УДК 517.95

І.С. Клюс, к.ф.-м.н., доц.

ДВОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Досліджено коректність задачі з локальними двоточковими умовами за часовою змінною та умовами періодичності за просторовими координатами для трикутних систем рівнянь з частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом. Установлено умови існування та єдиності розв'язку задачі, доведено метричні теореми про оцінку знизу малих знаменників, які виникають під час побудови розв'язку задачі.

The correctness of a problem with local two–point conditions on temporary variable and conditions of periodicity on spatial coordinates for the triangle system of partial differential equations. The conditions of existence and uniqueness of the solution of a problem are established. The metric theorem of an estimation from below of small denominators of a problem is proved.

вектор-функція, двоточкові умови, диференціальні рівняння з частинними похідними, ряд Фур'є

Постановка задачі

Задачі з багатоточковими умовами для рівнянь з частинними похідними є взагалі умовно коректні [1], а їх розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників. У статті досліджується задача з доточковими за часовою змінною умовами для системи рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом.

В області $Q=\{(t,x): t\in(0,T), x\in\Omega_P\}$,

де Ω_p – p-вимірний тор $(R/2\pi Z)^P$, розглядаємо задачу

$$A(D)\frac{\partial^2\bar{u}(t,x)}{\partial t^2}+B(D)\frac{\partial\bar{u}(t,x)}{\partial t}+C(D)\vec{u}(t,x)=\vec{0}, \quad (1)$$

$$\vec{u}(t_1,x)=\vec{\varphi}(x),$$

$$\vec{u}(t_2,x)=\vec{\psi}(x),\ \ 0\le t_1<t_2\le T, \quad (2)$$

де

$D=(-i\partial/\partial x_1,\ldots,-i\partial/\partial x_p)$, $A(\xi)$, $B(\xi)$, $C(\xi)$, $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_p)\in R^p$, – квадратні матриці вигляду

$$A(\xi)=\begin{pmatrix}A_{11}(\xi) & A_{12}(\xi)\\ 0 & A_{22}(\xi)\end{pmatrix};$$

$$B(\xi)=\begin{pmatrix}B_{11}(\xi) & B_{12}(\xi)\\ 0 & B_{22}(\xi)\end{pmatrix};$$

$$C(\xi)=\begin{pmatrix}C_{11}(\xi) & C_{12}(\xi)\\ 0 & C_{22}(\xi)\end{pmatrix};$$

$A_{ij}(\xi)$, $B_{ij}(\xi)$, $C_{ij}(\xi)$, $i,j=1,2$, – багаточлени з дійсними коефіцієнтами степеня N за сукупністю змінних $\xi_1,\ldots,\xi_p$, причому $\det A(\xi)=A_{11}(\xi)A_{22}(\xi)\neq 0$.

Використовуємо позначення: $x=(x_1,\ldots,x_p)\in R^P$;

$k=(k_1,\ldots,k_p)\in Z^P$;

$(k,x)=k_1x_1+\ldots+k_px_p$;

$|k|=|k_1|+\ldots+|k_p|$;

$G_{\beta,\delta}$ – простір 2π-періодичних функцій $\varphi(x)=\sum_{k\in Z^p}\varphi_k\exp(ik,x)$

зі скінченною нормою $||\varphi||_{\beta,\delta}=\sum_{k\in Z^p}|\varphi_k|\exp(\delta|k|^\beta)$;

$C^n([0,T];G_{\beta,\delta})$ – простір функцій $u(t,x)=\sum_{k\in Z^p}u_k(t)\exp(ik,x)$ з нормою

$\|u\|_{n;\beta,\delta}=\sum_{k\in Z^p}\|u_k(t)\|_{C^n[0,T]}\exp(\delta|k|^\beta)$;

$\overline{G}_{\beta_1,\delta_1;\beta_2,\delta_2}$ – простір вектор-функцій $\vec{\varphi}(x)=(\varphi_1(x),\varphi_2(x))$,

таких, що

$\varphi_1(x)\in G_{\beta_1,\delta_1}$, $\varphi_2(x)\in G_{\beta_2,\delta_2}$

зі скінченною нормою

$||\vec{\varphi}(x)||_{\beta_1,\delta_1;\beta_2,\delta_2}=||\varphi_1(x)||_{\beta_1,\delta_1}+||\varphi_2(x)||_{\beta_2,\delta_2}$;

$\overline{C}^n([0,T];G_{\beta_1,\delta_1;\beta_2,\delta_2})$ – простір вектор-функцій $\vec{u}(t,x)=(u_1(t,x),u_2(t,x))$,

таких, що

$u_j(t,x)\in G_{\beta_j,\delta_j}$, $j=1,2$.

Норма в просторі $\overline{C}^n([0,T];G_{\beta_1,\delta_1;\beta_2,\delta_2})$ задається формулою

$$\|\vec{u}(t,x)\|_{n;\beta_1,\delta_1;\beta_2,\delta_2} = \|u_1(t,x)\|_{n;\beta_1,\delta_1} + \|u_2(t,x)\|_{n;\beta_2,\delta_2}.$$

Побудова розв'язку задачі

Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді векторного ряду Фур'є

$$\vec{u}(t,x) = \sum_{k\in Z^p} \vec{u}_k(t)\exp(ik,x).$$

Кожна вектор-функція $\vec{u}_k(t)$, $k \in Z^p$ є розв'язком такої задачі:

$$A(k)\vec{u}_k''(t) + B(k)\vec{u}_k'(t) + C(k)\vec{u}_k(t) = \vec{0}, \qquad (3)$$

$$\vec{u}_k(t_1) = \vec{\varphi}_k, \quad \vec{u}_k(t_2) = \vec{\psi}_k, \qquad (4)$$

де

$\vec{\varphi}_k = (\varphi_{1k}, \varphi_{2k})$;

$\vec{\psi}_k = (\psi_{1k}, \psi_{2k})$;

$k \in Z^p$ – коефіцієнти Фур'є вектор-функцій $\vec{\varphi}(x)$ та $\vec{\psi}(x)$.

Зі структури матриць $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$ випливає, що задача (3), (4) ділиться на дві задачі про визначення компонент вектора:

$\vec{u}_k(t) = (u_{1k}(t), u_{2k}(t))$:

$$A_{11}(k)u''_{1k}(t) + B_{11}(k)u'_{1k}(t) + C_{11}(k)u_{1k}(t) = - A_{12}(k)u''_{2k}(t) + B_{12}(k)u'_{2k}(t) - C_{12}(k)u_{2k}(t); \qquad (5)$$

$u_{1k}(t_1) = \varphi_{1k};$

$u_{1k}(t_2) = \psi_{1k};$

$$A_{22}(k)u''_{2k}(t) + B_{22}(k)u'_{2k}(t) + C_{22}(k)u_{2k}(t) = 0; \qquad (6)$$

$u_{2k}(t_1) = \varphi_{2k};$

$u_{2k}(t_2) = \psi_{2k}.$

Нехай $\lambda_J(k)$, $\mu_J(k)$, $j = 1,2$, – корені рівнянь

$A_{11}(k)\lambda^2 + B_{11}(k)\lambda^2 + C_{11}(k)\lambda^2 = 0$

та

$A_{22}(k)\mu^2 + B_{22}(k)\mu^2 + C_{22}(k) = 0$ відповідно. Будемо вважати, що для всіх $k \in Z^p$ $\lambda_1(k) \neq \lambda_2(k)$, $\mu_1(k) \neq \mu_2(k)$.

Тоді системи функцій $\{\exp(\lambda_j(k)t)\}$, $\{\exp(\mu_j(k)t)\}$, $j = 1,2$, утворюють відповідно фундаментальні системи розв'язків однорідних диференціальних рівнянь, які відповідають виразам (5), (6).

Позначимо

$$\Delta_1(k) = \\ = \exp(\lambda_1(k)t_1 + \lambda_2(k)t_2) - \exp(\lambda_2(k)t_1 + \lambda_1(k)t_2);$$

$$\Delta_2(k) = \\ = \exp(\mu_1(k)t_1 + \mu_2(k)t_2) - \exp(\mu_2(k)t_1 + \mu_1(k)t_2)$$

$$H_k(t,\tau) = \\ = \frac{\exp(\lambda_1(k)(t-\tau)) - \exp(\lambda_2(k)(t-\tau))}{\lambda_1(k) - \lambda_2(k)}.$$

Теорема 1. Для єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\overline{C}^2([0,T];G_{\beta_1,\delta_1;\beta_2,\delta_2})$ необхідно і досить, щоб виконувалась умова

$$\forall k \in Z^p \ \Delta_1(k)\cdot\Delta_2(k) \neq 0. \qquad (7)$$

Доведення теореми аналогічне до доведення теореми, наведеної в праці [1, розділ 2 , теорема 3.1].

Існування розв'язку задачі

Припустимо, що умова (7) виконується. Тоді

$$u_{2k}(t) = \\ = \frac{j_{2k}\exp(\mu_2(k)t_2) - \psi_{2k}\exp(\mu_2(k)t_2)}{\Delta_2(k)(\exp(\mu_1(k)t))^{-1}} + \\ + \frac{\psi_{2k}\exp(\mu_1(k)t_1) - j_{2k}\exp(\mu_1(k)t_2)}{\Delta_2(k)(\exp(\mu_2(t))^{-1}}; \qquad (8)$$

$$u_{1k}(t) = \int_0^t H_k(t,\tau)L_1[u_{2k}](\tau)d\tau + \\ + \frac{\Phi_{1k}\exp(\lambda_2(k)t_2) - \Psi_{1k}\exp(\lambda_2(k)t_1)}{\Delta_1(k)(\exp(\lambda_1(k)t))^{-1}} + \\ + \frac{\Psi_{1k}\exp(\lambda_1(k)t_1) - \Phi_{1k}\exp(\lambda_1(k)t_2)}{\Delta_1(k)(\exp(\lambda_2(k)t)^{-1}},$$

де

$$\Phi_{1k} = \varphi_{1k} - \int_0^{t_1} H_k(t_1,\tau) L_1[u_{2k}](\tau)d\tau;$$

$$\Psi_{1k} = \psi_{1k} - \int_0^{t_2} H_k(t_2,\tau) L_1[u_{2k}](\tau)d\tau;$$

$$L_1[u_{2k}] =$$
$$= -A_{12}(k)u''_{2k}(t) - B_{12}(k)u'_{2k}(t) - C_{12}(k)u_{2k}(t).$$

Теорема 2. Нехай виконується умова (7) і нехай для всіх (крім скінченної кількості) цілочислових векторів $k \in Z^p$ справджуються нерівності

$$|A_{11}(k)| > |k|^{-\gamma}, \quad |A_{22}(k)| > |k|^{-\gamma}, \quad \gamma > 0; \tag{9}$$

$$|\Delta_1(k)| > \exp(-\delta_1 |k|^{N+\gamma}), \delta_1 > 0;$$
$$|\Delta_2(k)| > \exp(-\delta_2 |k|^{N+\gamma}), \delta_2 > 0. \tag{10}$$

Якщо

$$\vec{\varphi}(x) \in \overline{G}_{N+\gamma,\delta_3;N+\gamma,\delta_4};$$

$$\vec{\psi}(x) \in \overline{G}_{N+\gamma,\delta_3;N+\gamma,\delta_4},$$

де

$$\delta_3 > \delta_2 + 2\alpha_2 T,$$

$$\delta_4 > \delta_1 + \delta_2 + 3\alpha_1 T + 2\alpha_2 T,$$

α_1, α_2 – додатні сталі,

то існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) з класу

$$\overline{C}^2([0,T]; G_{N+\gamma,\delta_5;N+\gamma,\delta_6}), \ \delta_6 < \delta_4 - \delta_2 - 2\alpha_2 T,$$
$$\delta_5 < \min\{\delta_3 - \delta_1 - 2\alpha_1 T, \delta_4 - \delta_1 - \delta_2 - 3\alpha_1 T - 2\alpha_2 T\},$$

який неперервно залежить від $\vec{\varphi}(x)$, $\vec{\psi}(x)$.

Доведення. З нерівностей (9) випливають оцінки для коренів

$$\lambda_j(k), \ \mu_j(k);$$

$$|\lambda_j(k)| \le \alpha_1 |k|^{N+\gamma};$$

$$|\mu_j(k)| \le \alpha_2 |k|^{N+\gamma};$$

$$k \in Z^p \setminus \{\vec{0}\}, \ j = 1,2, \ \alpha_1 > 0, \ \alpha_2 > 0. \tag{11}$$

Із формули (8) та нерівностей (9)–(11) маємо

$$||u_{2k}(t)||_{C^2[0,T]} \le$$
$$\le M_1 |k|^{2(N+\gamma)} \exp((\delta_2 + 2\alpha_2 T)|k|^{N+\gamma})(|\varphi_{2k}| + |\psi_{2k}|),$$

де

$$M_1 > 0.$$

Легко перевірити, що

$$H_k(t,\tau) = \int_0^1 (t-\tau)\exp((y\lambda_1 + (1-y)\lambda_2)(t-\tau))dy,$$

$$\max_{0\le\tau\le t\le T} \left| \partial^j H_k(t,\tau)/\partial t^j \right| \le$$
$$\le M_2 |k|^{2(N+\gamma)} \exp(\alpha_1 T |k|^{N+\gamma}), j = 0,2.$$

Звідси

$$\left\| \int_0^t H_k(t,\tau) L_1[u_{2k}](\tau)d\tau \right\|_{C^2[0,T]} \le$$
$$\le M_3 |k|^{3N+2\gamma} \exp(\alpha_1 T |k|^{N+\gamma}) \|u_{2k}(t)\|_{C^2[0,T]}. \tag{12}$$

$$|\Phi_{1k}| \le |\varphi_{1k}| +$$
$$+ M_4 |k|^N \exp(\alpha_1 T |k|^{N+\gamma}) \|u_{2k}(t)\|_{C^2[0,T]}, \tag{13}$$

$$|\Psi_{1k}| \le |\psi_{1k}| +$$
$$+ M_5 |k|^N \exp(\alpha_1 T |k|^{N+\gamma}) \|u_{2k}(t)\|_{C^2[0,T]}. \tag{14}$$

З оцінок (10), (12)–(14) отримаємо

$$||u_{1k}(t)||_{C^2[0,T]} \le$$
$$\le M_6 |k|^{2(N+\gamma)} \exp((\delta_1 + 2\alpha_1 T)|k|^{N+\gamma})(|\varphi_{1k}| + |\psi_{1k}|) + \tag{15}$$
$$+ M_7 |k|^{3N+2\gamma} \exp((\delta_1 + 3\alpha_1 T)|k|^{N+\gamma}) ||u_{2k}(t)||_{C^2[0,T]}.$$

Із нерівності (15) випливає доведення теореми.

Метричні твердження

З'ясуємо питання про можливість виконання нерівностей (9), (10). Нехай

$$A_{jj}(k) = \sum_{|s|\le N} A_{jj}^s k_1^{s_1} \dots k_p^{s_p};$$

$$C_{jj}(k) = \sum_{|s|\le N} C_{jj}^s k_1^{s_1} \dots k_p^{s_p}, \ j = 1,2.$$

Позначимо через $\vec{z}_j$, $j=1,2$ – вектор, складений з коефіцієнтів A_{jj}^s, $|s|\le N$, $\vec{v}_j$, $j=1,2$ – вектор, складений з коефіцієнтів C_{jj}^s, $|s|\le N$.

Теорема 3. Для майже всіх векторів $\vec{z}_j$, $j=1,2$, нерівності (9) виконуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in Z^p$, коли $\gamma > N-p$.

Доведення проводиться за схемою доведення теореми праці [1, розд. 2, теорема 4.4].

Теорема 4. Для майже всіх векторів $\vec{z}_j$, $\vec{v}_j$, $j=1,2$, і для майже всіх векторів $(t_1, t_2)\in[0,T]^2$ нерівності (10) виконуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in Z^p$, якщо $\delta_1 > 4\alpha_1 T$, $\delta_2 > 4\alpha_2 T$.

Доведення проводиться за схемою доведення теореми в праці [1, розд. 6, теорема 3.3].

Висновки

Отримані результати доповнюють та розвивають дослідження, проведені в праці [2]. Їх можна використати під час вивчення конкретних задач практики, які моделюються за допомогою розглянутої в роботі задачі, а також у подальших теоретичних дослідженнях задач з багатоточковими умовами для рівнянь з частинними похідними.

Література

1. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными // Б.И. Пташник. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

2. *Клюс І. С.* Двоточкова задача для системи рівнянь із частинними похідними, не розв’язаних відносно старшої похідної / І.С. Клюс // Математичні методи та фізико-механічні поля. − 1999. − 42, № 4. – С. 75−81.

Стаття надійшла до редакції 07.09.09.