

СУЧАСНІ АВІАЦІЙНО-КОСМІЧНІ ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 629.735.03.017:620.171.3:539.4.014

¹Н.С. Кулик, д.т.н., проф.
²А.Г. Кучер, д.т.н., проф.
³В.Е. Мильцов, н.с.

**ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ
ПРИ ДЕЙСТВИИ СТАТИЧЕСКИХ И ЦИКЛИЧЕСКИХ НАГРУЗОК**

Национальный авиационный университет

¹E-mail:kms@nau.edu.com²E-mail:kucher@nau.edu.com³E-mail:miltsov@ukr.net

Предложен вероятностный подход к анализу процессов накопления повреждений. Рассмотрены методы построения вероятностных моделей прочности материалов деталей. Приведены вероятностные модели поврежденности и разрушения деталей. Исследованы вероятностные линейные и нелинейные модели суммирования независимых и зависимых случайных поврежденностей, их последовательностей и процессов. Рассмотрены методы расчета вероятностных характеристик прочностной надежности коэффициентов запаса прочности, выработки ресурса и эквивалентной наработки и их связь с накопленной поврежденностью.

вероятностные модели поврежденности, выносливость, длительная прочность, методы накопления поврежденностей, многокомпонентное нагружение, сложное напряженное состояние, характеристики прочностной надежности

Постановка проблемы

Традиционные методы расчета на прочность и долговечность деталей и узлов газотурбинных двигателей (ГТД) включают расчеты при однократном статическом нагружении, много- и малоцикловом усталостном нагружении, а также оценку долговечности (живучести) деталей при наличии в них трещин. Они основаны, с одной стороны, на оценке действующих на деталь напряжений и температур, с другой, на способности их материалов сопротивляться данному виду нагрузок.

В расчетах на прочность необходимо учитывать:

- конструкционные, технологические и эксплуатационные факторы.
- сложный (многоосный) нестационарный, многокомпонентный случайный характер нагружения;
- явление пластичности и ползучести;
- зависимость от предыстории нагружения;
- наличие концентраторов;
- действие высоких температур;
- механические свойства применяемых материалов;
- режимы и виды их термообработки и упрочнения.

Сложный характер взаимодействия конструктивных элементов с окружающей средой, между собой, случайная природа прочности материалов и условий эксплуатации двигателей, неточность сведений о характере теплонапряженного состояния и условиях разрушения деталей требуют в расчетах на прочность применения вероятностных методов анализа и использования показателей теории надежности.

Расчет характеристик поврежденности и надежности конструктивных элементов (КЭ) и узлов воздушных судов (ГТД) в настоящее время основан на статических моделях, которые не учитывают изменения напряженно-деформированного состояния и пределов прочности материала деталей во времени.

Введение фактора времени возможно на основе кинетических представлений о процессе накопления в материале детали необратимых повреждений механического, физического и химического происхождения.

Многообразие явлений, которые можно отнести к процессам поврежденности (усталость, растрескивание, накопление пластических деформаций, изнашивание, коррозия и др.), простота

математических моделей поврежденности и разрушения, которые связывают процессы накопления повреждений с действующими нагрузками, характеристиками прочности материала и условиями эксплуатации, позволяют использовать их для проведения прочностных расчетов с единых вероятностных позиций, отражающих изменения несущей способности КЭ во времени и в вероятностном пространстве.

Анализ методов оценки поврежденности и мониторинга ресурса с целью использования их в вероятностных расчетах позволяет выделить четыре основных направления исследования:

- разработка вероятностных моделей характеристик прочности материалов, которые бы отражали случайную природу прочности и были удобны для проведения расчетов;

- создание методов вероятностной оценки поврежденности за один элементарный (или полетный) цикл нагружения детали, которые служат для определения вероятностных характеристик средней линейной скорости накопления повреждения;

- разработка методов вероятностного суммирования повреждений за несколько (расчетное множество) полетных циклов;

- разработка методики оценки ресурса и других показателей работоспособности КЭ воздушных судов (ГТД) по известным вероятностным характеристикам накопленной поврежденности.

Такое деление задач исследования обусловлено, во-первых, необходимостью применения специальных математических методов для анализа соответствующих моделей, во-вторых, возможностью исследования различных по характеру процессов поврежденности и разрушения материалов деталей с единых позиций и применения их для анализа характеристик прочности и надежности как на этапах проектирования и доводки, так и на стадии эксплуатации.

Вероятностный подход к исследованию процессов накопления повреждений

Растущие требования к повышению прочности и росту долговечности деталей авиационных двигателей приводят к необходимости совершенствования методов расчета на прочность и надежность как на стадии проектирования, так и в процессе эксплуатации [1–9].

Для решения этих вопросов особое внимание уделяется разработке вероятностных подходов. Это связано, в первую очередь, со статистической природой прочности материалов.

Явления поврежденности и разрушения обнаруживают четкую вероятностную природу, начиная с атомно-молекулярного уровня и кончая уровнем конструкционной прочности. На прочностные свойства деталей оказывает влияние комплекс внутренних факторов, определяющих течение дислокационных, диффузионных и коррозионных процессов, перераспределение легирующих элементов, структурные превращения, старение и охрупчивание, упрочнение и разупрочнение материалов.

К факторам, влияющим на разброс прочностных свойств, можно также отнести механические дефекты материала, в частности, инородные включения, пустоты, микротрещины, концентраторы напряжений, несовершенство или неустойчивость технологического процесса.

Прочностные свойства конструкционных материалов неодинаковы для различных плавов и тем более для продукции различных заводов.

Так, циклическая долговечность при испытаниях на выносливость в одних и тех же условиях может изменяться на порядок и более. Эти факторы приводят к значительному статистическому разбросу характеристик прочности материалов деталей.

Воздушные суда летают на трассах различного профиля, в разных климатических условиях. При этом характеристики нагруженности конструктивных элементов, являющиеся функцией режимов работы, существенно зависят от внешних условий и интенсивности процессов эксплуатации.

Тепловое, силовое и химическое воздействия на конструктивные элементы носят также явно выраженный случайный характер, для определения влияния которого на характеристики надежности целесообразно проведение вероятностных расчетов.

Применение вероятностных методов для анализа характеристик поврежденности и надежности обусловлено тем, что проблема получения достоверных данных о нагруженности конструктивных элементов ГТД в процессе эксплуатации практически не может быть полностью решенной.

Сложный многоосный, многокомпонентный нестационарный спектр нагружения деталей, многократное чередование различных режимов работы двигателя не позволяют точно идентифицировать нагруженное состояние КЭ ГТД.

Кроме того, данные о нагруженности во время полета невозможно получить прямыми измерениями, а только через косвенные параметры, где наблюдается потеря точности в оценке характеристик нагруженности, особенно на переходных режимах.

Из-за несоответствия идеализированных схем, моделей и методов расчета реальным процессам нагружения, накопления повреждений и разрушения в оценках этих величин содержатся систематические ошибки. Поэтому получить наиболее достоверные оценки параметров нагруженности и оценить их точность можно только на основе вероятностно-статистических методов анализа.

Вероятностно-статистический подход к оценке характеристик прочности и надежности приводит к единому вероятностному критерию.

В качестве нормативных характеристик используют возможные отклонения действующих температур и напряжений, разброс характеристик материала.

Это, в свою очередь, создает условия для проведения анализа влияния различных факторов на выходные характеристики и возможность назначать более высокие вероятности неразрушения для более ответственных деталей.

На стадии проектирования расчет характеристик основан на статистических данных о прочности материалов, возмущающих внешних воздействиях и условиях эксплуатации деталей и узлов, аналогичных проектируемым.

Расчет дает возможность подобрать материалы, размеры и конструкционные формы деталей, технологические процессы для их обработки, которые бы обеспечили назначенные показатели надежности.

Большую роль при этом играют ограничения на стоимость материалов и комплектующих изделий, их вес, требования к безотказности и другие технико-экономические показатели.

В отличие от этапа проектирования, где используются данные о генеральной совокупности несозданных деталей и узлов, на стадии эксплуатации оценка характеристик надежности выполняется для конкретных работающих изделий.

Из-за естественного разброса свойств деталей, различных условий эксплуатации, предыстории нагружения индивидуальные показатели надежности лежат в широких пределах. Их оценка позволяет предупредить возможные отказы или непредвиденные достижения предельных состояний, а также более правильно планировать режимы эксплуатации двигателей, профилактические мероприятия и снабжение запасными частями.

Переход к обслуживанию с учетом индивидуальных характеристик надежности ведет к увеличению срока службы деталей ГТД, поскольку уменьшает долю двигателей, преждевременно снимаемых для ремонта, обеспечивает более высокую безотказность остальных двигателей, что позволяет эксплуатировать их по техническому состоянию и повышает безопасность полетов.

Прогнозирование прочностных свойств деталей ГТД на этапе проектирования, оценка характеристик прочностной надежности на стадии эксплуатации связаны, главным образом, с исследованием процесса накопления необратимых повреждений. К этим процессам можно отнести усталость, растрескивание, накопление пластических деформаций, изнашивание, коррозию, эрозию и др.

Для описания процессов повреждения и разрушения материалов деталей под действием нагрузок используют структурные и полуэмпирические модели накопления повреждений.

Структурные модели основаны на математическом описании физики процесса накопления повреждений на одном или нескольких уровнях структуры. При этом развитие процессов поврежденности зависит от многих внутренних и внешних причин, а их масштаб может меняться в широком диапазоне – от уровня кристаллической решетки до макродефектов.

Полуэмпирические модели не включают явного описания механизма повреждений, однако они являются более простыми с математической точки зрения и на макроуровне достаточно полно отражают основные закономерности процессов повреждения, так как базируются на эмпирических данных о прочностных свойствах материала деталей, полученных в условиях нагружения, близких к реальным условиям эксплуатации.

Полуэмпирические модели могут служить в качестве моделей макроуровня, в которых вместо структурных параметров, отражающих реальные физические процессы используются

поврежденности, соответствующие относительной наработке деталей, а за критерий разрушения принимается мгновенное превышение накопленной поврежденностью предельно допустимого уровня. Несмотря на большие различия в физической природе процессов поврежденности, для их описания можно использовать одни и те же математические модели.

Важным преимуществом полуэмпирических моделей является то, что их можно применять для непосредственного нахождения характеристик прочностной надежности по информации о теплонпряженном состоянии деталей, регистрируемой в процессе эксплуатации.

В вероятностных расчетах на прочность деталей ГТД наибольшее внимание уделяется трем видам отказов: статическому или повторно-статическому, малоциклового и многоциклового усталостному разрушению.

За критерий разрушения принимают мгновенное превышение действующими напряжениями допустимого предела прочности или рассматривают постепенное накопление повреждений под действием многократно прилагаемых нагрузок до предельного уровня.

При вероятностных расчетах на статическую прочность обычно нагрузка σ и прочность σ_n независимые случайные величины.

Вероятность безотказной работы определяется из условия $\sigma < \sigma_n$ (или $\sigma - \sigma_n < 0$) с помощью операции свертки этих случайных величин с последующим интегрированием:

$$P_p = 1 - P_{np} = \int_{U_p}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(U + \sigma) f_{np}(\sigma) d\sigma dU,$$

где $f_{\sigma}(\cdot)$, $f_{np}(\cdot)$ – плотности распределения действующих и предельных напряжений;

P_p , P_{np} – соответственно вероятность разрушения и неразрушения.

Случайные величины σ и σ_n считают независимыми от времени (наработки), полагая при этом, что если получена достаточно высокая вероятность неразрушения, то это гарантия работоспособности в течение всего рабочего ресурса детали.

В вероятностных расчетах на многоцикловую усталость можно воспользоваться скорректированной гипотезой линейного суммирования повреждений в виде

$$\int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} \frac{N_c f_{\sigma}(\sigma) d\sigma}{N(\sigma)} = a_p,$$

с помощью которой среднее время до разрушения (средний ресурс) детали определяется по формуле

$$\bar{t} = \frac{N_c}{\omega} = a_p \left(\omega \int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} \frac{f_{\sigma}(\sigma)}{N(\sigma)} d\sigma \right),$$

где N_c – число циклов до разрушения детали;

ω – среднее число циклов в единицу наработки;

a_p – величина, зависящая от материала детали и наработки;

σ_{\min} , σ_{\max} – минимальные и максимальные напряжения, участвующие в накоплении повреждений;

$f_{\sigma}(\cdot)$ – плотность распределения действующих напряжений;

$N(\sigma)$ – предельное число циклов работы детали при напряжении σ .

Величину a_p при непрерывном спектре нагружения определяют по формуле

$$a_p = \frac{\int_{k\sigma_{-1}}^{\sigma_{\max}} f_{\sigma}(\sigma) d\sigma - k\sigma_{-1} \int_{k\sigma_{-1}}^{\sigma_{\max}} f_{\sigma}(\sigma) d\sigma}{(\sigma_{\max} - k\sigma_{-1}) \int_{k\sigma_{-1}}^{\sigma_{\max}} f_{\sigma}(\sigma) d\sigma},$$

где σ_{-1} – предел выносливости;

k – коэффициент (0,4–0,7).

Вероятность разрушения для случая плоского напряженного состояния с компонентами σ и τ , изменяющимися по асимметричному циклу, и кривыми усталости с горизонтальными участками можно определить с использованием условных вероятностных характеристик коэффициентов запаса прочности. В этом случае квантили нормального распределения U_p , соответствующие заданной вероятности разрушения (неразрушения)

$$P_p = 1 - P_{np} = \Phi^{-1}(U_p) 100\%$$

находят по формуле

$$U_p = \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{k_{\sigma}^2} + \frac{1}{k_{\tau}^2}}}{\sqrt{V_{\sigma-1D} + \frac{1}{1 + \left(\frac{k_{\sigma}}{k_{\tau}}\right)^2} \frac{V_{\sigma_{\text{эж}}}^2}{k_{\sigma}^2} + \frac{1}{1 + \left(\frac{k_{\tau}}{k_{\sigma}}\right)^2} \frac{V_{\tau_{\text{эж}}}^2}{k_{\tau}^2}}},$$

где

$$k_{\sigma} = \bar{\sigma}_{-1D} / \sigma_{\text{эж}};$$

$$k_{\tau} = \bar{\tau}_{-1D} / \tau_{\text{эж}};$$

$$V_{\sigma_{\text{эж}}} = S_{\sigma_{\text{эж}}} / \bar{\sigma}_{\text{эж}}$$

$$V_{\tau_{\text{аэж}}} = S_{\tau_{\text{аэж}}} / \bar{\tau}_{\text{аэж}};$$

$$\bar{\sigma}_{\text{аэж}} = \bar{\sigma}_a + \Psi_{\sigma D} \bar{\sigma}_m;$$

$$\bar{\tau}_{\text{аэж}} = \bar{\tau}_a + \Psi_{\tau D} \bar{\tau}_m;$$

$$S_{\sigma_{\text{аэж}}}^2 = S_{\sigma_a}^2 + \Psi_{\sigma D}^2 S_{\sigma_m}^2;$$

$$S_{\tau_{\text{аэж}}}^2 = S_{\tau_a}^2 + \Psi_{\tau D}^2 S_{\tau_m}^2,$$

$\bar{\sigma}_a, \bar{\tau}_a, V_{\sigma_a}, V_{\tau_a}$ – средние значения и коэффициенты вариации амплитуд напряжений;

$V_{\sigma_{-1D}}$ – коэффициент вариации пределов выносливости материала детали;

$S_{\sigma_a}^2, S_{\tau_a}^2$ – дисперсии амплитуд действующих напряжений;

$\Psi_{\sigma D}, \Psi_{\tau D}$ – детерминированные коэффициенты, учитывающие влияние асимметрии цикла при действии нормальных и касательных напряжений;

$\bar{\sigma}_m, \bar{\tau}_m, V_{\sigma_m}, V_{\tau_m}$ – средние значения и коэффициенты вариации средних напряжений циклов;

$S_{\sigma_m}^2, S_{\tau_m}^2$ – дисперсии средних напряжений.

Аналогичные подходы к оценке вероятностных характеристик ресурса рассмотрены в работах [3–5].

В других вариантах вероятностных расчетов на усталостную прочность используются статистические теории, основанные на гипотезе «слабого звена» (теории Вейбулла, Серенсе-на–Когаева), которые предполагают, что источником разрушения является наиболее опасный дефект, имеющийся в детали, а свойства материала описаны кривой распределения критических напряжений. При этом считается, что характеристики дефектов не меняются в процессе нагружения. Эти теории противоречат экспериментальным данным по эффекту масштаба, а также не описывают исходного рассеивания результатов испытаний на усталость.

В рассмотренных вероятностных расчетах на прочность не учитывают предысторию нагружения и влияние температур и других случайных факторов на вероятностные характеристики разрушения деталей.

Для количественной оценки надежности используют методы, основанные на статистическом анализе отказов [10–12]. Обработка информации при этом включает в себя накопление данных об отказах изделия во время эксплуатации, при испытаниях, в процессе ремонта или хранения и получения статистических оценок результатов наблюдений.

В соответствии с этими методами для экспериментальной оценки показателей надежности (безотказности, долговечности, ремонтпригодности и сохраняемости) с удовлетворительной степенью достоверности необходимо иметь достаточно большой статистический материал. Для сбора этого материала нужны длительные испытания изделий, что требует больших затрат времени и средств. С физической точки зрения статистические модели надежности описывают только закономерности появления отказов и не затрагивают процессов их возникновения и развития.

В последнее время интенсивно развиваются методы оценки надежности, основанные на изучении и моделировании физических процессов, обуславливающих отказы, где основную роль играют функциональные или физические зависимости, которые устанавливают связь выходных характеристик, определяющих работоспособность систем двигателя с параметрами, характеризующими действующие нагрузки, прочностные свойства материала и наработку [13].

В зависимости от абстрактности моделей по отношению к физическим процессам можно выделить функционально-статистические и физические модели отказов (модели надежности).

В функционально-статистических моделях определяющие параметры нагруженности и прочности являются случайными величинами, а модели отказов представляются в виде квазидетерминированных зависимостей от этих параметров и времени.

Физические модели устанавливают причинную связь между конструктивно-технологическими параметрами систем и параметрами физико-химических процессов, происходящих в материале деталей и узлов ГТД в процессе эксплуатации. Эти модели являются еще более информативными, чем функционально-статистические.

Основной недостаток этих моделей заключается в том, что каждая модель характеризуется конкретной индивидуальностью и достаточно сложна в построении и использовании. Важным условием использования рассмотренных моделей является их обобщение и типизация, применение единых физических параметров: энергии, энтропии, ресурса или поврежденности. Наиболее обобщающим параметром служит поврежденность, которая может опираться на энергетические (накопление энергии кристаллической решеткой) или энтропийные (мера неопределенности) представления поврежденности.

Целью исследования является построение и вероятностный анализ моделей надежности конструктивных элементов, в которые входят модели материала, формы детали, нагружения и разрушения. В результате расчетов определяются показатели безотказности, долговечности, вероятностные характеристики запасов прочности и другие показатели, отражающие способность детали сохранять работоспособность в течение длительного периода эксплуатации и характеризующие постепенное накопление в материале деталей необратимых изменений, связанных, в основном, с прочностными или износowymi отказами.

По аналогии с авторами работы [14] будем называть их показателями прочностной надежности или вероятностными характеристиками работоспособности КЭ ГТД. К этим показателям относятся:

- вероятность безотказной работы;
- вероятность прочностного отказа;
- гамма-процентный, средний и наиболее вероятный ресурсы детали;
- вероятностные характеристики эквивалентной наработки;
- коэффициенты выработки и остатка ресурса;
- вероятностные характеристики коэффициентов запаса прочности и долговечности.

Основные вероятностные характеристики показателей прочностной надежности КЭ ГТД, которые можно получить на основе анализа процессов накопления повреждений, показаны на рис. 1.

Как свидетельствует обработка и анализ данных о дефектах и неисправностях досрочно снятых двигателей, отказы основных конструктивных элементов (рабочих лопаток и дисков компрессоров и турбин, камер сгорания, лопаток направляющего и соплового аппаратов) носят постепенный износый характер, обусловленный процессами старения. Для количественного описания этих изменений в материале деталей, вызванных действием напряжений и температур, в физической теории отказов используют понятие поврежденности, которое характеризует отклонение контролируемых свойств материалов КЭ от исходных.

В прочностных расчетах для решения задач оценки долговечности в условиях нестационарного нагружения широко распространены критерии поврежденности в виде отношения текущего значения контролируемого параметра к его предельному значению при отказе. Математическим отражением этих процессов служат кумулятивные модели отказов, основанные на гипотезе линейного или нелинейного суммирования повреждений[4; 15–20].

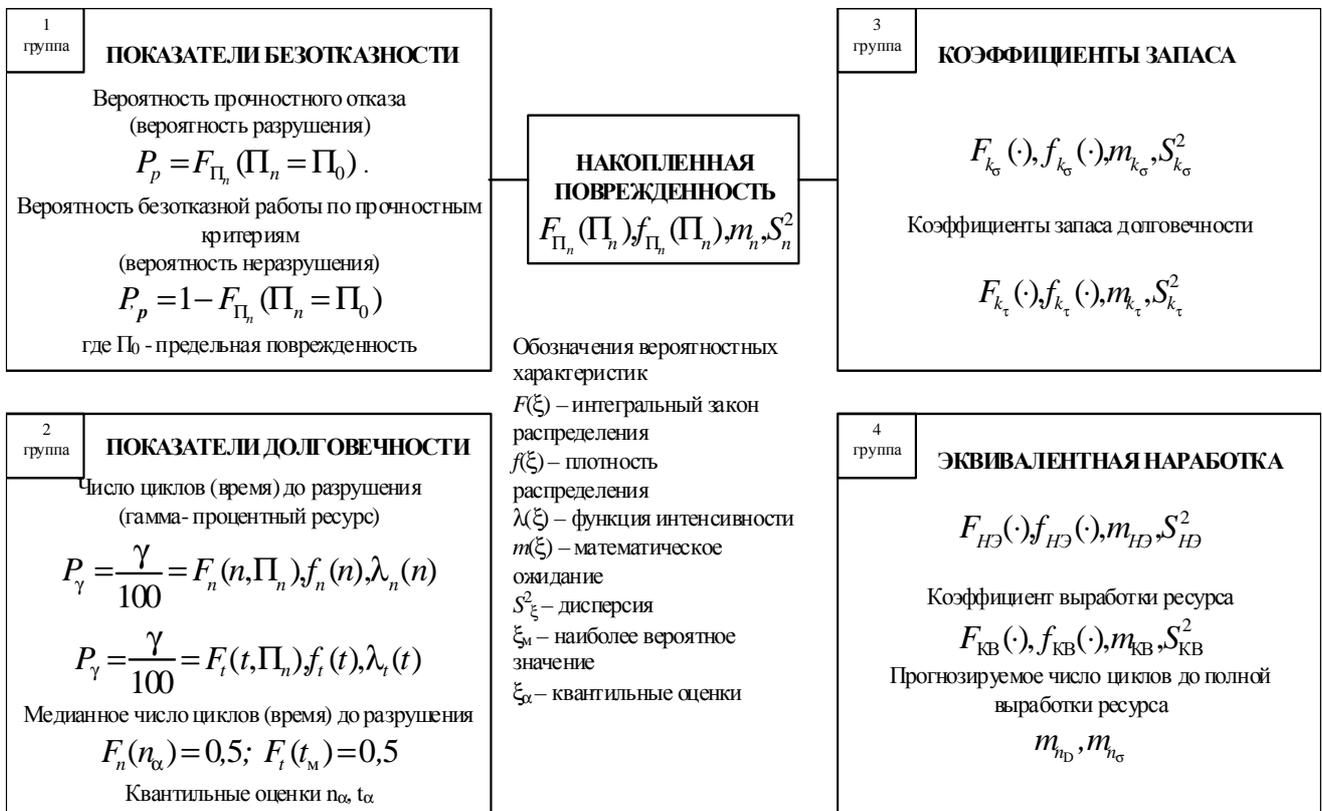


Рис. 1. Показатели надежности КЭ ГТД, полученные в результате исследования

Наибольшей универсальностью обладает метод линейного суммирования повреждений.

Линейная гипотеза имеет определенное фундаментальное теоретическое обоснование, основанное на энергетических критериях поврежденности, общих для целого ряда процессов исчерпания прочности.

Она универсальна для термомеханического нагружения, что позволяет использовать ее для суммирования статических и циклических повреждений во временной и деформационной трактовке.

Нелинейные законы суммирования, обладающие свойствами автомодельности, можно свести к линейным моделям.

Линейные процессы удобно исследовать с вероятностных позиций, поэтому этот принцип принят за основу при рассмотрении вероятностных методов суммирования повреждений.

Проведенный анализ показывает, что вероятностно-временная оценка показателей работоспособности КЭ ГТД по прочностным критериям, связанных с процессами старения, учитывающая случайную природу прочности и нагруженности, основана на изучении вероятностных процессов поврежденности и разрушения конструктивных элементов.

Основные задачи, требующие решения, состоят в определении вероятностных характеристик теплосиловой нагруженности деталей ГТД в процессе эксплуатации и прочности их материалов, вероятностной оценке поврежденности на стационарных и переходных режимах работы двигателя и в целом за полет в зависимости от вида предельного состояния и критериев разрушения, определения вероятностных характеристик накопленной поврежденности за весь период подконтрольной эксплуатации и оценке на этой основе показателей прочностной надежности.

Для описания характеристик прочности материала, в основном, используют детерминированные модели. Для вероятностных исследований необходимо получить вероятностные модели прочности, учитывающие стохастический характер свойств материала, решить задачи по температурно-временной аппроксимации эмпирических данных по длительной, мало- и многоцикловой прочности [21–23].

Работа авиационного двигателя характеризуется чередованием режимов с различными уровнями действующих на деталь напряжений и температур, совместное влияние которых на

снижение несущей способности можно оценить через накопленную поврежденность с помощью гипотез линейного или нелинейного суммирования повреждений. В рамках одного полета вероятностная оценка поврежденности связана с двумя основными задачами:

- расчетом поврежденности на стационарных и переходных элементарных режимах ;
- суммированием элементарных повреждений.

С математической точки зрения первая из них состоит в решении нелинейных стохастических уравнений, аргументами которых служат случайные величины либо случайные функции. Вторая может быть сведена к определению вероятностных характеристик сумм последовательностей зависимых случайных величин или интегрирования случайных функций.

С процедурой вероятностного суммирования повреждений связана и проблема определения накопленной поврежденности за весь период подконтрольной эксплуатации. Современные методы суммирования повреждений основаны на детерминированном подходе. Использование вероятностных методов ограничено суммированием повреждений как независимых случайных величин [4].

Разработка методов вероятностного суммирования повреждений, представляющих собой зависимые случайные величины, последовательности случайных величин с заданными корреляционными функциями, марковские или случайные процессы, является актуальной задачей [7; 8; 16; 18; 24].

Для практической реализации разрабатываемых методов оценки и прогнозирования работоспособности КЭ ГТД по прочностным критериям на стадии проектирования и эксплуатации, их верификации, анализа эффективности и создания оптимальных вычислительных алгоритмов расчета необходима разработка соответствующего алгоритмического и программного обеспечения и проведение численного эксперимента.

Вероятностные модели прочности материалов деталей

Для описания характеристик длительной прочности и других характеристик сопротивляемости длительному действию нагрузки предложено множество параметрических моделей, которые, в основном, базируются на гипотезах подобия геометрического или физического характера.

К широко применяемым моделям, отражающим физические закономерности процесса разрушения, относятся формулы С.Н. Жукова и И.И. Трунина [25], а к моделям, основанным на геометрическом подобии, принадлежат параметрические зависимости Ларсена–Миллера, Шерби–Дорна, Менсона–Саккопа, Менсона–Хаверда, Конрада, Корчинского–Клаусса, Криша, модель Центрального котлотурбинного института, модель обобщенных диаграмм Ковпака и др. [26–28].

Для оценки параметров указанных моделей можно воспользоваться известными методами описания зависимостей: наименьших квадратов, максимума правдоподобия, корреляционно-регрессионного анализа, минимизации функций многих переменных, методом группового учета аргументов [23; 29–31].

Рассмотренные модели и методы аппроксимации семейств кривых прочности материала предназначены для описания характеристик прочности в детерминированной постановке. Для представления их в вероятностной форме разработаны специальные модели, суть которых заключается во введении в уравнения семейства кривых прочности параметра a , являющегося случайной величиной, распределенной по одному из известных законов [21; 22].

Выбор формы закона и оценка параметров распределения случайной величины a , характеризующей вероятностные свойства материала, можно проводить исходя из анализа экспериментальных данных.

Для долговечностей и характеристик механической прочности предложено большое количество теоретических распределений. При этом механические свойства материала, такие, как пределы длительной прочности, текучести и выносливости, распределены по законам, близким к нормальному [26; 32], а характеристики долговечности обычно имеют логарифмически нормальное распределение. Кроме этих распределений, применяют также распределения Вейбулла, Гумбеля, гамма [32].

Формы различных законов распределения статистических пределов прочности в значительно меньшей степени влияют на вероятность разрушения, чем их дисперсии. Поэтому в качестве определяющих параметров для a будут задаваться значения математического ожидания $M[a]$ и дисперсии $D[a]=S_a^2$.

При оценке параметров уравнений прочности методом наименьших квадратов исходят из предложения о нормальности закона распределения отклонений и требования максимальной по вероятности близости экспериментальных и расчетных значений долговечности. Предположение о нормальном законе распределения отклонений в логарифмических координатах является вполне оправданным, а метод наименьших квадратов при такой постановке задачи будет корректной статистической процедурой.

В качестве аппроксимирующих функций, предназначенных для описания кривых прочности, можно использовать целый ряд эмпирических зависимостей [26], приведенных в табл. 1, которые даны в прилагаемой вероятностной трактовке.

При этом, если в результате опыта получен ряд долговечностей τ_i , соответствующих заданным условиям испытаний (напряжению σ_i и температуре T_i), и необходимо оценить параметры a_j ($j = \overline{1, k}$) зависимости $\lg \tau = \varphi(\sigma, T, a)$, то функционал для определения коэффициентов a_j в общем случае нелинейного уравнения $\varphi(\sigma_i, T_i, a)$ имеет вид

$$\Phi = \sum_{i=1}^n P_i [\lg \tau_i - \varphi(\sigma_i, T_i, \bar{a})]^2 \rightarrow \min,$$

где P_i – весовая функция.

Описание кривых долговечности методом максимального правдоподобия позволяет получить квантильные оценки пределов прочности, соответствующие заданной вероятности разрушения.

Метод наименьших квадратов является частным случаем метода максимума правдоподобия, где предполагается нормальный закон распределения разности расчетных и экспериментальных долговечностей.

Метод максимального правдоподобия всегда дает эффективные оценки определяемых параметров.

Для получения оценок неизвестных параметров $a_l, l = \overline{1, k}$ методом максимального правдоподобия на базе независимых наблюдений случайных долговечностей $\tau_i, i = \overline{1, n}$, распределенных с плотностью $f(\tau, \sigma, T, \bar{a})$, составляют функцию правдоподобия

$$L(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \prod_{i=1}^n f(\tau_i, \sigma_i, T_i, \bar{a}).$$

Таблиця 1

Уравнения для вероятностного описания характеристик прочности

№ п/п	Уравнение	Аналитическое выражение
1	Экспоненциальное	$\lg \tau = A(T) + B(T)(\sigma + a_\sigma)$ или $\sigma = C(T) + D(T)\lg \tau + a_\sigma$
2	Степенное	$\lg \tau = A(T) + B(T)(\lg \sigma + a_{\sigma_L})$, $\lg \sigma = C(T) + D(T)\lg \tau + a_{\sigma_L}$
3	Ларсена – Миллера	$\lg \tau = a_0 + \frac{a_1}{T} + \frac{a_2}{T}(\lg \sigma + a_{\sigma_L}) + \frac{a_3}{T}(\lg \sigma + a_{\sigma_L})^2$
4	Шерби – Дорна	$\lg \tau = a_0 + \frac{a_1}{T} + a_2(\lg \sigma + a_{\sigma_L}) + a_3(\lg \sigma + a_{\sigma_L})^2$
5	Менсона – Саккопа	$\lg \tau = a_0 + a_1 T + a_2(\lg \sigma + a_{\sigma_L}) + a_3(\lg \sigma + a_{\sigma_L})^2$
6	Конрада	$\lg \tau = a_0 + \frac{a_1}{T} + a_2(\sigma + a_\sigma) + a_3 T(\sigma + a_\sigma)$
7	Корчинского – Клаусса	$\lg \tau = a_0 + \frac{a_1}{T} + a_2(\lg \sigma + a_{\sigma_L}) + a_3 T(\lg \sigma + a_{\sigma_L})^2$
8	Экспоненциально-квадратичное	$\lg \tau = A(T) + B(T)(\sigma + a_\sigma) + C(T)(\sigma + a_\sigma)^2$
9	Степенно-квадратичное	$\lg \tau = A(T) + B(T)\lg(\sigma + a_\sigma) + C(T)\lg^2(\sigma + a_\sigma)$
10	Криша (модифицированное)	$\lg \tau = A(T) + B(T)(\lg \sigma + a_{\sigma_L})^2$
11	Кордонского – Фридмана (модифицированное)	$\lg \tau = A(T)\sqrt{B(T) + \lg \sigma + a_{\sigma_L}}$
12	Показательно-степенное	$\lg \tau = A(T) + B(T)(\sigma + a_\sigma) + C(T)\lg(\sigma + a_\sigma)$
13	Кусочно-экспоненциальное	$\lg \tau = A(T) + B(T)(\sigma + a_\sigma) + \text{abs}[C(T) + D(T)(\sigma + a_\sigma)]$
14	Кусочно-степенное	$\lg \tau = A(T) + B(T)(\lg \sigma + a_{\sigma_L}) + \text{abs}[C(T) + D(T)(\lg \sigma + a_{\sigma_L})]$
15	Жукова	$\lg \tau - \frac{U_0}{kT} = a_0 + \frac{a_1}{T}(\sigma + a_\sigma)$, где U_0 – энергия активации; k – постоянная Больцмана
16	Трунина	$\lg \tau - 2 \lg T = a_0 + \frac{a_1}{T} + \frac{a_2}{T}(\sigma + a_\sigma) + \frac{a_3}{T} \lg(\sigma + a_\sigma)$

Примечание.

$a_i, i = \overline{1,4}$ – коэффициенты семейства уравнений прочности;

a_σ, a_{σ_L} – параметры, характеризующие вероятностные свойства материала: $M[a_\sigma] = M[a_{\sigma_L}] = 0$; $D[a_\sigma] = S_a^2$; $D[a_{\sigma_L}] = S_{a_L}^2$.

Оценки a_i , максимизирующие функцию правдоподобия (или логарифм функции правдоподобия), находят из решения системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d \ln L}{da_l} &= \frac{d}{da} \sum_{i=1}^{n-r} \ln f(\tau_i, \sigma_i, T_i, \vec{a}) + \\ &+ \frac{d}{da_l} \sum_{j=1}^r \ln(1 - F(\tau_j, \sigma_j, T_j, \vec{a})) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$l = \overline{1, k}$,

где τ_i, σ_i, T_i – долговечность, напряжение и температура i -го разрушившегося образца;

τ_j, σ_j, T_j – долговечность, напряжение и температура j -го неразрушившегося образца;

n – общее число испытаний;

r – число не разрушившихся образцов;

$F(\lg(\tau), \sigma, T, a)$ – функция распределения долговечности.

При известных параметрах a_l ($l = \overline{1, k}$) из уравнения

$$F(\lg(\tau), \sigma_{\tau, T, P}, T, \bar{a}) = P,$$

можно найти предел прочности $\sigma_{\tau, T, P}$, соответствующий заданной долговечности τ , температуре T и вероятности разрушения P .

При выборе моделей характеристик прочности можно также воспользоваться критериями, предложенными в работе [33]. В этом случае точность аппроксимации определяют по формулам:

$$S_1 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \delta_j;$$

$$S_2 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k |\delta_j|;$$

$$S_3 = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (\delta_j - S_1)^2};$$

$$S_4 = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \delta_j^2},$$

где $\delta_j = (\sigma_j^m - \sigma_j) / \sigma_j$ 100% (по напряжению);

$\delta_j = (\lg \tau_j^m - \lg \tau_j) / \lg \tau_j$ 100% (по долговечности),

σ_j^m – расчетные значения предела прочности, полученные по модели для долговечности $\tau_j^m = \tau_j$;

σ_j – напряжение, при котором получено экспериментальное значение долговечности τ_j ;

k – число проверочных экспериментов.

Величина S_1 характеризует статистическое смещение оценки σ_j^m относительно σ_j . Величины S_2 и S_4 являются среднеарифметическим и среднеквадратичным отклонениями и характеризуют общую точность метода, а величина S_3 – рассеивание относительно среднего, т.е. устойчивость оценки.

Рассмотрим методику определения дисперсии логарифма долговечности $S_{\lg \tau}^2$, дисперсий пределов прочности S_{σ}^2 и $S_{\lg \sigma}^2$ в случае описания характеристик прочности материала экспоненциальными или степенными уравнениями [22].

В случае экспоненциальной зависимости математического ожидания долговечности от напряжения при постоянной температуре статистические свойства материала могут быть описаны тремя различными уравнениями, которые будут тождественны при определенном подборе параметров случайных величин [32]:

$$\lg \tau = A + B\sigma + a_{\tau};$$

$$\lg \tau = A + B(\sigma + a_{\sigma}); \quad (2)$$

$$\lg \sigma = A + B\sigma + a_n(1 + B^2)^{0.5},$$

где a_{τ} , a_{σ} , a_n – случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями $S_{a_{\tau}}^2$, $S_{a_{\sigma}}^2$, $S_{a_n}^2$.

Если эти случайные величины нормальные, то условная плотность распределения долговечности логарифмически-нормальная, что соответствует данным прочностных исследований.

Исключив случайные величины a_{τ} , a_{σ} , a_n из формул (2) и определив дисперсии от обеих частей уравнений при равенстве нулю их математических ожиданий, получим дисперсии этих случайных величин:

$$D[a_{\tau}] = S_{a_{\tau}}^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (\lg \tau_j - A - B\sigma_j)^2; \quad (3)$$

$$D[a_{\sigma}] = S_{a_{\sigma}}^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\lg \tau_j - A}{B} - \sigma_j \right)^2; \quad (4)$$

$$D[a_n] = S_{a_n}^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m \frac{(\lg \tau_j - A - B\sigma_j)^2}{1 + B^2}; \quad (5)$$

где σ_j , τ_j , ($j = \overline{1, m}$) – экспериментальные значения пределов прочности и долговечности;

m – число испытаний.

Дисперсия случайной величины a_{τ} является дисперсией логарифма долговечности материала $S_{\lg \tau}^2$.

Дисперсия a_{σ} служит мерой рассеивания экспериментальных точек по напряжению, т.е. является дисперсией предела прочности, а среднеквадратичное отклонение S_{σ} – мерой рассеивания вокруг линии регрессии. Дисперсию S_{σ}^2 можно определить геометрическим построением из решения прямоугольного треугольника OAB (рис. 2), высота которого пропорциональна S_{σ} :

$$S_{\sigma}^2 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{C_j^2 D_j^2}{C_j^2 + D_j^2};$$

$$C_j = \lg \tau_j - A - B\sigma_j;$$

$$D_j = (\lg \tau_j - A) / B - \sigma_j.$$

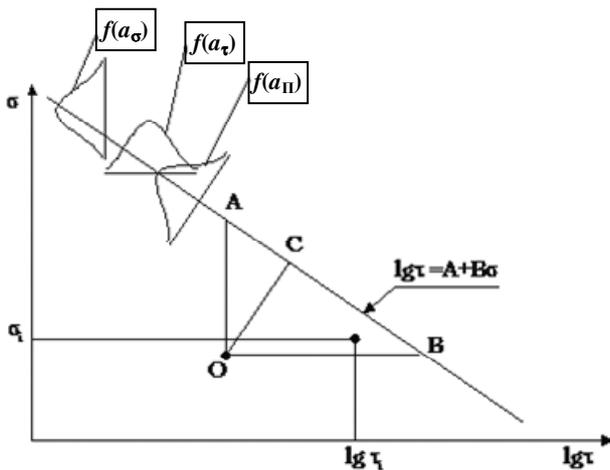


Рис. 2. Оценка дисперсий долговечности $S^2_{lg\tau}$ и параметра материала S^2_{τ} , S^2_{σ} , S^2_{π}

Таким же образом, исходя из геометрической интерпретации дисперсий случайных величин a_{τ} , a_{σ} , a_{π} и тождества выражений (2) между дисперсиями, можно установить зависимости:

$$S^2_{\sigma} = \frac{S^2_{\tau}}{B^2} = S^2_{\pi} \left(1 + \frac{1}{B^2} \right);$$

$$S^2_{\pi} = \frac{S^2_{\tau} S^2_{\sigma}}{S^2_{\tau} + S^2_{\sigma}} = \frac{S^2_{\tau}}{1 + B^2} = \frac{S^2_{\sigma} B}{1 + B^2}.$$

Аналогичные результаты можно получить и при степенной зависимости долговечности от напряжений

$$lg\tau = A + B(lg\sigma + a_{\sigma L}).$$

Случайная величина $a_{\sigma L}$ характеризует рассеивание экспериментальных точек относительно логарифма предела прочности $S^2_{lg\sigma}$.

В этом случае в выражениях для дисперсий (3)–(5) следует σ_j заменить на $lg\sigma_j$.

Для семейств кривых прочности при переменных напряжениях и температурах в случае экспоненциальной зависимости оценки усредненных по семейству кривых длительной прочности дисперсий случайных величин a_{τ} , a_{σ} и a_{π} можно получить по формулам:

$$S^2_{\tau} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} \left(lg \tau_{ij} - A(T_i) - B(T_i) \sigma_{ij} \right)^2;$$

$$S^2_{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} \left(\frac{lg \tau_{ij} - A(T_i)}{B(T_i)} - \sigma_{ij} \right)^2;$$

$$S^2_{\pi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\left(lg \tau_{ij} - A(T_i) - B(T_i) \sigma_{ij} \right)^2}{1 + B^2(T_i)},$$

где τ_{ij} , σ_{ij} , T_i – долговечность, напряжение и температура испытания образцов на прочность;

m_i – количество образцов в i -й серии;

k – количество серий испытаний при различных температурах.

В этом случае для соблюдения равенств при постоянстве одной из дисперсий две другие являются функцией от температуры. Если принять $S^2_{\pi} = const$, то увеличение наклона кривых прочности относительно оси напряжения приводит к увеличению дисперсии S^2_{σ} и уменьшению дисперсии S^2_{τ} .

Для примера рассмотрим описание характеристик длительной прочности жаропрочного сплава ЖС26ВСНК, из которого изготовлены рабочие лопатки турбин 1-й и 2-й ступеней двигателя ПС-90А. В вероятностных моделях оценки ресурса их целесообразнее всего использовать в виде степенной или экспоненциальной зависимости долговечности от напряжения.

Уравнения, которые с минимальной погрешностью описывают экспериментальные данные в рабочей области действующих на лопатки турбины напряжений и температур, имеют вид:

$$lg(\tau) = -14,28588 - 0,00416108 \cdot T + 27612,08 / (T + 273) + \sigma(-0,295976 + 0,000374213 \cdot T - 0,000000157 \cdot T^2),$$

$$S_{a\tau} = \sqrt{D[a]}; \quad S_{a\tau} = 0,41,$$

$$lg(\tau) = 16,88129 - 0,0268573 \cdot T + 26795,35 / (T + 273) + lg(\sigma) \cdot (-26,7282 + 0,0233512 \cdot T - 0,0000038464 \cdot T^2),$$

$$S_{a\tau} = \sqrt{D[a]}; \quad S_{a\tau} = 1,0.$$

Более сложные модели прочности материала, основаны на введении в уравнение нескольких случайных величин, например, степенная модель характеристик прочности:

$$lg\tau = A(T) + B(T)(ln(\sigma + a_{\sigma}) + a_{\sigma L}).$$

В этом случае при малых нагрузках разброс характеристик прочности определяет параметр a_{σ} , а при больших $a_{\sigma L}$.

Для оценки параметров семейства кривых прочности можно воспользоваться критерием минимума дисперсий ($S^2_{\tau} \rightarrow \min$, $S^2_{\sigma} \rightarrow \min$, $S^2_{\pi} \rightarrow \min$), что соответствует критерию минимизации методом наименьших квадратов, который дает наилучшие оценки в случае нормального распределения соответствующих отклонений. При этом для каждого семейства будет получена своя математическая модель.

Параметры первой модели могут быть получены из решения системы линейных уравнений, так как она линейная относительно параметров, а

для остальных моделей параметры определяются методами минимизации функций многих переменных, в частности, методами, использующими матрицу вторых производных (модифицированный метод Пауэлла, методы Давидона–Флетчера–Пауэлла или Ньютона и др.).

В качестве первого приближения принимают значения параметров, полученных для первого семейства.

Если плотность распределения отклонений отличается от нормальной, то для оценки параметров уравнений можно воспользоваться методом максимума правдоподобия (1), где в качестве функции правдоподобия следует рассматривать совместную плотность распределения соответствующих отклонений.

Решение системы уравнений (1) при непосредственном использовании процедуры минимизации функции правдоподобия представляет значительные вычислительные трудности, хотя этот метод дает наиболее эффективные оценки.

Анализ экспериментальных исследований характеристик сопротивления длительной прочности, усталости различных жаропрочных материалов при нормальных и повышенных температурах позволил установить, что рассеяние логарифма долговечности мало зависит от величины напряжений и практически может приниматься постоянным [26; 32]: $S^2_{\tau} = \text{const}$.

Вероятностные модели поврежденности и разрушения деталей

В каждом полете летательного аппарата КЭ двигателя испытывают комплекс силовых и тепловых воздействий различной интенсивности и продолжительности. По своей природе этот процесс нагружения деталей представляет собой сложный (многоосный), многокомпонентный, нестационарный случайный процесс, характеристики которого определяются режимами работы двигателя, климатическими условиями, особенностями конструкции и другими факторами.

Определение поврежденности КЭ с полным учетом эксплуатационных условий связано со значительными трудностями и может быть осуществлено только путем различного рода упрощений и схематизации реального процесса нагружения.

В случае многоосного нагружения статистически связанные компоненты тензора напряжений в расчетной практике обычно заменяются эквивалентным (по некоторой теории прочности)

напряжением, представляющим собой одномерный процесс. Учет многокомпонентности нагружения осуществляется путем выделения и независимой оценки различного вида нагрузок (статических, высокочастотных механических, термоциклических и др.) и рассмотрения их комплексного влияния на поврежденность по одному из критериев прочности силового, временно-го, деформационного или энергетического типов.

При оценке поврежденности в случае нестационарного нагружения элементов ГТД в полете наибольшее распространение получили методы, основанные на линейной гипотезе суммирования повреждений.

В общем случае поврежденность за i -й полет можно определить по формуле

$$P_i = \sum_{j=1}^{k_i} P_{ij} = \sum_{j=1}^{k_{1i}} \frac{t_j}{\tau(\bar{Q}, \bar{a})} + \sum_{j=1}^{k_{2i}} \int_0^{t_j} \frac{dt}{\tau(\bar{Q}, \bar{a})},$$

где k_{1i} , k_{2i} – число стационарных и переходных режимов работы двигателя;

P_{ij} – поврежденность на j -м режиме i -го полета;

$\tau(\cdot)$ – обобщенные характеристики прочности, характеризующие сопротивляемость материала детали совместному действию в общем случае многоосных длительных статических, циклических и термоциклических нагрузок и других факторов;

\bar{Q}_j – вектор нагрузок, действующих на j -м режиме;

a – параметр, характеризующий вероятностные свойства материала;

t_j – время действия нагрузки на j -м режиме.

На детали ГТД во время полета, с одной стороны, действуют комплексные напряжения $\sigma(t)$ и температура $T(t)$, которые являются нестационарными случайными процессами. С другой стороны, им противостоят прочностные свойства материала, характеризующиеся предельным напряжением $\sigma_n(t)$, которое также является нестационарным случайным процессом, так как зависит от характеристик материала, температуры, предыстории нагружения и других случайных причин. Условие разрушения детали в теории прочности – пересечение отдельных реализаций действующих и предельных напряжений.

Для определения вероятностных характеристик надежности КЭ, в частности, вероятности разрушения, в статистической теории прочности рассматривается разность этих величин $\sigma_n(t) - \sigma(t) \leq 0$ или частное $\sigma_n(t)/\sigma(t) \leq 1$.

Эти выражения можно рассматривать как математические модели процесса разрушения. При этом решение сводится к задаче о выбросах случайных процессов, где, в частности, определяются вероятностные характеристики времени первого достижения границ. Если действующие и предельные напряжения – случайные величины, то характеристики прочностной надежности определяются с помощью математического аппарата статистической теории прочности. В рассматриваемых более сложных моделях учитывается динамика изменения действующих и предельных нагрузок. На рис. 3 схематично изображена вероятностная динамическая модель долговечности КЭ, у которой характеристики нагруженности $\sigma(t)$ в общем случае являются нестационарным случайным процессом, характеристики прочности $\sigma_{дл}(\tau, a_\sigma)$ – функцией случайного параметра a_σ , который характеризует вероятностные свойства материала в стационарных условиях, а снижающиеся обобщенные характеристики прочности $\sigma_n(t)$, учитывающие историю нагружения, являются функционалом от $\sigma(t)$ и $\sigma_{дл}(t)$.

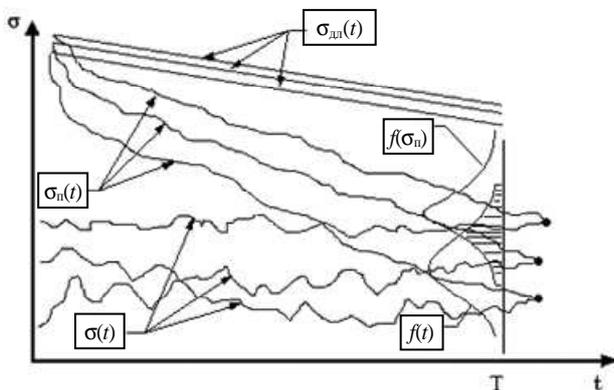


Рис. 3. Кинетическая вероятностная модель прочности и разрушения материала детали

Методика расчета вероятностных характеристик прочностной надежности деталей ГТД будет рассмотрена посредством приведения действующих нагрузок к эквивалентному режиму, в которой неявно можно учесть влияние на ход старения материала температуры и других параметров режима работы ГТД.

Среди возможных вероятностных моделей реальных процессов нагружения, повреждения и разрушения деталей, основанных на анализе повреждения, следует выделить линейные модели со случайными величинами или со случайными квазистационарными функциями (табл. 2).

Эти модели предназначены для решения задач прочностной надежности в условиях стационарного и нестационарного нагружений.

Схема самой простой вероятностной стационарной модели показана на рис. 4.

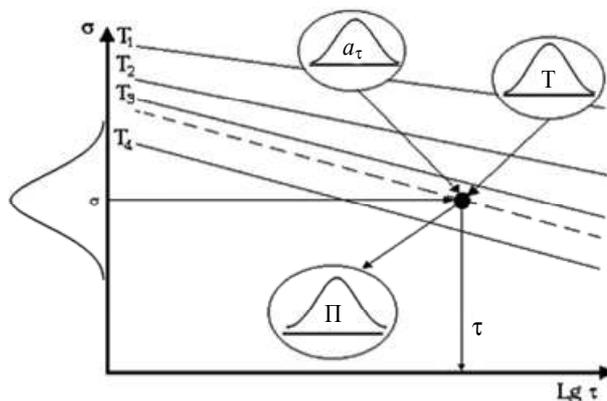


Рис. 4. Вероятностная стационарная модель поврежденности детали

Эта модель по своей структуре является нелинейной функцией случайных величин и может быть описана выражениями, приведенными в табл. 2. С помощью этой модели можно рассчитать вероятностные характеристики поврежденности и надежности на установившихся режимах работы двигателя, а также при испытаниях образцов на длительную прочность, выносливость и других видов испытаний в условиях стационарного нагружения.

В общем случае прогнозирования вероятностных характеристик прочностной надежности КЭ двигателя на этапах проектирования и доводки в данной модели все параметры σ , T , a_σ , t являются случайными величинами.

Более сложную картину процессов поврежденности для стационарного нагружения отражает линейная модель (табл. 2), в которой действующие напряжения и температура являются стационарными случайными процессами $\sigma(t)$, $T(t)$ с математическими ожиданиями:

$$M[\sigma(t)] = \overline{\sigma(t)} = m_\sigma, \quad M[T(t)] = \overline{T(t)} = m_T,$$

корреляционными функциями:

$$k_\sigma(\tau) = S_\sigma^2 r_\sigma(\tau), \quad k_T(\tau) = S_T^2 r_T(\tau),$$

где S_σ^2 , S_T^2 и $r_\sigma(\tau)$, $r_T(\tau)$ – дисперсии и нормированные корреляционные функции случайных стационарных процессов $\sigma(t)$ и $T(t)$.

Таблиця 2

Вероятностные модели поврежденности конструктивных элементов ГТД

Модель	Вероятностные модели нагруженности	Вероятностная модель поврежденности	
		на стационарных режимах $\bar{\sigma}(t), \bar{T}(t) - \text{const}$	на нестационарных режимах
Со случайными величинами	$M[\sigma(t)] = \bar{\sigma}(t);$ $M[T(t)] = \bar{T}(t);$ $D[\sigma(t)] = S_{\sigma}^2;$ $D[T(t)] = S_T^2$	$\Pi = \frac{t}{\tau(\sigma, T, a)}$	$\Pi = \int_0^t \frac{dt}{\tau(\bar{\sigma}(t) + \sigma, \bar{T}(t) + T, a)}$
Со случайными квазистационарными функциями	$M[\sigma(t)] = \bar{\sigma}(t);$ $M[T(t)] = \bar{T}(t);$ $k_{\sigma}(t_1, t_2) = S_{\sigma}^2 r_{\sigma}(\tau);$ $k_T(t_1, t_2) = S_T^2 r_T(\tau)$	$\Pi = \int_0^t \frac{dt}{\tau(\sigma(t), T(t), a)}$	$\Pi = \int_0^t \frac{dt}{\tau(\sigma(t), T(t), a)}$

Примечание.

σ, T – параметры нагруженности;

t – время наработки на режиме;

a_{σ} – параметр, учитывающий вероятностные свойства материала;

$\tau(\cdot)$ – характеристики прочности.

В случае нестационарного нагружения для оценки вероятностных характеристик поврежденности можно использовать нелинейные модели, в которых процессы $\sigma(t), T(t)$ будут представлены в виде функций времени и случайных величин

$$\sigma(t) = \sigma(t, a_{\sigma}), \quad T(t) = T(t, a_T)$$

или в виде квазистационарных случайных функций

$$\sigma(t) = m_{\sigma}(t) + \sigma_0(t), \quad T(t) = m_T(t) + T_0(t),$$

где $m_{\sigma}(t), m_T(t)$ – зависящие от времени математические ожидания σ, T ;

$\sigma_0(t), T_0(t)$ – стационарные случайные функции.

С физической точки зрения процесс поврежденности материала связан с движением и размножением дислокаций, образованием и скоплением вакансий, развитием полос скольжения, образованием микропор и микротрещин, упрочнением и разупрочнением и другими необратимыми изменениями структуры материала. На развитие этих процессов поврежденности, в свою очередь, влияют внешние случайные факторы:

- изменение климатических условий;
- параметры нагруженности;
- условия эксплуатации.

При каждом воздействии нагрузки (случайной или регулярной) происходит элементарный акт разрушения материала (увеличение поврежденности), величина и характер которого зависят от механических характеристик материала, величин напряжений, температур, числа циклов и других факторов.

Процесс накопления повреждений рассматривается как результат стохастического суммирования большого числа равномерно малых микроскачков элементарных независимых повреждений. Если обозначить через Π_i величину поврежденности в i -м элементарном цикле, то за n циклов величина накопленной поврежденности Π_n выразится суммой

$$\Pi_n = \sum_{i=1}^n \Pi_i. \quad (6)$$

В выражении (6) величины Π_i и Π_n случайны. За некоторый период времени, когда n достаточно велико, в силу центральной предельной теоремы и сделанных предположений о характере нагружения, накопленная поврежденность Π_n сходится к нормальному распределению. Такой процесс накопления повреждений можно рассматривать как случайный процесс с независимыми приращениями, построенный по типу марковской последовательности.

За каждый отдельный полет случайная величина поврежденности может принимать различные значения, обусловленные различной интенсивностью силовых и тепловых воздействий. Величины поврежденности за полет достаточно малы. Это позволяет предположить, что они подчинены одному и тому же закону распределения.

При статистически независимых повреждениях за полет описанный процесс является однородным случайным процессом с независимыми приращениями.

Вероятностные характеристики закона распределения поврежденности можно определить посредством усреднения вероятностных характеристик за n полетных циклов.

В дальнейшем будем использовать два случайных процесса (последовательности):

– исходный процесс поврежденности КЭ ГТД $\Pi'(t_1), \Pi'(t_2), \dots, \Pi'(t_n)$;

– порожденный им процесс накопленной поврежденности:

$$\Pi(t_1) = \Pi'(t_1),$$

$$\Pi(t_2) = \Pi'(t_1) + \Pi'(t_2) \dots \Pi(t_n) = \sum_{i=1}^n \Pi'(t_i).$$

Причем первый случайный процесс обычно называют приращением процесса накопленной поврежденности, так как

$$\Pi(t_i) - \Pi(t_{i-1}) = \Pi'(t_i).$$

Таким образом, для процесса накопленной поврежденности за n полетов можно записать:

$$\Pi(t_n) = \sum_{i=1}^n \Pi(t_i) - \Pi(t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \Pi'(t_i), \quad (7)$$

$$\Pi(t_0) = 0,$$

где $\Pi'(t)$, $\Pi(t)$ – случайные процессы поврежденности и накопленной поврежденности.

Если вместо процессов рассматривать случайные последовательности, соотношение (7) преобразуется к виду

$$\Pi_n = \sum_{i=1}^n \Pi'_i, \quad (8)$$

где Π'_i , Π_n – случайные величины поврежденности за цикл и накопленной поврежденности.

Используя гипотезу линейного суммирования повреждений в непрерывном времени, зависимость между процессами можно представить следующим образом:

$$\Pi(t) = \int_0^t \Pi'(t) dt. \quad (9)$$

С физической точки зрения процесс $\Pi'(t)$ представляет собой среднюю линейную скорость изменения поврежденности.

В дальнейшем штрих в обозначении величины Π'_i будем опускать и для элементарной поврежденности за цикл принято обозначение Π_i или Π_j , а для накопленной – Π_n .

Вероятностные модели суммирования независимых случайных повреждений

В рассмотренной модели (8) накопленная поврежденность является суммой большого числа независимых случайных величин, характеризующих элементарные повреждения, которые в своей совокупности подчинены единому закону распределения $F(\Pi)$. Такая сумма согласно центральной предельной теореме удовлетворительно аппроксимируется нормальным распределением.

Математическое ожидание m_n и дисперсию S_n^2 накопленной поврежденности Π_n можно определить по формулам:

$$m_n = \sum_{i=1}^n m_i = nm;$$

$$S_n^2 = \sum_{i=1}^n S_i^2 = nS^2,$$

где m , S^2 – среднее математическое ожидание и дисперсия поврежденности за цикл.

Плотность и функция распределения суммарной поврежденности при этом будут иметь вид:

$$f_{\Pi_n}(\Pi_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi nS^2}} \exp\left(-\frac{(\Pi_n - nm)^2}{2nS^2}\right); \quad (10)$$

$$F_{\Pi_n}(\Pi_n) = \Phi\left(\frac{\Pi_n - nm}{\sqrt{nS}}\right). \quad (11)$$

Кроме вероятностных характеристик поврежденности можно определить и вероятностные характеристики долговечности детали, в частности, вероятностные характеристики чисел циклов до разрушения конструктивного элемента.

Для необратимых процессов условие разрушения КЭ можно записать в виде $\Pi_n > \Pi_0$, где Π_0 – предельный уровень повреждения. При заданной предельной степени повреждения Π_0 вероятность числа циклов до разрушения равна вероятности превышения накопленной поврежденностью Π_n предельно допустимого уровня Π_0 :

$$\begin{aligned} F_n(n) &= P(N < n) = P(\Pi_n > \Pi_0) = \\ &= \int_{\Pi_0}^{\infty} f_{\Pi_n}(\Pi_n) d\Pi_n = 1 - \Phi\left(\frac{\Pi_0 - nm}{\sqrt{nS}}\right) = P_{\text{раз}} \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогично определяется и вероятность неразрушения $P_{\text{нр}}$, которая соответствует гамма-процентному ресурсу детали:

$$\begin{aligned} P(N > n) &= P(\Pi_n < \Pi_0) = \\ &= \int_{-\infty}^{\Pi_0} f_{\Pi_n}(\Pi_n) d\Pi_n = 1 - P_{\text{раз}} = P_{\text{нр}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Плотность распределения чисел циклов до разрушения находят дифференцированием выражения (12):

$$f_n(n) = \frac{dF_n(n)}{dn} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n S^2}} \frac{\Pi_0 + nm}{2n} \exp\left(-\frac{(\Pi_0 - nm)^2}{2n S^2}\right). \quad (14)$$

Используя известные соотношения, можно определить ряд числовых характеристик этого распределения. В частности, выражения для математического ожидания, дисперсии и коэффициента вариации чисел циклов до разрушения имеют вид:

$$m_{\Pi} = \int_0^{\infty} n f_n(n) dn = \frac{\Pi_0}{m} + \frac{S^2}{2m^2};$$

$$S_{\Pi}^2 = \int_0^{\infty} (n - m_{\Pi})^2 f_n(n) dn = \frac{\Pi_0 S^2}{m^3} + \frac{5 S^4}{4 m^4};$$

$$V_{\Pi} = \frac{S_{\Pi}}{m_{\Pi}} = \frac{S}{\sqrt{m}} \frac{\sqrt{\Pi_0 + \frac{5 S^2}{4 m}}}{\Pi_0 + \frac{S^2}{2m}}.$$

При известных функции и плотности распределения чисел циклов до разрушения можно определить функцию интенсивности отказов, которая называется также функцией риска:

$$\lambda_n(n) = \frac{f_n(n)}{1 - F_n(n)}.$$

Величина $\lambda_n(n) \Delta t$ – приближенное значение вероятности того, что отказ КЭ произойдет за время $[t, t + \Delta t]$ при условии, что он не произошел за время $[0, t]$. Если за Δt принять продолжительность полета $\Delta t = t_{\Pi}$, то величина $\lambda_n(n) t_{\Pi}$ будет определять вероятность возникновения отказа КЭ в текущем полете.

Таким образом, при независимых, близких к нормальному случайных поврежденностях за цикл, по соотношениям (10)–(14) можно оценить основные вероятностные характеристики накопленной поврежденности и чисел циклов, за которые накопленная поврежденность превышает уровень Π_0 .

Вероятностные модели суммирования независимых случайных поврежденностей

Рассмотренные модели вероятностного суммирования повреждений предназначены для нахождения вероятностных характеристик сумм независимых случайных величин поврежденностей.

Однако между поврежденностями в i -м и j -м полетах существуют корреляционные связи, которые значительно влияют на характер изменения вероятностных характеристик накопленной поврежденности и других характеристик прочностной надежности.

Природу этих связей можно установить анализом влияния каждой из случайных составляющих σ , T , a_{σ} , t функций поврежденности. В общем случае каждый исходный параметр можно условно представить в виде суммы двух независимых составляющих, из которых одна предопределяет зависимость, а вторая – независимость между поврежденностями в i -м и j -м полетах.

В первом случае поврежденности Π_i и Π_j по этим параметрам являются зависимыми, во втором – независимыми случайными величинами.

Параметр, определяющий вероятностные свойства материала деталей, можно полностью отнести к первой группе, так как вероятностные характеристики прочности материала обусловлены его внутренней структурой и частично особенностями конструкции и не зависят от номера полета.

Параметры нагруженности и длительности действия режима больше относятся ко второй группе, исходя из того, что полеты осуществляются по различным трассам, в отличающихся климатических условиях и на них влияет ряд других независимых случайных факторов. При решении задач оценки влияния систематических погрешностей, изменения параметров и ошибок методов расчета на вероятностные характеристики накопленной поврежденности эти параметры будут предопределять зависимость между поврежденностями. В феноменологической модели накопления повреждений случайный процесс построен по типу марковской последовательности с зависимыми приращениями (6).

Величину корреляционной связи между поврежденностями i -го и j -го полетов, вероятностные характеристики поврежденности за цикл можно оценить методами, рассмотренными в работе [1]. Только в выражениях для моментных характеристик учитываются факторы или составляющие факторов, которые устанавливают корреляционные связи между поврежденностями i -го и j -го полетов.

В общем случае поврежденности за полетный цикл являются зависимыми случайными величинами, поэтому для числовых характеристик накопленной поврежденности можно записать соотношения:

$$m_n = \sum_{i=1}^n m_i; \tag{15}$$

$$S_n^2 = \sum_{i=1}^n S_i^2 + 2 \sum_{i<j} r_{ij} S_i S_j, \tag{16}$$

где $m_i, S_i, (i = \overline{1, n})$ – математические ожидания и среднеквадратичные отклонения поврежденностей в i -м полете;

r_{ij} – коэффициент корреляции случайных величин Π_i и Π_j :

$$r_{ij} = \frac{k_{\Pi_i \Pi_j}}{S_i S_j}.$$

Рассмотрим случай, когда случайные величины поврежденности за полетный цикл в своей совокупности подчинены единому закону распределения вероятностей $F_I(\Pi)$.

Вид этого закона может быть произвольным с конечными значениями математического ожидания m и дисперсии S^2 .

Для достаточно большого n согласно центральной предельной теореме закон распределения суммы зависимых случайных поврежденностей будет близким к нормальному.

Если между всеми поврежденностями Π_i и $\Pi_j, (i, j = \overline{1, n}, i \neq j)$ существует связь с постоянным коэффициентом корреляции $r_{ij}=r$, то выражения (15), (16) преобразуются к виду:

$$m_n = \sum_{i=1}^n m_i = nm, \tag{17}$$

$$S_n^2 = \sum_{i=1}^n S_i^2 + 2 \sum_{i<j} r_{ij} S_i S_j = S^2 n(1 + (n-1)r). \tag{18}$$

Плотность и закон накопленной поврежденности выражаются формулами:

$$f(\Pi_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi S^2(1+(n-1)r)}} \times \exp\left(-\frac{(\Pi_n - nm)^2}{2S^2 n(1+(n-1)r)}\right);$$

$$F_{\Pi}(\Pi_n) = \Phi\left(\frac{\Pi_n - nm}{S\sqrt{n(1+(n-1)r)}}\right). \tag{19}$$

Кроме вероятностных характеристик суммарной поврежденности, можно определить и вероятностные характеристики долговечности детали, в частности, вероятностные характеристики чисел циклов до разрушения.

При заданной степени повреждения Π_0 вероятность того, что случайная величина числа циклов до появления отказа N меньше n , равна вероятности превышения накопленной поврежденностью Π_n допустимого уровня Π_0 :

$$P(N < n) = P(\Pi_n > \Pi_0) = F_n(n) = \int_{\Pi_0}^{\infty} f_{\Pi_n}(\Pi_n) d\Pi_n = 1 - \Phi\left(\frac{\Pi_0 - nm}{S\sqrt{n(1+(n-1)r)}}\right). \tag{20}$$

Плотность распределения чисел циклов $f_n(n)$, полученная дифференцированием выражения (20), будет иметь вид

$$f_{\Pi}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi S^2 n(1+(n-1)r)}} \times \exp\left(-\frac{(\Pi_0 - nm)^2}{2S^2 n(1+(n-1)r)}\right) \times \frac{\Pi_0(1-r+2nr) + mn(1-r)}{2n(1+(n-1)r)}. \tag{21}$$

Выражение (21) дает возможность рассчитать вероятностные характеристики накопленной поврежденности и надежности при произвольном постоянном коэффициенте корреляции между поврежденностями различных циклов.

С помощью выражений (20), (21) можно найти вероятностные характеристики чисел циклов до разрушения, принимая $\Pi_0=1$.

Формула (19) позволяет определить вероятность разрушения $P_{раз}$ и вероятность неразрушения $P_{нр}$ деталей ГТД при заданном числе циклов с помощью подстановки $\Pi_n=1$:

$$P_{раз} = 1 - P_{нр} = F_{\Pi}(1).$$

При $r = 0$ выражения для вероятностных характеристик накопленной поврежденности и чисел циклов до разрушения совпадают с формулами (10)–(14), которые были получены для аналогичных характеристик сумм независимых случайных поврежденностей.

Выражение (16) в частном случае процесса накопления повреждений при полной корреляционной связи между поврежденностями отдельных циклов ($r=1$) можно преобразовать к виду

$$S_n^2 = \sum_{i=1}^n S_i^2 + 2 \sum_{i<j} S_i S_j = \left(\sum_{i=1}^n S_i\right)^2 = n^2 S^2.$$

Используя формулы математического ожидания (17) и дисперсии (18), для вероятностных характеристик накопленной поврежденности и числа циклов до достижения процессом заданной поврежденности Π_0 получаем

$$\begin{aligned}
 f_{\Pi}(\Pi_n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi nS}} \exp\left(-\frac{(\Pi_n - nm)^2}{2n^2 S^2}\right); \\
 F_{\Pi}(\Pi_n) &= \Phi\left(\frac{\Pi_n - nm}{nS}\right); \\
 f_n(n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi nS}} \exp\left(-\frac{(\Pi_0 - nm)^2}{2n^2 S^2}\right) \frac{\Pi_0}{n}; \\
 F_n(n) &= 1 - \Phi\left(\frac{\Pi_0 - nm}{nS}\right).
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Моделі суммування пошкоджень для незалежних випадкових пошкоджень за цикл зображені на рис. 5.

На рис. 5, а показані траєкторії змінення накопленої пошкоженості при незначительній кореляційній залежності між пошкодженнями $r < 1$, а на рис. 5, б – при повній кореляційній зв'язі.

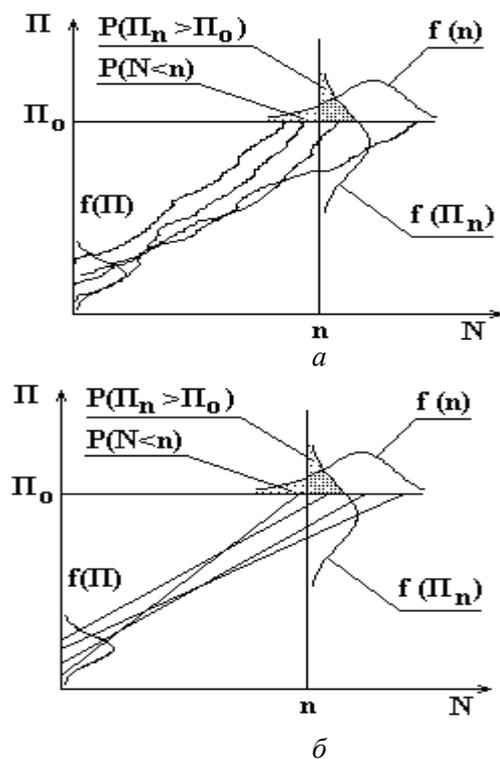


Рис. 5. Схема накоплення пошкоджень для незалежних (а) і залежних (б) випадкових пошкоджень

Плотності і закони розподілення ймовірностей чисел циклів до пересічення заданого рівня для різних коефіцієнтів кореляції показані на рис. 6.

К визначенню ймовірнісних характеристик (22) можна підійти і по-другому. Елементарні пошкодження Π_i підчинені єдиному закону розподілення пошкоженості за цикл $F_I(\Pi)$, який

в розглянутому випадку можна вважати законом розподілення середньої лінійної швидкості ω змінення накопленої пошкоженості.

Як показано на рис. 5, б, траєкторії процесу мають вигляд прямих ліній, виходячих з початкової точки під кутами, тангенсы яких розподілені по закону $F_{\omega}(\omega) = F_I(\omega)$.

Очевидно, число циклів (або час t) до пересічення процесом рівня Π_0 можна визначити по формулі

$$t = \Pi_0 / \omega = \varphi(\omega).$$

Якщо закон $F_{\omega}(\omega)$ нормальний, то, використовуючи формулу для знаходження густоти ймовірності розподілення від складної функції, отримуємо

$$\begin{aligned}
 f_t(t) &= f_{\omega}\left(\frac{\Pi_0}{t}\right) \frac{\Pi_0}{t^2} = \\
 &= \frac{\Pi_0}{\sqrt{2\pi S t^2}} \exp\left(-\frac{(\Pi_0 - mt)^2}{2t^2 S^2}\right);
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
 F_t(t) &= \int_0^t f_{\omega}(t) dt = \\
 &= 1 - F_{\omega}\left(\frac{\Pi_0}{t}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{\Pi_0 - mt}{St}\right).
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

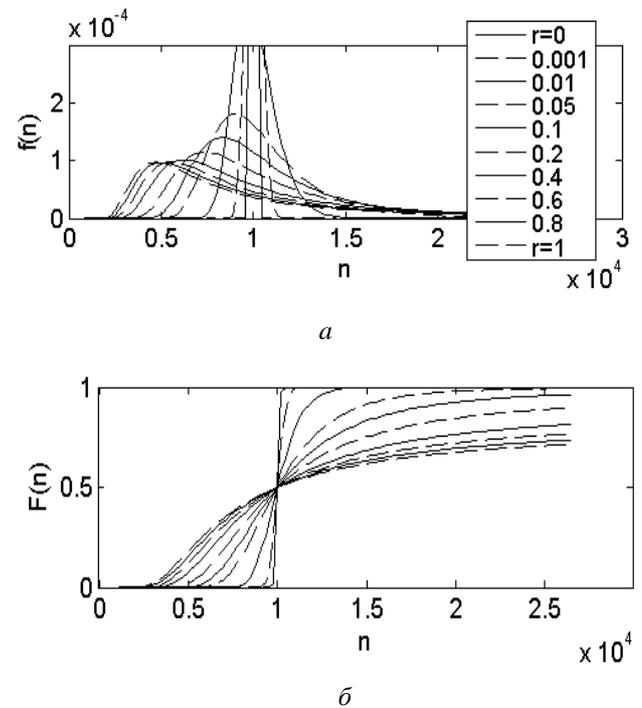


Рис. 6. Густина (а) і функція (б) розподілення чисел циклів до предельного стану для різних r при $m=0,0001$, $S=0,00011$

Выражения (23), (24) для плотности и функции распределения вероятностей времени достижения процессом заданной степени повреждения Π_0 совпадают с формулами (22) при замене t на n .

Рассмотренный пример показывает, что второй способ нахождения вероятностных характеристик при $r = 1$ намного проще и может использоваться для случайных величин с любыми исходными законами распределения поврежденности за цикл.

Формулы для плотности и функции распределения времени достижения процессом заданной поврежденности Π_0 для других законов распределения поврежденности за цикл приведены в табл. 3.

Вероятностные модели суммирования повреждений, основанные на безграничной делимости законов распределения

Вероятностные характеристики сумм случайных величин можно получить многократным интегрированием их совместной плотности распределения:

$$f_{\Pi_n}(\Pi_n) = \int \dots \int f\left(\Pi_1, \Pi_2 - \Pi_1, \dots, \Pi_n - \Pi_{n-1}\right) d\Pi_1 \dots d\Pi_{n-1};$$

$$F_{\Pi_n}(\Pi_n) = \int \dots \int_{\sum_{i=1}^n \Pi_i < \Pi_n} f(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n) d\Pi_1 \dots d\Pi_n.$$

Для безгранично делимых законов, к которым относятся нормальный и гамма-распределения, закон распределения сумм независимых случайных величин также будет принадлежать к виду порождающих их законов.

Таблица 3

Вероятностные характеристики времени до разрушения при характерных законах поврежденности за цикл

№ п/п	Закон распределения	Параметры закона	Плотность распределения		Функция распределения времени достижения заданной поврежденности $\Pi_0 F_i(t)$
			скорости изменения поврежденности ω $f_\omega(\omega)$	времени достижения процессом заданной поврежденности $\Pi_0 f_i(t)$	
1	Нормальный	m, S^2	$\frac{1}{\sqrt{2\pi S}} \exp\left(-\frac{(\omega - m)^2}{2S^2}\right)$	$\frac{\Pi_0}{\sqrt{2\pi S t^2}} \exp\left(-\frac{\left(\frac{\Pi_0}{t} - m\right)^2}{2S^2}\right)$	$1 - \Phi\left(\frac{\Pi_0/t - m}{S}\right)$
2	Логарифмически-нормальный	m_L, S_L^2	$\frac{\lg e}{\sqrt{2\pi S_L \omega}} \exp\left(-\frac{(\lg \omega - m_L)^2}{2S_L^2}\right)$	$\frac{\lg e}{\sqrt{2\pi S_L t}} \exp\left(-\frac{(\lg(t/\Pi_0) + m_L)^2}{2S_L^2}\right)$	$1 - \Phi\left(\frac{\lg(t/\Pi_0) + m_L}{S_L}\right)$
3	Гамма	α, β	$\frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \omega^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{\omega}{\beta}\right)$	$\left(\frac{\Pi_0}{\beta}\right)^\alpha \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{-\alpha-1} \exp\left(-\frac{\Pi_0}{\beta t}\right)$	$1 - \frac{\Gamma\left(\alpha; \frac{\Pi_0}{t\beta}\right)}{\Gamma(\alpha)}$
4	Бета	a, b	$\frac{1}{B(a,b)} \omega^{a-1} (1-\omega)^{b-1},$ $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$	$\frac{1}{B(a,b)} \left(\frac{\Pi_0}{t}\right)^{a-1} \left(\frac{t-\Pi_0}{t}\right)^{b-1} \frac{\Pi_0}{t^2}$	$1 - \frac{B(a,b; \Pi_0/t)}{B(a,b)},$ $B(a,b;x) = \int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt$
5	Вейбулла	c, α	$c\alpha \omega^{\alpha-1} \exp(-c\omega^\alpha)$	$\frac{c\alpha \Pi_0^\alpha}{t^{\alpha+1}} \exp\left(-c\left(\frac{\Pi_0}{t}\right)^\alpha\right)$	$\exp\left(-c\left(\frac{\Pi_0}{t}\right)^\alpha\right)$

Для нормального закона свойство безграничной делимости сохраняется и при слабозависимых случайных величинах. Как доказал в 1977 г. шведский математик О. Торин, очень важный для практики логарифмически-нормальный закон также является безгранично делимым [34].

Однако, в явном виде определить параметры этого закона с помощью обычных методов возможно. Поэтому рассмотрим приближенный метод оценки параметров законов распределения накопленных сумм, используя их связи с числовыми характеристиками и общими свойствами математических ожиданий и дисперсий.

При $r_{ij}=r=\text{const}$ математическое ожидание m_n и дисперсию S_n^2 накопленной поврежденности при суммировании одинаково распределенных случайных величин вычисляют по формулам (17), (18). Связь между этими числовыми характеристиками и параметрами распределения можно выразить в соответствии с методом моментов.

Аналогичные зависимости можно получить и для связи параметров исходного распределения поврежденности за цикл с его теоретическими моментами. Применительно к нормальному и гамма-распределению этот метод приводит к тому же результату, что и классический.

При логарифмически-нормальных распределениях поврежденностей за цикл выражения для параметров накопленной поврежденности можно записать следующим образом:

$$m_{L_n} = \ln \frac{m_n^2}{\sqrt{S_n^2 + m_n^2}} = \ln \left(\frac{n^2 m}{\sqrt{\frac{S^2}{m^2} n(1+(n-1)r) + n^2}} \right) = \tag{25}$$

$$= \ln \frac{n^2 \exp\left(\frac{S_L^2}{2} + m_L\right)}{\sqrt{(\exp(S_L^2) - 1)n(1+(n-1)r) + n^2}}$$

$$S_{L_n}^2 = \ln \left(\frac{S_n^2}{m_n^2} + 1 \right) = \ln \left(\frac{S^2(1+(n-1)r)}{m^2 n} + 1 \right) =$$

$$= \ln \left(\frac{(1+(n-1)r)(\exp(S_L^2) - 1)}{n} + 1 \right), \tag{26}$$

где $m_L, S_L^2, m_{L_n}, S_{L_n}^2$, – параметры законов распределения поврежденностей за цикл и накопленной поврежденности;

m, S^2, m_n, S_n^2 – соответствующие моменты распределений.

Функции и плотности для логарифмически-нормального распределения чисел циклов до достижения накопленной поврежденностью заданного уровня Π_0 имеют вид:

$$F_{L_n}(n) = 1 - \Phi \left(\frac{\ln \Pi_0 - m_{L_n}}{S_{L_n}} \right);$$

$$f_{L_n}(n) = \frac{dF_{L_n}}{dn} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} S_{L_n}} \exp \left(-\frac{(\ln \Pi_0 - m_{L_n})^2}{2S_{L_n}^2} \right) \times$$

$$\times \left(c_n + \frac{(\ln \Pi_0 - m_{L_n})}{2S_{L_n}^2} b_n \right),$$

где

$$c_n = \frac{2}{n} - \frac{a(1-r+2nr)+2n}{2(an(1+(n-1)r)+n^2)};$$

$$b_n = \frac{ar - a(1+(n-1)r)}{\frac{n}{a(1+(n-1)r) - 1}};$$

$$a = \exp(S_L^2) - 1.$$

Формулы для функции и плотности распределения чисел циклов до разрушения при других законах распределения поврежденностей за цикл приведены в табл. 4.

Используя полученные выражения, можно найти наиболее вероятный и гамма-процентный ресурс детали. Медианное значение ресурса определяется из решения уравнения

$$\ln(\Pi_0) - m_{L_n} = 0. \tag{27}$$

Подставляя в формулу (27) выражение (25) для m_{L_n} находим, что число циклов до разрушения является одним из корней кубического уравнения

$$n^3 + pn + q = 0,$$

где

$$p = -(b + ar);$$

$$q = -(a - r);$$

$$a = \frac{\Pi_0^2 S^2}{m^2 m^2};$$

Таблиця 4

Функции и плотности распределения чисел циклов до разрушения

№ п/п	Закон распределения	Параметры	Функция Распределения $F_n(n)$	Плотность распределения $f_n(n)$	Дополнительные коэффициенты $f_n(n)$
1	Нормальный	m, S^2, r m_n, S_n^2	$1 - \Phi\left(\frac{\Pi_0 - m_n}{S_n}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi S_n^2}} \exp\left(-\frac{(\Pi_0 - m_n)^2}{2S_n^2}\right) a_n$	$a_n = m + \frac{\Pi_0 - mn}{S_n} \frac{S(1-r+2nr)}{2\sqrt{n(1+(n-1)r)}}$
2	Логарифмически-нормальный	m_L, S_L^2, r m_n, S_n^2	$1 - \Phi\left(\frac{\ln \Pi_0 - m_{L_n}}{S_{L_n}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi S_{L_n}^2}} \exp\left(-\frac{(\ln \Pi_0 - m_{L_n})^2}{2S_{L_n}^2}\right) \times$ $\times \left(c_n + \frac{(\ln \Pi_0 - m_{L_n})}{2S_{L_n}^2} b_n\right)$	$c_n = \frac{2}{n} - \frac{a(1-r+2nr) + 2n}{2(an(1+(n-1)r) + n^2)}$; $\frac{ar - a(1+(n-1)r)}{n}$; $b_n = \frac{n}{a(1+(n-1)r) - 1} - 1$; $b_n = \frac{a+r}{n(a+r)+1-r} - \frac{r}{1+(n-1)r}$; $a = \exp(S_L^2) - 1$
3	Гамма	α, β, r α_n, β_n	$\frac{\Gamma\left(\alpha_n; \frac{\Pi_0}{\beta_n}\right)}{\Gamma(\alpha_n)}$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha_n)} \left[\left(\Psi(\alpha_n) \Gamma\left(\alpha_n; \frac{\Pi_0}{\beta_n}\right) - \Gamma'_{\alpha_n} \right) \times \right.$ $\left. \times \frac{(1-r)\alpha}{(1+(n-1)r)^2} + \Gamma'_{\beta_n} r \beta \right]$	$\Gamma'_{\alpha_n} = \left(\frac{\Pi_0}{\beta_n}\right)^{\alpha_n} \left[\ln \frac{\Pi_0}{\beta_n} \Gamma\left(\alpha_n; \frac{\Pi_0}{\beta_n}\right) - \right.$ $\left. - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\Pi_0}{\beta_n}\right)^k}{k! (\alpha_n + k)^2} \right]$; $\Gamma'_{\beta_n} = \left(\frac{\Pi_0}{\beta_n}\right)^{\alpha_n} \frac{1}{\beta_n} \exp\left(-\frac{\Pi_0}{\beta_n}\right)$
4	Вейбулла	α, c, r α_n, c_n	$\exp(-c_n \Pi_0^{\alpha_n})$	$c_n \Pi_0^{\alpha_n} \exp(-c_n \Pi_0^{\alpha_n}) \times$ $\times \left[\frac{\alpha_n}{n} - b_n \left(a_n + \frac{\ln \Pi_0}{\Pi_0} \right) \right]$	$a_n = \ln \left(\frac{a \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)}{n} \right) + \alpha_n \Psi\left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)$; $b_n = \frac{(1-r)\alpha_n}{2(1+(n-1)r) [\Psi(1+2/\alpha_n) - \Psi(1+1/\alpha_n)]}$; $a = \frac{c^{\alpha_n}}{\Gamma(1+1/\alpha)}$

Примечание. $\Gamma(x)$, $\Gamma(\alpha; x)$ – полная и неполная гамма-функция;

$$\Psi(x) = \frac{d \ln \Gamma(x)}{dx} \text{ – пси-функция;}$$

$$b = \frac{\Pi_0^2}{m^2};$$

$$m = \exp\left(\frac{S_1^2}{2} + m_1\right);$$

$$\frac{S^2}{m^2} = \exp(S_1^2) - 1.$$

При больших значениях n в случае, если параметры m и S одного порядка, возможно приближенное решение

$$n \approx \sqrt{b + ar}.$$

Для нормально распределенной накопленной поврежденности медианное число циклов, согласно уравнению (19), определяют по формуле

$$n = \frac{\Pi_0}{m}.$$

Гамма-процентный ресурс, т.е. предельное число циклов при заданной вероятности разрушения (неразрушения) n_p для логарифмически-нормального закона можно найти из решения уравнения

$$\frac{\ln \Pi_0 - m_{L_n}}{S_{L_n}} = \alpha, \tag{28}$$

где α – квантиль нормального распределения, соответствующий заданной вероятности разрушения P_p :

$$\alpha = \Phi^{-1}(1 - P_p) = \Phi^{-1}(P_{np}).$$

Используя выражения (25), (26), (28), для определения n_p получаем нелинейное уравнение

$$\ln\left(\frac{\Pi_0}{mn_p} \sqrt{U_1 + \frac{U_2}{n_p}}\right) - \alpha \sqrt{\ln\left(U_1 + \frac{U_2}{n_p}\right)} = 0,$$

где

$$U_1 = 1 + \frac{S^2 r}{m^2};$$

$$U_2 = \frac{S^2}{m^2}(1-r).$$

В случае нормальных случайных величин поврежденностей с учетом выражений (17), (18), (19) n_p определяется из решения квадратного уравнения

$$an_p^2 - bn_p + c = 0,$$

где

$$a = m^2 - \alpha^2 S^2 r;$$

$$b = 2m\Pi_0 + (1-r)\alpha^2 S^2;$$

$$c = \Pi_0^2.$$

Вероятностные последовательности и процессы поврежденности и накопленной поврежденности

Рассмотрим пути обобщения полученных результатов, когда поврежденность является стационарным случайным процессом (последовательностью) с нормированной корреляционной функцией:

$$r_{ij} = r(j-i) = r(k) \neq \text{const},$$

где

$$k=j-i.$$

Выражение (16) для дисперсии S_n в этом случае приводится к виду

$$S_n^2 = S^2 \left(n + 2 \sum_{i < j} r_{ij} \right) = S^2 \left(n + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)r(k) \right). \quad (29)$$

Используя формулу (29), можно получить выражения для дисперсий накопленной поврежденности. В частности, при

$$r_{ij} = \exp(-\alpha|j-i|)$$

$$S_{2n}^2 = S^2 \left(n + 2 \frac{nx}{1-x} \left(1 - \frac{1-x^n}{n(1-x)} \right) \right), \quad (30)$$

где $x = \exp(-\alpha)$,
при $r_{ij} = \cos(j-i)$

$$S_{3n}^2 = S^2 \frac{1 - \cos(n\beta)}{1 - \cos(\beta)}. \quad (31)$$

С физической точки зрения формула (30) предназначена для процесса, в котором корреляционные связи между элементами с течением времени убывают, формула (31) – для циклических стохастических процессов.

С учетом того, что коэффициенты корреляции r_{ij} между поврежденностями в i -м и j -м полетах из-за влияния стохастических свойств материала положительны и больше некоторой величины r , для общего анализа представляют также интерес процессы с корреляционными функциями вида

$$r_{ij} = r + (1-r)\exp(-\alpha|j-i|);$$

$$r_{ij} = r + (1-r)\cos\beta(j-i).$$

В этом случае дисперсии накопленной поврежденности определяются в соответствии с выражениями:

$$S_{4n}^2 = S^2 \left(n(1 + (n-1)r) + (1-r) \frac{2nx}{1-x} \left(1 - \frac{1-x^n}{n(1-x)} \right) \right);$$

$$S_{5n}^2 = S^2 \left(n^2 r + (1-r) \frac{1 - \cos(n\beta)}{1 - \cos(\beta)} \right).$$

Аналогичные выражения для параметров законов распределения накопленной поврежденности можно получить, если процесс накопления повреждений является стационарным случайным процессом с корреляционной функцией $r_{ij} = r(j-i)$.

В частности, при экспоненциальной корреляционной функции

$$r_{ij} = \exp(-\alpha|j-i|)$$

для логарифмически-нормальных случайных поврежденностей эти выражения имеют вид:

$$m_{Ln} = \ln \frac{n^2 \exp\left(\frac{S_L^2}{2} + m_L\right)}{\sqrt{\left(\exp(S_L^2) - 1\right) \left(n + \frac{2nx}{1-x} \left(1 - \frac{1-x^n}{n(1-x)} \right) \right) + n^2}}$$

$$S_{Ln}^2 = \ln \left(\left(\exp(S_L^2) - 1\right) \left(\frac{1}{n} + \frac{2x}{n(1-x)} \left(1 - \frac{1-x^2}{n(1-x)} \right) \right) + 1 \right),$$

где $x = \exp(-\alpha)$.

Процесс накопления повреждений связан с процессом поврежденности интегральной зависимостью (9):

$$\Pi_n(t) = \int_0^t \Pi(t) dt. \quad (32)$$

Исходный процесс поврежденности $\Pi(t)$, характеризующий линейную скорость изменения поврежденности, можно представить как квазистационарный случайный процесс с математическим ожиданием $m(t)$, дисперсией S^2 и нормированной корреляционной функцией $r(\tau)$. Учитывая зависимость (32), дисперсию накопленной поврежденности можно вычислить по формуле

$$\sigma_n^2(t) = 2S^2 \int_0^t (t-\tau)r(\tau)d\tau \quad (33)$$

или при $r(0) \neq 1$ по формуле

$$\sigma_n^2(t) = S^2 \left(t + 2 \int_0^t (t-\tau)r(\tau)d\tau - r(0)t \right).$$

При значительной перемешанности процесса поврежденности от полета к полету и малой величины поврежденности, которая вносится за один полет по сравнению с предельной, распределение накопленной поврежденности будет иметь нормальный характер.

Функция распределения времени до разрушения при этом равна

$$F_t(t) = 1 - \Phi \left(\frac{\Pi_0 - m_n(t)}{\sigma_n(t)} \right), \quad (34)$$

где Π_0 – предельная поврежденность.

Условную плотность вероятности времени до разрушения можно найти дифференцированием выражения (34):

$$f_t(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n(t)} \exp \left(-\frac{(\Pi_0 - m_n(t))^2}{2\sigma_n^2(t)} \right) \times \left[a_0(t) + \frac{b_0(t)}{\sigma_n(t)} (\Pi_0 - m_n(t)) \right]$$

где $a_0(t)$, $b_0(t)$ – локальные скорости изменения математического ожидания и дисперсии процесса поврежденности:

$$a_0(t) = \frac{d}{dt} m_n(t);$$

$$b_0(t) = \frac{d}{dt} \sigma_n(t).$$

В качестве примера рассмотрим определение этих характеристик при экспоненциальной корреляционной функции процесса поврежденности:

$$r(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|).$$

В этом случае выражение для дисперсии накопленной поврежденности, согласно формуле (33), принимает вид

$$\sigma_n^2(t) = 2S^2 \left(\frac{t}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} (1 - \exp(-\alpha t)) \right). \quad (35)$$

Как видно из выражения (35), дисперсия накопленной поврежденности зависит от временной координаты, т.е. процесс нестационарный. При $\alpha t \gg 1$ процесс поврежденности близок к линейному.

Аналогичный смысл имеет выражение для дисперсии (30).

При значениях $\alpha < 0,1$ выражения (30) и (35) практически совпадают, так как

$$\frac{1 + \exp(-\alpha)}{1 - \exp(-\alpha)} \approx \frac{2}{\alpha},$$

$$\frac{\exp(-\alpha)}{(1 - \exp(-\alpha))^2} \approx \frac{1}{\alpha^2}.$$

Локальная скорость изменения дисперсии процесса накопления повреждений согласно уравнению (35) выражается следующим образом:

$$b_0(t) = \frac{d}{dt} \sigma_n(t) = S^2 \frac{2}{\alpha} (1 - \exp(-\alpha t)).$$

Выражения для дисперсий накопленной поврежденности и их локальных скоростей, полученных для различных нормированных корреляционных функций процессов поврежденности приведены в табл. 5. Эти соотношения могут использоваться для описания процессов поврежденности и определения вероятностных характеристик надежности и долговечности деталей ГТД.

Нелинейные модели вероятностного суммирования повреждений

Согласно рассматриваемым кинетическим моделям мера повреждения увеличивается по линейному закону. Однако кинетика процесса поврежденности при усталости, износе, накоплении пластических деформаций и других видах подчиняется нелинейным законам.

Нелинейную динамическую модель процессов поврежденности, основанную на гипотезе об автомодельности накопления повреждений, можно представить как в виде дифференциального уравнения, так и с помощью нелинейной функциональной зависимости поврежденности от нагрузки, параметры которой можно определить по данным эксплуатационных измерений инструментальными методами контроля. Рассмотрим два подхода к описанию процессов накопления повреждений.

Таблиця 5

Характеристики случайных процессов поврежденности

№ п/п	Нормированная корреляционная функция процесса поврежденности $r(t_2, t_1) = r(\tau)$	Дисперсия накопленной поврежденности $S_i^2(t) = 2S^2 \int_0^t (t-r)r(\tau)d\tau$	Локальная скорость изменения дисперсии $b_i(t) = dS_i^2(t)/dt$
1	$\exp(-\alpha \tau)$	$2S^2 \left(\frac{t}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} (1 - \exp(-\alpha t)) \right)$	$\frac{2S^2}{\alpha} (1 - \exp(-\alpha t))$
2	$\exp(-\alpha \tau) \left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin\beta \tau \right)$	$2S^2 \left(\frac{\exp(-\alpha t)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \left((3\alpha^2 - \beta^2) \cos\beta t + \left(3\alpha\beta + \frac{\alpha^3}{\beta} \right) \sin\beta t \right) + \frac{2\alpha t}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{3\alpha^2 - \beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \right)$	$2S^2 \left(\frac{\exp(-\alpha t)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \left((\beta^2 + \alpha^2) (-2\alpha) \cos\beta t + \left(\beta^3 - \frac{\alpha^4}{\beta} \right) \sin\beta t \right) + \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \right)$
3	$\exp(-\alpha^2\tau^2)$	$S^2 \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha} t \cdot \text{erf}(\alpha t) + \frac{1}{\alpha^2} (\exp(-\alpha^2 t^2) - 1) \right)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \text{erf}(\alpha t),$ $\text{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp(-t^2) dt$
4	$\frac{\sin\beta\tau}{\beta\tau}$	$2S^2 \left(t \text{Si}(\beta t) + \frac{1}{\beta^2} (\cos\beta t - 1) \right)$	$2S^2 \text{Si}(\beta t),$ где $\text{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin t}{t} dt$
5	$rr_1(\tau) + (1-r)r_2(\tau)$	$rS_{i_1}(t) + (1-r)S_{i_2}(t)$	$rb_{i_1}(t) + (1-r)b_{i_2}(t)$

Пусть функция $\Omega(t)$ в любой момент времени t описывает кумулятивный процесс накопления повреждений

$$\frac{d\Omega}{dt} = W(\Omega, \bar{Q}), \quad t = \overline{0, T} \tag{36}$$

с граничными условиями

$$\Omega(0) = 0, \Omega(T) = \Omega^*$$

или в дискретном времени

$$\Omega_n - \Omega_{n-1} = \omega(\Omega_{n-1}, \bar{Q}), \quad n = \overline{1, N} \tag{37}$$

с граничными условиями

$$\Omega_0 = 0, \Omega_N = \Omega^*,$$

где $W(\cdot)dt, \omega(\cdot)$ – приращения процессов в непрерывном и дискретном времени ($W(\cdot) > 0, \omega(\cdot) > 0$);

\bar{Q} – вектор нагрузок.

В частности, когда приращение процесса не зависит от накопленного повреждения, формулы (36), (37) выражают линейное правило суммирования повреждений:

$$\Omega(T) = \int_0^T W(\bar{Q}) dt = \int_0^T \frac{dt}{\tau(\bar{Q})} = 1,$$

$$\Omega_N = \sum_{n=1}^N (\Omega_n - \Omega_{n-1}) = \sum_{n=1}^N \frac{t_n}{\tau(\bar{Q}_n)} = 1,$$

где $\tau(\cdot)$ – характеристики прочности.

К линейному закону можно подойти и при суммировании повреждений, нелинейно зависящих от времени, используя гипотезу об автономности процесса накопления повреждений. Для этого вместо повреждений, отражающих наблюдаемые процессы $\Omega(t)$, рассмотрим псевдоповреждения $\Pi(t)$, которые связаны с исходным процессом нелинейной функциональной зависимостью вида

$$\Pi(t) = \Psi(\Omega(t)). \tag{38}$$

При этом в начальный момент времени значение псевдоповреждения равно нулю, а в момент разрушения – единице. В качестве такого псевдоповреждения можно рассматривать относительную наработку детали.

С учетом граничных условий (36) для крайних значений функции $\Psi(\cdot)$ можно записать

$$\Psi(0)=0, \Psi(\Omega^*)=1$$

С математической точки зрения гипотеза об автомодельности процесса накопления повреждений фактически сводится к разделению переменных в уравнении (36):

$$\frac{d\Omega}{dt} = W_1(\Omega)W_2(\bar{Q}), \quad (39)$$

что приводит к возможности получения решения в виде

$$\int_0^{\Omega} \frac{d\Omega}{W_1(\Omega)} = \int_0^{\bar{Q}} W_2(\bar{Q}) dt, \quad (40)$$

где интеграл в левой части уравнения является псевдоповреждением.

В случае существования интеграла (40) функции $\Psi(\cdot)$ и $W_1(\cdot)$ связаны между собой выражениями:

$$\begin{aligned} \Pi &= \Psi(\Omega) = \int_0^{\Omega} \frac{d\Omega}{W_1(\Omega)}; \\ W_1(\Omega) &= \frac{1}{\frac{d}{d\Omega} \Psi(\Omega)}, \end{aligned} \quad (41)$$

из которых видно, что, имея функциональную зависимость (38), можно описать процесс повреждения с помощью дифференциального уравнения (39), а из описания процесса в виде дифференциального уравнения следует выражение, связывающее процесс повреждения с эквивалентной наработкой детали.

При описании процесса повреждения обычно исходят из обратной зависимости повреждения от эквивалентной наработки или псевдоповрежденности:

$$\Omega = \varphi(\Pi) = \Psi^{-1}(\Pi). \quad (42)$$

В формулах (38), (42) в качестве выражений для функций $\varphi(\cdot)$ и $\Psi(\cdot)$ удобно выбрать зависимости, которые имеют однозначные монотонные обратные функции.

В частности, при описании процессов длительной прочности [35] в качестве повреждения Ω часто используют структурный параметр, который является мерой растресканности материала. Функциональную связь, устанавливающую зависимость между мерой растресканности и эксплуатационной наработкой, можно описать выражением

$$\Omega = \varphi(t) = \mu \left(1 - \left(1 - \frac{t}{v} \right)^k \right) = \mu \left(1 - (1 - \Pi)^k \right), \quad (43)$$

$$\varphi(0) = 0, \varphi(t^*) = \Omega^*$$

где μ, v, k – параметры модели;

$\Pi = t/t^*$ – псевдоповрежденность, соответствующая относительной наработке;

Ω^*, t^* – поврежденность и наработка в момент разрушения.

Параметры модели μ и v удобно определять исходя из граничных условий. Если $v = t^*$ и $\mu = \Omega^*$, то граничные условия удовлетворяются и параметры приобретают физический смысл.

Параметр k можно определить, когда известно еще хотя бы одно значение поврежденности Ω' для заданной наработки t' . При этом

$$k = \ln \left(1 - \frac{\Omega'}{\Omega^*} \right) / \ln \left(1 - \frac{t'}{t^*} \right).$$

Обратная функция, согласно зависимости (38), имеет вид

$$t = \Psi(\Omega) = v \left[1 - \left(1 - \frac{\Omega}{\mu} \right)^{\frac{1}{k}} \right].$$

Используя формулу (41) для параметра обратной скорости изменения поврежденности $W_1(\cdot)$, можно записать

$$W_1(\Omega) = \frac{k\mu}{v} \left(1 - \frac{\Omega}{\mu} \right)^{\frac{1}{k}-1}. \quad (44)$$

С учетом выражения (43) получим

$$W_1(t) = W_1(\varphi(t)) = \frac{k\mu}{v} \left(1 - \frac{t}{v} \right)^{k-1}.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение, описывающее процесс растресканности материала под действием нагрузок, приобретает вид

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{k\mu}{v} \left(1 - \frac{\Omega}{\mu} \right)^{\frac{1}{k}-1} \frac{1}{\tau(\bar{Q})},$$

где $\tau(\cdot)$ – характеристики длительной прочности материала КЭ.

Аналогичные результаты можно получить и для других функциональных зависимостей повреждения от наработки, удовлетворяющих граничным условиям (43). Двухпараметрические и трехпараметрические зависимости, обратные функции, уравнения для скорости изменения повреждения, выражения для определения коэффициентов этих зависимостей по экспериментальным данным приведены в табл. 6.

Таблиця 6

Двухпараметрические зависимости нелинейных процессов поврежденности

№ п/п	Зависимость поврежденности от псевдоповрежденности $\Omega = \varphi(t/v) = \varphi(\Pi)$	Обратная зависимость $t = \varphi(\Omega) = \varphi^{-1}(\Omega)$	Параметр модели $W(\Omega) = 1/\frac{d}{d\Omega} \Psi(\Omega)$	Коэффициенты модели $\mu, v = f(t^*, \Omega^*)$
1	Критерий Бейли $\mu \frac{t}{v} = \mu \Pi$	$\frac{v}{\mu} \Omega$	$\frac{\mu}{v}$	$\mu = \Omega^*$ $v = t^*$
2	$\mu \left(1 - \left(1 - \frac{t}{v} \right)^2 \right)$	$v \left(1 - \left(1 - \frac{\Omega}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \right)$	$\frac{2\mu}{v} \left(1 - \frac{\Omega}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}}$	$\mu = \Omega^*$ $v = t^*$
3	$-\mu \ln \left(1 - \frac{t}{v} \right)$	$v \left(1 - \exp \left(-\frac{\Omega}{\mu} \right) \right)$	$\frac{\mu}{v} \exp \left(\frac{\Omega}{\mu} \right)$	$\mu = \Omega^*$ $v = t^* \varepsilon, \varepsilon = e/(e-1)$
4	$\mu \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{v} \right) \right)$	$-v \ln \left(1 - \frac{\Omega}{\mu} \right)$	$\frac{\mu - \Omega}{v}$	$\mu = \Omega^* \varepsilon$ $v = t^*, \varepsilon = e/(e-1)$
5	$\mu \operatorname{tg} \frac{t}{v}$	$v \operatorname{arctg} \frac{\Omega}{\mu}$	$\frac{1}{v\mu} (\mu^2 + \Omega^2)$	$\mu = \Omega^*$ $v = t^* / \operatorname{arctg}(1)$
6	$\mu \operatorname{th} \frac{t}{v}$	$\frac{v}{2} \ln \left(\frac{\frac{\Omega}{\mu} + 1}{\frac{\Omega}{\mu} - 1} \right)$	$\frac{1}{v\mu} (\mu^2 - \Omega^2)$	$\mu = \Omega^* \varepsilon_1$ $v = t^*, \varepsilon_1 = \frac{e^2 + 1}{e^2 - 1}$
7	$\mu \sin \frac{t}{v}$	$v \operatorname{arcsin} \frac{\Omega}{\mu}$	$\frac{1}{v} \sqrt{\mu^2 - \Omega^2}$	$\mu = \Omega^*$ $v = t^* / \operatorname{arcsin}(1)$
8	$\mu \operatorname{sh} \frac{t}{v}$	$v \ln \left(\frac{\Omega}{\mu} + \sqrt{\left(\frac{\Omega}{\mu} \right)^2 + 1} \right)$	$\frac{1}{v} \sqrt{\mu^2 + \Omega^2}$	$\mu = \Omega^* \varepsilon_2$ $v = t^*, \varepsilon_2 = \frac{2e}{e^2 - 1}$

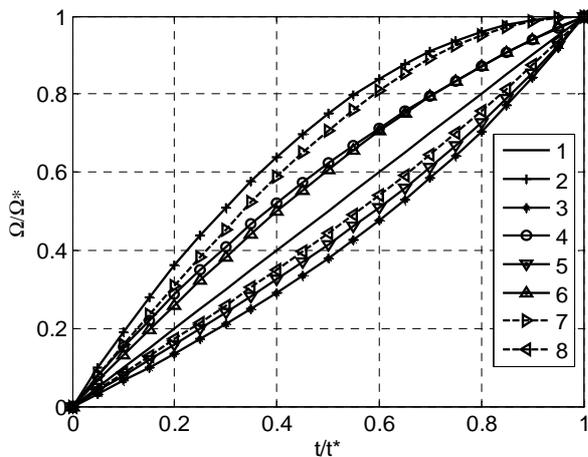


Рис. 7. Двухпараметрические зависимости поврежденности Ω / Ω^* от псевдоповрежденности t / t^*

Приведенная система функций дает достаточно полное математическое описание нелинейных процессов поврежденности и скорости их изменения. Подбором параметров этих зависимостей можно описать различные нелинейные процессы поврежденности.

Зависимости $\Omega = \varphi(t)$, описываемые уравнениями 2–8, приведенными в табл. 6, показаны на рис. 7.

При известной скорости изменения поврежденности для определения параметра k можно воспользоваться зависимостью $W(t') = W'$.

В частности, для функции (44) при $t=0$ имеем

$$W^* = W(0) = \frac{k\mu}{v} = \frac{k\Omega^*}{t^*},$$

откуда

$$k = \frac{W^* t^*}{\Omega^*}.$$

Составные и многостадийные модели суммирования повреждений

Для описания более сложных нелинейных процессов поврежденности, уравнения которых имеют одну или несколько точек перегиба, можно воспользоваться системой из двух (или более) вложенных функций или многостадийными моделями. В первом случае процесс поврежденности описывается выражением

$$\varphi(t) = \varphi_1(\varphi_2(t)),$$

где $\varphi_1(\cdot)$ и $\varphi_2(\cdot)$ – функции, приведенные в табл. 7.

Обратные функции и скорости изменения процессов поврежденности можно найти по формулам:

$$\Psi(t) = \Psi_2(\Psi_1(\Omega)) ;$$

$$W(\Omega) = W_2(\Psi_1(\Omega)) W_1(\Omega).$$

В частности, если функции $\varphi_1(\cdot)$ и $\varphi_2(\cdot)$ описываются выражениями 1, 2, приведенными в табл. 7, то для $\varphi(\cdot)$ можно записать

$$\varphi(t) = \mu_1 \left(1 - \left(1 - \frac{\mu_2}{v_1} \left(\frac{t}{v_2} \right)^{k_2} \right)^{k_1} \right), \tag{45}$$

где

$$\mu_2 = v_1; \quad v_1 = \Omega^*; \quad v_2 = t^*;$$

$$k_1 = \frac{\ln \left(1 - \frac{\Omega_1}{\Omega^*} \right)}{\ln \left(1 - \left(\frac{t_1}{t^*} \right)^{k_2} \right)},$$

k_2 определяется из решения уравнения

$$\left(1 - \left(\frac{t_1}{t^*} \right)^{k_2} \right)^\alpha - \left(1 - \left(\frac{t_2}{t^*} \right)^{k_2} \right) = 0,$$

$$\alpha = \frac{\ln \left(1 - \frac{\Omega_2}{\Omega^*} \right)}{\ln \left(1 - \frac{\Omega_1}{\Omega^*} \right)},$$

где $t_1, t_2, \Omega_1, \Omega_2$ – значения наработок и соответствующие им поврежденности.

На рис. 8 показаны зависимости поврежденностей от наработки для моделей из двух вложенных функций, описываемых уравнением (45)

при $t_1 = 500, t_2 = 1000, t^* = 2000, \Omega_1 = 0,3, \Omega_2 = 0,7, \Omega^* = 1$. Параметры уравнений при этом равны $\alpha = 3,3755, k_2 = 1,5531, k_1 = 2,8893$.

Для двухстадийных моделей функцию $\varphi(\cdot)$ можно представить в виде

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) & t \leq t_1 \\ \varphi_2(t - t_1) + \Omega_1 & t > t_1 \end{cases} \tag{46}$$

где $\varphi_1(t_1) = \Omega_1$.

Согласно выражению (46) на первом участке функция $\varphi(\cdot)$ изменяется по закону $\varphi_1(\cdot)$, а на втором начиная с точки (t_1, Ω_1) по закону $\varphi_2(\cdot)$.

При этом выражения для обратной функции и скорости принимают вид

$$\Psi(\Omega) = \begin{cases} \Psi_1(\Omega), & \Omega < \Omega_1, \\ \Psi_2(\Omega - \Omega_1) + t_1, & \Omega \geq \Omega_1 \end{cases}$$

при $\varphi_1(\Omega_1) = t_1$.

$$W(\Omega) = \begin{cases} W_1(\Omega), & \Omega < \Omega_1, \\ W_2(\Omega - \Omega_1), & \Omega \geq \Omega_1. \end{cases}$$

Если для зависимостей $\varphi_1(\cdot)$ и $\varphi_2(\cdot)$ из табл. 7 выбраны соответственно выражения 1, 2, то систему уравнений для двухстадийной модели можно записать в виде

$$\varphi(t) = \begin{cases} \mu_1 \left(\frac{t}{v_1} \right), & t < t_1, \\ \mu_2 \left(1 - \left(1 - \frac{t - t_1}{v_2} \right)^{k_2} \right) + \Omega_1, & t \geq t_1. \end{cases} \tag{47}$$

Используя данные о поведении функции на первом (t, Ω') и втором (t'', Ω'') участках, коэффициенты модели можно определить по формулам:

$$\mu_1 = \Omega_1; \quad v_1 = t_1;$$

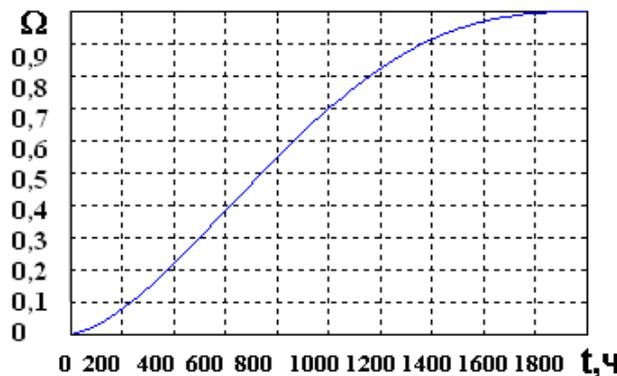


Рис. 8. Зависимость поврежденности Ω от наработки t для модели вложенных функций, описываемых уравнениями 1, 2, приведенными в табл. 7

Таблиця 7

Трехпараметрические зависимости нелинейных процессов поврежденности

№ п/п	Зависимость поврежденности от псевдоповрежденности $\Omega = \varphi(t/v) = \varphi(\Pi)$	Обратная зависимость $t = \psi(\Omega) = \varphi^{-1}(\Omega)$	Параметр модели $W(\Omega) = 1 / \frac{\partial}{\partial \Omega} \psi(\Omega)$	Коэффициенты модели $\mu, v, K = f(t^*, \Omega^*, t', \Omega')$
1	Критерий Ильющина $\mu \left(1 - (t/v)^k\right)$	$v(\Omega/\mu)^{1/k}$	$\frac{K\mu}{v} (\Omega/\mu)^{1 - \frac{1}{k}}$	$\mu = \Omega^*; v = t^*;$ $K = \ln(\Omega'/\Omega^*) / \ln(t'/t^*)$
2	Критерий Качанова $\mu \left(1 - \left(\frac{t}{v}\right)^k\right)$	$v \left(1 - \left(1 - \frac{\Omega}{\mu}\right)^{\frac{1}{k}}\right)$	$\frac{K\mu}{v} \left(1 - \frac{\Omega}{\mu}\right)^{1 - \frac{1}{k}}$	$\mu = \Omega^*; v = t^*;$ $K = \ln(1 - \Omega'/\Omega^*) / \ln(1 - t'/t^*)$
3	$-\mu \ln \left(1 - \left(\frac{t}{v}\right)^k\right)$	$v \left(1 - \exp\left(-\frac{\Omega}{\mu}\right)\right)^{\frac{1}{k}}$	$\frac{K\mu}{v} \frac{\exp(\Omega/\mu)}{(1 - \exp(-\Omega/\mu))^{\frac{1}{k}-1}}$	$\mu = \Omega^*; v = t^* \varepsilon^{1/k}; \varepsilon = e/(e-1);$ $K = \frac{\ln(1 - \exp(-\Omega'/\Omega^*)) + \ln \varepsilon}{\ln(t'/t^*)}$
4	$\mu \left(1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{v}\right)^k\right)\right)$	$v \operatorname{arctg}\left(\frac{\Omega}{\mu}\right)^{\frac{1}{k}}$	$\frac{K(-\Omega + \mu)}{v(-\ln(1 - \Omega/\mu))^{\frac{1}{k}-1}}$	$\mu = \Omega^* \varepsilon; \varepsilon = e/(e-1); v = t^*;$ $K = \frac{\ln(-\ln(1 - \Omega'/(\varepsilon \Omega^*)))}{\ln(t'/t^*)}$
5	$\mu \operatorname{tg}^k \frac{t}{v}$	$\frac{v}{2} \ln \frac{(\Omega/\mu)^{1/k} + 1}{(\Omega/\mu)^{1/k} - 1}$	$\frac{K\Omega}{v} \left(\left(\frac{\mu}{\Omega}\right)^{1/k} + \left(\frac{\Omega}{\mu}\right)^{1/k}\right)$	$\mu = \Omega^*; v = t / \operatorname{arctg}(1);$ $K = \frac{\ln(\Omega'/\Omega^*)}{\ln(\operatorname{tg}(t'/t^* \operatorname{arctg}(1)))}$
6	$\mu \operatorname{th}^k \frac{t}{v}$	$v \operatorname{arcsin}(\Omega/\mu)^{1/k}$	$\frac{K\Omega}{v} \left(\left(\frac{\mu}{\Omega}\right)^{1/k} - \left(\frac{\Omega}{\mu}\right)^{1/k}\right)$	$\mu = \Omega^* \varepsilon_1^K;$ $\varepsilon_1 = (e^2 + 1)/(e^2 - 1); v = t^*;$ $K = \frac{\ln(\Omega'/\Omega^*)}{\ln(\operatorname{th}(t'/t^*) \varepsilon_1)}$
7	$\mu \sin^k \frac{t}{v}$	$v \ln \left(\frac{(\Omega/\mu)^{1/k} + \sqrt{\left(\frac{\Omega}{\mu}\right)^{2/k} + 1}}{\left(\frac{\Omega}{\mu}\right)^{1/k} + 1}\right)$	$\frac{K\Omega}{v} \sqrt{\left(\frac{\mu}{\Omega}\right)^{2/k} - 1}$	$\mu = \Omega^*; v = t^* / \operatorname{arcsin} 1;$ $K = \frac{\ln(\Omega'/\Omega^*)}{\ln \sin(t'/t^* \operatorname{arcsin} 1)}$
8	$\mu \operatorname{sh}^k \frac{t}{v}$	$v \left(-\ln\left(1 - \frac{\Omega}{\mu}\right)\right)^{\frac{1}{k}}$	$\frac{K\Omega}{v} \sqrt{\left(\frac{\mu}{\Omega}\right)^{2/k} + 1}$	$\mu = \Omega^* \varepsilon_2^K; \varepsilon_2 = 2e/(e^2 - 1);$ $v = t^*;$ $K = \frac{\ln(\Omega'/\Omega^*)}{\ln(\operatorname{sh}(t'/t^*) \varepsilon_2)}$

$$k_1 = k(\Omega_1, t_1, \Omega', t') = \ln(\Omega'/\Omega_1) / \ln(t'/t_1);$$

$$\mu_2 = \Omega^* - \Omega_1; \quad v_2 = t^* - t_1;$$

$$k_2 = k \begin{pmatrix} \Omega'' - \Omega_1, \\ t'' - t_1, \\ \Omega^* - \Omega_1, \\ t^* - t_1 \end{pmatrix} = \frac{\ln \left(1 - \frac{\Omega'' - \Omega_1}{\Omega^* - \Omega_1} \right)}{\ln \left(1 - \frac{t'' - t_1}{t^* - t_1} \right)}.$$

Одним из условий, накладываемых на модель (47), может служить равенство скоростей изменения составляющих функции в точке стыковки:

$$W_1(\Omega_1) = W_2(\Omega_1).$$

В этом случае коэффициенты k_1 (или k_2) связаны зависимостью

$$k_1 = \frac{\Omega^* - \Omega_1}{\Omega_1} \frac{t_1}{t^* - t_1} k_2.$$

Таким образом, приведенная система функций дает возможность описать нелинейные процессы повреждения, наблюдаемые экспериментально, и связать их с псевдоповрежденностью (относительной наработкой $\Pi = t/t^*$).

Полученные результаты можно использовать для расчета вероятностных характеристик прочностной надежности при нелинейных процессах повреждения.

Рассмотрим методику определения вероятностных характеристик накопленной поврежденности и числа циклов до разрушения (ресурса) при нелинейных законах суммирования повреждений.

Аналогичные вероятностные характеристики получены для случая использования гипотезы суммирования зависимых случайных повреждений, распределенных по нормальному, логарифмически-нормальному законам. В случае нелинейного суммирования такие же вероятностные характеристики будут иметь псевдоповреждения. Это позволяет определить плотность распределения поврежденности по формуле

$$f_\Omega(\Omega) = f_n(\Psi(\Omega)) |\Psi'(\Omega)|,$$

где $f_n(\cdot)$ – плотность распределения псевдоповрежденности;

$\Psi(\cdot)$ – функция, обратная $\Phi(\cdot)$; $|\Psi'(\Omega)| = 1/|W(\Omega)|$ (табл. 7).

Для процессов, которые изменяются в соответствии с функциями $\Phi(\Pi)$, плотности распределения повреждения при нормальном или логарифмически-нормальных законах распределения псевдоповреждения имеют соответственно вид

$$f_{\Omega_n}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_n |W(\Omega)|} \times \exp \left(-\frac{(\Psi(\Omega) - m_n)^2}{2S_n^2} \right);$$

$$f_{\Omega_l}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_{Ln} \Psi(\Omega) |W(\Omega)|} \times \exp \left(-\frac{(\ln \Psi(\Omega) - m_{Ln})^2}{2S_{Ln}^2} \right),$$

где $m_n, S_n^2, m_{Ln}, S_{Ln}^2$ – параметры законов распределения псевдоповрежденности за n циклов:

$$m_n = nm;$$

$$S_n^2 = S_n^2 (1 + (n-1)r);$$

$$m_{Ln} = \ln \frac{n^2 \exp \left(\frac{S_L^2}{2} + m_L \right)}{\sqrt{(\exp(S_L^2) - 1)n(1 + (n-1)r) + n^2}},$$

$$S_{Ln}^2 = \ln \left(\frac{(\exp(S_L^2) - 1)(1 + (n-1)r)}{n} + 1 \right),$$

m, S^2, m_L, S_L^2 – параметры законов распределения псевдоповрежденности за цикл.

Для интегральных законов в этом случае можно записать

$$F_\Omega(\Omega) = \int_0^\Omega f(\Omega) d\Omega = \Phi \left(\frac{\Psi(\Omega) - m_n}{S_n} \right); \quad (48)$$

$$F_\Omega(\Omega) = \int_0^\Omega f(\Omega) d\Omega = \Phi \left(\frac{\ln \Psi(\Omega) - m_{Ln}}{S_{Ln}} \right).$$

В частности, для процессов, характеризующих меру растресканности, логарифмически-нормальные вероятностные характеристики можно выразить формулами:

$$f_{\Omega_l}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_{Ln} \left(1 - \frac{\Omega}{\mu} \right) \left(\left(1 - \frac{\Omega}{\mu} \right)^{\frac{1}{k}} - 1 \right)}$$

$$\times \exp \left(\frac{\left(\ln \left[\sqrt{1 - \left(1 - \frac{\Omega}{\mu} \right)^{\frac{1}{k}}} \right] - m_{Ln} \right)^2}{2S_{Ln}^2} \right),$$

$$F_{\Omega_l}(\Omega) = \Phi \left(\frac{\ln \left[\sqrt{1 - \left(1 - \frac{\Omega}{\mu} \right)^{\frac{1}{k}}} \right] - m_{Ln}}{S_{Ln}} \right).$$

Используя условие разрушения в виде $\Omega \geq \Omega^*$, вероятностные характеристики чисел циклов до разрушения можно определить по формулам:

$$\begin{aligned} F_n(n) &= P(N < n) = P(\Omega_n > \Omega^*) = \\ &= \int_{\Omega^*}^{\infty} f_{\Omega}(\Omega_n) d\Omega_n = 1 - F_{\Omega}(\Omega^*); \\ f_n(n) &= \frac{d}{dn} F_n(n); \\ \lambda_n(n) &= \frac{f_n(n)}{1 - F_n(n)}. \end{aligned} \quad (49)$$

В частном случае при логарифмически-нормальном распределении поврежденности выражения для плотности и функции распределения, а также функции интенсивности отказов имеют вид:

$$\begin{aligned} F_n(n) &= 1 - \Phi\left(\frac{\ln\Psi(\Omega) - m_{Ln}}{S_{Ln}}\right); \\ f_n(n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_{Ln}} \exp\left(-\frac{(\ln\Psi(\Omega) - m_{Ln})^2}{2S_{Ln}^2}\right) \times \\ &\times \left(c_n + \frac{\ln\Psi(\Omega) - m_{Ln}}{2S_{Ln}^2} b_n\right); \\ \lambda(n) &= \frac{f_n(n)}{1 - F_n(n)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{n} - \frac{a(1-r+2nr)+2n}{2(an(1+(n-1)r)+n^2)}; \\ b_n &= \frac{ar - \frac{a(1+(n-1)r)}{n^2}}{\frac{a(1+(n-1)r)}{n} - 1}; \\ a &= \exp(S_L^2) - 1. \end{aligned}$$

Используя выражение (49), можно определить наиболее вероятный и гамма-процентный ресурс детали. Медианное значение ресурса определяется из решения уравнения

$$\ln\Psi(\Omega^*) - m_{Ln} = 0. \quad (50)$$

Подставляя в формулу (50) выражение (26) для m_{Ln} , после несложных преобразований получаем, что число циклов до разрушения является одним из корней кубического уравнения

$$n^3 + pn + q = 0,$$

где $p = -(b + ar)$;

$$q = -(a - r);$$

$$a = \frac{\Psi^2(\Omega^*) S^2}{m^2 m^2};$$

$$b = \frac{\Psi^2(\Omega^*)}{m^2};$$

$$m = \exp\left(\frac{S_L^2}{2} + m_L\right);$$

$$\frac{S^2}{m^2} = \exp(S_L^2) - 1.$$

Для нормально распределенной накопленной поврежденности медианное число циклов согласно уравнению (48) определяют по формуле

$$n = \frac{\Psi(\Omega^*)}{m}.$$

Квантильные оценки ресурса, т.е. предельное число циклов при заданной вероятности разрушения (неразрушения) n_p можно найти из решения уравнения

$$\frac{\ln\Psi(\Omega^*) - m_{Ln}}{S_{Ln}} = \alpha, \quad (51)$$

где α – квантиль нормального распределения, соответствующий заданной вероятности разрушения P_p :

$$\alpha = \Phi^{-1}(1 - P_p) = \Phi^{-1}(P_{np}).$$

Используя выражения (26), (27), (51) для определения n_p , получаем нелинейное уравнение:

$$\ln\left(\frac{\Psi(\Omega^*)}{mn_p} \sqrt{U_1 + \frac{U_2}{n_p}}\right) - \alpha \sqrt{\ln\left(U_1 + \frac{U_2}{n_p}\right)} = 0,$$

где

$$U_1 = 1 + \frac{S^2 r}{m^2};$$

$$U_2 = \frac{S^2}{m^2} (1 - r).$$

В случае нормальных случайных величин псевдоповрежденностей n_p определяется из решения квадратного уравнения

$$an_p^2 - bn_p + c = 0,$$

где

$$a = m^2 - \alpha^2 S^2 r;$$

$$b = 2m\Psi(\Omega^*) + (1-r)\alpha^2 S^2;$$

$$c = \Psi^2(\Omega^*).$$

Приведенная методика дает возможность определить вероятностные характеристики накопленной поврежденности и выработки ресурса при нелинейных законах суммирования повреждений. Удобные с вычислительной точки зрения квантильные оценки ресурса позволяют для заданных вероятностей разрушения (неразрушения) определить прогнозируемые значения чисел циклов до разрушения.

Вероятностные характеристики коэффициентов запаса прочности, выработки ресурса и эквивалентной наработки

Для оценки ресурса и конструкционной прочности деталей используют также такие характеристики прочностной надежности: коэффициенты запаса прочности, выработки ресурса или эквивалентной наработки, определяющие их напряженность, несущую способность и долговечность.

Коэффициент запаса прочности, как показано в работе [36; 37], можно выразить через накопленную поврежденность детали Π_n за n полетов, используя полулогарифмическое или степенное представление характеристик долговечности материала

$$k_{\sigma} = 1 + \frac{\ln \Pi_n}{\eta}, \quad (52)$$

$$k'_{\sigma} = \Pi_n^{\frac{1}{\vartheta}} \quad (53)$$

где

$$\eta = \ln(10)B(T_s)\sigma_s;$$

$$\vartheta = B(T_s).$$

Эквивалентный запас долговечности определяется как величина, обратная накопленной поврежденности

$$k_D = \frac{1}{\Pi_n}. \quad (54)$$

Между минимальными нормированными коэффициентами запаса долговечности $k_{D\min}$ и прочности $k_{\sigma\min}$ или $k'_{\sigma\min}$ существует зависимость:

$$k_{\sigma\min} = 1 - \frac{\ln k_{D\min}}{\eta}; \quad (55)$$

$$k'_{\sigma\min} = (k_{D\min})^{-1/\vartheta}. \quad (56)$$

Соотношения (55), (56) нормируют, приводят к одному критерию значения предельных коэффициентов запаса прочности по напряжениям или долговечности для различных видов описаний характеристик прочности.

Для исследования количественных закономерностей процесса исчерпания длительной прочности материала детали во времени в эксплуатационной практике часто используют коэффициент выработки ресурса, который обычно принимают пропорциональным эквивалентной наработке детали или числу полетных циклов n :

$$k_B = \frac{n}{n_{\Pi}} 100\%,$$

где n_{Π} – предельное число полетных циклов до полной выработки ресурса.

Если использовать в качестве критерия прочности величину k_D (54), коэффициент выработки ресурса будет пропорциональным накопленной поврежденности:

$$k_{BD} = \frac{k_{D\min}}{k_D} 100\% = k_{D\min} \Pi_n 100\%.$$

При этом для предельного числа циклов до полной выработки ресурса можно записать

$$n_{\Pi 0} = \frac{n}{k_{BD}} 100\% = \frac{n \cdot k_D}{k_{D\min}} = \frac{n}{k_{D\min} \Pi_n}.$$

Как следует из выражения (54), коэффициент запаса долговечности связан обратной зависимостью с накопленной поврежденностью, поэтому его вероятностные характеристики определяются с помощью соотношений:

$$f_k(k_D) = f_{\Pi_n} \left(\frac{1}{k_D} \right) \frac{1}{k_D^2};$$

$$F_k(k_D) = 1 - F_{\Pi_n} \left(\frac{1}{k_D} \right),$$

где $f_{\Pi_n}(\cdot)$, $F_{\Pi_n}(\cdot)$ – плотность и функция распределения накопленной поврежденности.

В частном случае при логарифмически нормальном законе распределения накопленной поврежденности эти вероятностные характеристики принимают вид:

$$f_{kL}(k_D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} S_{Ln} k_D} \exp \left(- \frac{(\ln k_D + m_{Ln})^2}{2 S_{Ln}^2} \right);$$

$$F_{kL}(k_D) = 1 - \Phi \left(- \frac{\ln k_D + m_{Ln}}{S_{Ln}} \right).$$

Воспользовавшись формулами (52), (53) для плотности распределения эквивалентного запаса прочности, получим

$$f_k(k_{\sigma}) = f_{\Pi_n} (\exp(\eta(k_{\sigma} - 1))) \eta \exp(\eta(k_{\sigma} - 1));$$

$$f_k(k'_{\sigma}) = f_{\Pi_n} (k'_{\sigma})^{\nu} \nu |k'_{\sigma}|^{\nu-1}.$$

Отсюда при логарифмически-нормальном распределении накопленной поврежденности имеем

$$f_{kL}(k_{\sigma}) = \frac{|\eta|}{\sqrt{2\pi}S_{Ln}} \exp \left(- \frac{\left(k_{\sigma} - \left(1 + \frac{m_{Ln}}{\eta} \right) \right)^2}{2 \left(\frac{S_{Ln}}{\eta} \right)^2} \right);$$

$$f_{kL}(k'_{\sigma}) = \frac{|v|}{\sqrt{2\pi}S_{Ln}k'_{\sigma}} \exp \left(- \frac{\left(\ln k'_{\sigma} - \frac{m_{Ln}}{v} \right)^2}{2 \left(\frac{S_{Ln}}{\eta} \right)^2} \right).$$

Функции распределения эквивалентных запасов прочности в этом случае определяют из соотношений:

$$F_{kL}(k_{\sigma}) = \Phi \left(\frac{k_{\sigma} - \left(1 + \frac{m_{Ln}}{\eta} \right)}{\frac{S_{Ln}}{\eta}} \right), \quad (57)$$

$$F_{kL}(k'_{\sigma}) = \Phi \left(\frac{\ln k'_{\sigma} - \frac{m_{Ln}}{v}}{\frac{S_{Ln}}{v}} \right). \quad (58)$$

Выражения (56), (57) представляют собой соответственно нормальный и логарифмически-нормальный законы распределения с параметрами:

$$m_k = 1 + \frac{m_{Ln}}{\eta};$$

$$S_k = \frac{S_{Ln}}{\eta};$$

$$m'_{Lk} = 1 + \frac{m_{Ln}}{v};$$

$$S'_{Lk} = \frac{S_{Ln}}{v}.$$

Эквивалентную наработку на режиме определяют из соотношения

$$t_{эj} = \tau_{э} \Pi_j, \quad (59)$$

где $\tau_{э}$ – эквивалентная долговечность, которая соответствует эквивалентным параметрам нагружения $T_{э}$ и $\sigma_{э}$:

$$\tau_{э} = \tau(\sigma_{э}, T_{э}).$$

Величины $T_{э}$, $\sigma_{э}$, а значит и $\tau_{э}$ детерминированные, поэтому в равенстве (59) случайные величины $t_{эj}$, Π_j линейно зависимые с коэффициентом пропорциональности $\tau_{э}$.

При логарифмически-нормальном распределении поврежденности Π_j закон распределения $t_{эj}$ также логарифмически-нормальный с параметрами

$$m_{Lij} = \ln t_{э} + m_{Lj},$$

$$S_{Lij}^2 = S_{Lj}^2$$

и числовыми характеристиками

$$m_{ij} = \tau_{э} m_j,$$

$$S_{ij}^2 = \tau_{э}^2 S_j^2,$$

$$r_{ij} = \frac{M \begin{bmatrix} o & o \\ t_{эi} & t_{эj} \end{bmatrix}}{S_{ii} S_{ij}} = r_{ij}.$$

Таким образом определены вероятностные характеристики коэффициентов запаса прочности, долговечности, эквивалентной наработки и коэффициентов выработки ресурса, а также установлена их связь с накопленной поврежденностью (табл. 8).

Характер зависимости между минимальными коэффициентами запаса прочности и долговечности в условиях равной поврежденности определяется видом кривой прочности.

Полученные формулы позволяют определять прогнозируемое число циклов до разрушения и коэффициенты выработки ресурса через накопленную поврежденность для степенных и полулогарифмических характеристик прочности.

Вероятностные характеристики коэффициентов запаса приведены для ряда основных законов распределения накопленной поврежденности.

В наиболее характерном случае при логарифмически-нормальном распределении накопленной поврежденности и полулогарифмических характеристиках прочности коэффициенты запаса долговечности имеют логарифмически-нормальное распределение, коэффициенты запаса прочности – нормальное.

Таблиця 8

Вероятностные характеристики коэффициентов запаса прочности и долговечности

Закон распределения поврежденности за цикл	Параметры законов распределения накопленной поврежденности	Распределения коэффициента запаса долговечности		Плотность распределения коэффициента эквивалентного запаса прочности $f_{\sigma}(k_{\sigma})$
		Плотность $f_D(k_D)$	Функция $F_D(k_D)$	
Нормальный	m_n, S_n	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}S_n k_D^2} \exp\left(-\frac{\left(\frac{1}{k_D} - m_n\right)^2}{2S_n^2}\right)$	$1 - \Phi\left(\frac{\frac{1}{k_D} - m_n}{S_n}\right)$	$\frac{ \eta }{\sqrt{2\pi}S_n} \exp\left[-\frac{(\exp(\eta(k_{\sigma}-1)) - m_n)^2}{2S_n^2} + \eta(k_{\sigma}-1)\right]$ где $\eta = B(T, \sigma, \ln 10)$
Логарифмически-нормальный	m_{Ln}, S_{Ln}	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}S_{Ln} k_D} \exp\left(-\frac{(\ln k_D + m_{Ln})^2}{2S_{Ln}^2}\right)$	$1 - \Phi\left(-\frac{\ln k_D + m_{Ln}}{S_{Ln}}\right)$	$\frac{ \eta }{\sqrt{2\pi}S_{Ln}} \exp\left[-\frac{\left(k_{\sigma} - \left(1 + \frac{m_{Ln}}{\eta}\right)\right)^2}{2\left(\frac{S_{Ln}}{\eta}\right)^2}\right]$
Гамма	α_n, β_n	$\frac{1}{\beta_n^{\alpha_n} \Gamma(\alpha_n)} k_D^{-\alpha_n-1} \exp\left(-\frac{1}{\beta_n k_D}\right)$	$\frac{\Gamma\left(\alpha_n; \frac{1}{k_D \beta_n}\right)}{\Gamma(\alpha_n)}$	$\frac{ \eta }{\beta_n^{\alpha_n} \Gamma(\alpha_n)} \exp\left[-\exp(\eta \alpha_n (k_{\sigma}-1)) - \frac{\exp(\eta(k_{\sigma}-1))}{\beta_n}\right]$
Вейбулла	C_n, α_n	$\frac{C_n \alpha_n}{k_D^{\alpha_n+1}} \exp(-C_n k_D^{-\alpha_n})$	$\exp(-C_n k_D^{-\alpha_n})$	$ \eta \alpha_n C_n \exp[\eta \alpha_n (k_{\sigma}-1)] C_n \exp(-\eta \alpha_n (k_{\sigma}-1))$

Выводы

В работе обоснован созданный вероятностный подход к анализу прочности элементов конструкций и разработаны:

– методы вероятностного описания характеристик прочности материалов деталей, вероятностной оценки статической и циклической поврежденности [36] контролируемых деталей авиационной техники за полет;

– методы вероятностного суммирования повреждений и оценки характеристик прочностной надежности (вероятности прочностного отказа, числа полетных циклов до полной выработки ресурса, гамма-процентного ресурса, коэффициентов запаса прочности и выработки ресурса), используемые для контроля выработки и мониторинга ресурса в процессе эксплуатации.

Проанализировано теплонпряженное состояние наиболее нагруженных конструктивных элементов ГТД и обоснован выбор наиболее эффективных моделей поврежденности.

Рассмотрены вероятностные подходы к расчету длительно-статической, много- и малоцикловой [36] усталостной поврежденности деталей ГТД за полетный цикл и накопленной поврежденности на основе методов линейного и нелинейного суммирования повреждений как сумм независимых и зависимых случайных величин, случайных последовательностей и случайных процессов.

В результате можно оценить основные вероятностные характеристики накопленной поврежденности и чисел циклов, за которые накопленная поврежденность превышает уровень Π_0 .

Разработана методика оценки ресурса и других показателей работоспособности КЭ воздушных судов (ГТД) по известным вероятностным характеристикам накопленной поврежденности.

Литература

1. Афанасьев Н.Н. Статистическая теория усталостной прочности металлов / Н.Н. Афанасьев. – К.: АН УССР, 1953. – 128 с.
2. Биргер И.А. Вероятности разрушения при многомерных критериях прочности / И.А. Биргер // Проблемы прочности. – 1984. – № 11. – С. 21–24.
3. Биргер И.А. Прогнозирование ресурса при малоцикловой усталости / И.А. Биргер // Проблемы прочности. – 1985. – № 10. – С. 39–44.
4. Болотин В.В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций / В.В. Болотин. – М.: Машиностроение, 1984. – 312 с.
5. Болотин В.В. Статистические методы в строительной механике / В.В. Болотин. – М.: Стройиздат, 1965. – 279 с.
6. Ветров А.Н. Теоретические основы прогнозирования поврежденности и остаточного ресурса конструктивных элементов авиационных газотурбинных двигателей в эксплуатации / А.Н. Ветров, С.Р. Игнатович, А.Г. Кучер // Обеспечение надежности авиационных двигателей в эксплуатации: сб. науч. тр. – К.: КИИГА, 1993. – С. 20–26.

7. *Ветров А.Н.* Оценка остаточного ресурса рабочих лопаток авиационных газовых турбин по накопленной деформации ползучести / А.Н. Ветров, А.Г. Кучер // Проблемы прочности. – 1993. – №1. – С. 50–57.
8. *Ветров А.Н.* Вероятностные методы оценки остаточного ресурса конструктивных элементов авиационных ГТД в эксплуатации / А.Н. Ветров, А.Г. Кучер // Проблемы прочности. – 1989. – №8. – С. 70–76.
9. *Кулик Н.С.* Энциклопедия безопасности авиации / Н.С. Кулик, В.П. Харченко, М.Г. Луцкий и др. / под ред. Н.С. Кулика. – К.: Техніка, 2008. – 1000 с.
10. *Кордонский Х.Б.* Приложения теории вероятностей в инженерном деле / Х.Б. Кордонский. – М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1963. – 435 с.
11. *Косточкин В.В.* Надежность авиационных двигателей и силовых установок / В.В. Косточкин. – М.: Машиностроение, 1976. – 248 с.
12. *Хазов Б.Ф.* Справочник по расчету надежности машин на стадии проектирования / Б.Ф. Хазов, Б.А. Дидусев. – М.: Машиностроение, 1986. – 224 с.
13. *Моделирование объединения рассеянных поверхностных трещин.* Сообщ. 1. Вероятностная модель объединения трещин / С.Р. Игнатович, А.Г. Кучер, А.С. Якушенко, А.В. Башта // Проблемы прочности. – 2004. – № 2. – С. 21–32.
14. *Махутов Н.А.* Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкций на прочность / Н.А. Махутов. – М.: Машиностроение, 1981. – 271 с.
15. *Кучер А. Г.* Аналитический метод расчета вероятностных характеристик накопленной поврежденности и числа циклов до разрушения в деталях ГТД / А.Г.Кучер // Оценка технического состояния авиационных ГТД в процессе эксплуатации. – К.: КИИГА, 1986. – С. 62–71.
16. *Кучер А. Г.* Модель вероятностного суммирования повреждений при различных законах распределения повреждаемостей за полетный цикл / А.Г. Кучер // Надежность и долговечность деталей и узлов авиационной техники: сб. науч. тр. – К.: КИИГА, 1986. – С. 41–44.
17. *Кучер А. Г.* Прогнозирование ресурса машин на основе нелинейных вероятностных моделей суммирования повреждений / А.Г. Кучер // Методы и средства контроля технического состояния авиадвигателей. – К.: КИИГА, 1989. – С. 86–100.
18. *Кучер А.Г.* Вероятностная оценка накопленной поврежденности и ресурса деталей ГТД при различных законах распределения параметров нагруженности и прочности материала / А.Г. Кучер // Эксплуатационная надежность авиационных газотурбинных двигателей: межвуз. сб. науч. тр. – К.: КИИГА, 1989. – С. 99–111.
19. *Кучер А.Г.* Вероятностные модели поврежденности деталей ГТД за полетный цикл / А.Г. Кучер // Техническое диагностирование авиационных двигателей: межвуз. сб. науч. тр. – К.: КИИГА, 1987. – С. 51–61.
20. *Кучер А.Г.* Оценка и прогнозирование ресурса на основе нелинейных вероятностных моделей суммирования повреждений / А.Г. Кучер // Вопросы совершенствования технологии ремонта воздушных судов: сб. науч. тр.– К.: КИИГА, 1988. – С. 81–85.
21. *Ветров А.Н.* Вероятностно-параметрические модели длительной прочности конструкционных материалов АГТД / А.Н. Ветров, А.Г. Кучер, Н.А. Ковешников // Проблемы прочности.– 1989. – № 4. – С. 14–17.
22. *Кучер А. Г.* Вероятностное описание характеристик прочности жаропрочных сплавов / А.Г. Кучер // Диагностика и прогнозирование технического состояния авиационных ГТД: межвуз. сб. науч. тр. – К.: КИИГА, 1985. – С. 17–27.
23. *Прогнозирование изменения функциональных параметров клапанов с электромагнитным приводом при выработке ресурса* / А.Г. Кучер, Г.И. Зайончковский, А.Е. Ситников, и др. // Промислова гідроліка і пневматика: всеукр. наук.-техн. журн. – Вінниця: ПП “ЕДЕЛЬВЕЙС”, 2004. – №3(5). – С. 10–22.
24. *Богданом Дж.* Вероятностные модели накопления повреждений / Дж. Богданом, Ф. Козин // пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 344 с.
25. *Голубовский Е.Р.* К вопросу о температурно-временной зависимости конструктивной длительной прочности / Е.Р. Голубовский, И.И. Трунин // Проблемы прочности. – 1978. – №2. – С. 33–38.
26. *Вероятностные характеристики прочности авиационных материалов и размеров сортамента:* справ. / А.А. Кузнецов, О.М. Алифанов, В.И. Ветров и др. // под ред. д. т. н., проф. С.О. Охапкина. – М.: Машиностроение, 1970. – 567 с.
27. *Угорский А.Э.* О параметрических методах температурно-временной экстраполяции предела длительной прочности / А.Э. Угорский // Проблемы прочности. – 1986. – №1. – С. 40–43.

28. Цвилюк И.С. Параметрические методы описания и экстраполяции характеристик длительной прочности тугоплавких материалов / И.С. Цвилюк, Д.С. Авраменко // Проблемы прочности. –1985. – №12. – С. 59–63.

29. Джонсон Н. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке / Н. Джонсон, Ф. Лион. – М.: Мир, 1981. – 516 с.

30. Ивахненко А.Г. Самоорганизация прогнозирующих моделей / А.Г. Ивахненко, И.А. Мюллер // К.: Техника, 1985. – 224 с.

31. Ферстер Э. Методы корреляционного и регрессионного анализа: руководство для экономистов / Э. Ферстер, Б. Реец / пер. с нем. – М.: Финансы и статистика, 1983. – 302 с.

32. Козлов Л.А. Вероятностная оценка характеристик сопротивления усталости и действующих напряжений в деталях машин в связи с расчетом на прочность при многоцикловом нагружении / Л.А. Козлов, Б.Ф. Балашов // Проблемы прочности. – 1983. – №5. – С. 59–64.

33. Баумштейн М.В. Прогнозирование усталостной долговечности конструкций в статистическом аспекте / М.В. Баумштейн, А.В. Прокопенко // Проблемы прочности. –1985. – №4. – С. 26–32.

34. Thorin O. On the infinite divisibility of the lognormal distribution / O. Thorin // Scand. Actuar. J. – 1977. – No 3. – P.121–148.

35. Закономерности ползучести и длительной прочности: справ. /под общ. ред.. С.А. Шестерикова. – М.: Машиностроение, 1983. – 102 с.

36. Кулик Н.С. Математические модели накопления повреждений и трещиностойкости при действии статических и циклических нагрузок / Н.С. Кулик, А.Г. Кучер, В.Е. Мильцов // Вісник НАУ. – 2009. – № 3. – С. 3–24.

37. Кучер А. Г. Определение вероятностных характеристик коэффициентов запаса прочности и выработки ресурса деталей ГТД в процессе эксплуатации /А.Г. Кучер // Проблемы оптимизации системы диагностирования авиационной техники. – К.: КИИГА, 1985. – С. 66–69.

Стаття надійшла до редакції 12.01.10.

М.С. Кулик, О.Г. Кучер, В.С. Мильцов

ІМОВІРНІСНИЙ АНАЛІЗ ПРОЦЕСІВ НАКОПИЧЕННЯ ПОШКОДЖЕНЬ У РАЗІ ДІЇ СТАТИЧНИХ ТА ЦИКЛІЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

Національний авіаційний університет

витривалість, ймовірнісні моделі пошкоджень, тривала міцність, методи накопичення пошкоджень, багатокomпонентні навантаження, складний напружений стан, характеристики міцнісної надійності

Запропоновано ймовірнісний підхід до аналізу процесів накопичення пошкоджень. Розглянуто методи побудови ймовірнісних моделей міцності матеріалів деталей. Наведено ймовірнісні моделі пошкоджуваності та руйнування деталей. Досліджено лінійні і нелінійні ймовірнісні моделі підсумовування незалежних і залежних випадкових пошкоджуваностей, їх послідовностей і процесів. Розглянуто методи розрахунку ймовірнісних характеристик міцнісної надійності коефіцієнтів запасу міцності, вироблення ресурсу й еквівалентного напруження і їх зв'язок з накопиченою пошкоджуваністю.

Mikola S. Kulyk, Alexey G. Kucher, Volodymyr E. Miltsov

PROBABILISTIC ANALYSIS OF PROCESSES OF ACCUMULATION OF DAMAGES AT THE ACTION OF THE STATIC AND CYCLIC LOADINGS

National Aviation University

descriptions of durability's reliability, difficult tense state, endurance, multicomponent lading, methods of accumulation of damages, probabilistic models of damaged, protracted durability

Difficult character of cooperation of constructive elements with environment, and also among themselves, the casual nature of durability of materials and service conditions of engines demand in calculations on durability of application of probabilistic methods of the analysis and use of indicators of the theory of reliability. In-process created and grounded probabilistic approach to the durability's reliability of elements of constructions of GTE analysis. The methods of probabilistic description of characteristics of durability of materials of details and probabilistic estimation of static and cyclic damaged of the controlled details are developed for a flight cycle. The probabilistic approaches are explored to the calculation of long-statical, high- and low-cyclic tireless damaged of details of engines and accumulated damaged on the basis of methods of the linear and nonlinear summation of damages as sums of independent and dependent casual sizes, casual sequences and casual processes. As a result, it is possible to estimate basic probabilistic characteristics of accumulated damageability and numbers of cycles for which accumulated damageability exceeds a critical level. The methodology for estimation of resource and other indicators of operability of CE AC (GTE) according to known probabilistic characteristics of accumulated damageability is developed.