0
1,2	0,4	30,0	33,648	35,550	5,3
	0,3	22,5	27,438	28,926	5,1
	0,2	15,0	21,735	22,555	3,6
1,5	0,1	7,5	15,081	15,503	2,7
	0,4	30,0	34,445	33,078	3,9
	0,3	22,5	28,342	27,502	2,9
	0,2	15,0	22,338	21,672	2,9
	0,1	7,5	15,457	15,081	2,4

Таблиця 4

Порівняння величин K_1 для смуг

α	а, мм	K_1 , МПа · м ^{1/2}		Відсоток
		за формулою (8)	за формулою (9)	
0,4	30,0	33,205	34,750	4,5
0,3	22,5	28,389	29,710	4,5
0,2	15,0	23,066	24,139	4,5
0,1	7,5	16,476	17,085	3,6

Висновки

Запропоновано числовий метод визначення КІН для елементів конструкцій з тріщинами. Розглянуто декілька варіантів розміщення точок під час визначення поля переміщень на поверхні тріщини. Порівняльний аналіз та числові розрахунки показують, що оптимальним є випадок, коли переміщення визначаються у двох точках (рис. 2, точки 1 та 2), що розміщені від вершини тріщини на відстані її товщини δ . При цьому похибка, як правило, не перевищує 5%. Запропонований метод обчислення КІН (8) можна широко використовувати під час дослідження граничного стану в елементів із тріщинами.

Література

1. *Партон В.З.* Механика упруго-пластического разрушения: Основы механики разрушения: уч. пособие / В.З. Партон, Е.М. Морозов. – М.: Изд-во ЛКИ, 2008. – 349 с.
2. *Сиратори М.* Вычислительная механика разрушения / М. Сиратори, Т. Миеси, Х. Мацусита. – М.: Мир, 1986. – 334 с.
3. *Бородачов Н.М.* Обобщение метода плоских сечений для определения коэффициента интенсивности напряжений / Н.М. Бородачов, М.П. Кулий // Проблемы прочности. – 1982. – № 2. – С. 23–27.
4. *Механика* разрушения и прочность материалов: в 4 т. / под ред. В.В. Панасюка. – К.: Наук. думка, 1988. – Т. 2. – 619 с.
5. *Мураками Ю.* Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: в 2 т / Ю. Мураками: – М.: Мир, 1990. – Т. 1. – 448 с.

Стаття надійшла до редакції 21.09.09.

В.В. Астанин, Н.М. Бородачев, С.Ю. Богдан

РАЗРАБОТКА ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЯ В ЭЛЕМЕНТАХ С ТРЕЩИНАМИ

Национальный авиационный университет

коэффициент интенсивности напряжений, линейная механика разрушения, напряжение, теория упругости, трещина, численный метод конечных элементов

Применены методы линейной механики разрушения при внедрении принципа безопасного повреждения. Предложено определение коэффициентов интенсивности напряжений с помощью численного метода. Показано применение этого метода к элементам конструкций с повреждениями и трещинами. Проведен анализ напряженно-деформированного состояния пластин и полос с трещинами. Определены величины коэффициентов интенсивности напряжений K_1 для тел разной конфигурации на основе решения соответствующих краевых задач. Выполнен сравнительный анализ полученных результатов с известными решениями. Рассмотрено несколько вариантов расположения точек при определении поля перемещений на поверхности трещины.

Vyacheslav V. Astanin, Mikola M. Borodachov, Svitlana Yu. Bogdan

DEVELOPMENT OF A NUMERICAL METHOD FOR DETERMINATION OF STRESS INTENSITY FACTOR INTO THE MEMBERS WITH CRACKS

National Aviation University

crack, linear fracture mechanics, numerical finite element method, stress, stress intensity factor, theory of elasticity

The linear fracture mechanics methods were applied for implementation a principle called safe damage. The problem of stress intensity coefficients determination was considered and a numerical method for their calculation was proposed. An application of the method for structure members with damages and cracks was shown. The analysis of stress-strain states for plates and strips with cracks were fulfilled. The values of stress intensity coefficients K_1 for bodies in different configuration were determined based on solution of proper boundary problems and comparison obtained results with known solutions was carried out. Several options of points location at determination displacements fields on crack surface were analyzed.