

УДК 534.1(045)

В.М. Макаренко, асп.

## МОДЕЛЮВАННЯ ТА УПРАВЛІННЯ ВІБРОАКУСТИЧНИМ ВИПРОМІНЮВАННЯМ ОДНОРІДНОЇ ПЛАСТИНИ ПІД ДІЄЮ ЗОВНІШНІХ КОНЦЕНТРОВАНИХ СИЛ

Подано модель і проведено дослідження акустичного випромінювання та поперечного руху прямокутної пластини. Розв'язок отримано на основі рівнянь класичної теорії коливань пластини. Розглянуто віброакустичне випромінювання пластин з вільно обпертими граничними умовами. Як зовнішні збудження використано концентровані гармонічні сили. Встановлено закономірності зміни звукового випромінювання залежно від параметрів зовнішніх збуджень. Для перевірки аналітичного підходу, використано для розрахунків, виконано експеримент. Власні частоти коливань вільної пластини, отримані аналітично, співвідносяться з результатами експерименту з малою похибкою.

The model of rectangular plate acoustic radiation and transverse motion were presented, and its investigation was performed. The solution is received based on classical plate theory. Vibration response and sound radiation of plates with simply-supported boundary conditions was discussed. Concentrated harmonic forces are used as an external excitation. The general confirmities to the law have been established for the changes of sound radiation, depending on the parameters of external excitations. An experiment was performed for justification of analytical approach, which is used for computations. Eigenfrequencies of free plate oscillations, which are received analytically, are in good agreement with experimental results.

**віброакустичне випромінювання, звукове випромінювання, зовнішні сили, компенсація концентрованого навантаження, пластина, поперечна вібрація, рівень звукової потужності, теорія коливань**

### Постановка проблеми

Пластина один із найпростіших елементів конструкції машин.

Модель поперечного руху пластини може бути використана як спрощена модель складніших об'єктів.

Багато робіт присвячено визначенню власних частот пластин, що мають різні геометричні форми та граничні умови, вирізи довільної форми, пошкодження, зміни у товщині та інших характеристиках матеріалу, додаткові точкові опори [1].

Для розглянутої у роботі прямокутної пластини є 21 комбінація простих граничних умов, зокрема, вільно обпертих (ВО), затиснутих та вільних, які мають аналітичне рішення.

У роботі розглянуто вимушену реакцію ВО прямокутної пластини під дією концентрованої гармонічної сили.

Як засіб зменшення віброакустичного навантаження, утвореного внаслідок коливань пластини, запропоновано використовувати компенсуючу точкову силу. На практиці таке збудження може бути реалізоване за допомогою електромагнітного вібратора. Такий метод впливу на віброакустичну реакцію належить до активних методів зниження шуму та вібрації.

Проблема зниження акустичного випромінювання пластини часто не повною мірою вирішується за допомогою пасивних методів зниження шуму, зокрема, на низьких частотах.

Тому активне структурне управління стає важливим засобом ослаблення низькочастотного шуму машин та устаткування.

Ефективність використання активних методів зниження шуму була продемонстрована багатьма дослідниками [2–4].

Такі дослідження було проведено з метою компенсації концентрованого навантаження на балки [5–8]. Дослідження компенсації коливань пластини за допомогою п'єзоелектричних актуаторів [9] показали, що повна компенсація концентрованих сил неможлива навіть для оптимальних параметрів п'єзоелектричних актуаторів. Такий результат отриманий завдяки різному виду цих збуджень.

На базі створеної аналітичної моделі досліджено вплив сили, розміщення та фази компенсуючого збудження на рівень звукової потужності (РЗП), утворений ВО пластиною.

### Математична модель віброакустичного випромінювання вільно обпертої пластини під дією точкових сил

Розглянемо реакцію скінченної тонкої прямокутної пластини, ВО вздовж усього краю, розміром  $a \times b \times h$  на вимушені коливання. Вважається, що нормаль до площини пластини залишиться прямою, перпендикулярною після деформації.

Дослідимо вільні вібрації скінченної пластини. Рівняння, яке змінюється як гармонійна функція часу, подамо так

$$w(x, y, t) = w(x, y) \exp(-i\omega t),$$

де

$$i = \sqrt{-1};$$

$\omega$  – дійсна величина, що позначає кутову частоту, яку визначають для вільних коливань;

$t$  – час.

Рівняння коливань пластини, якщо немає зовнішньої сили, запишемо у вигляді:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - \rho_s h \omega^2 w = 0, \quad (1)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

де

$\rho_s$  – густина пластини з модулем Юнга  $E$  та коефіцієнтом Пуассона  $\nu$ .

Загальний розв'язок може бути записаний як

$$w(x, y) = X(x)Y(y), \quad (2)$$

$$X(x) = A \cos(k_f x) + B \sin(k_f x) + C \cosh(k_f x) + D \sinh(k_f x), \quad (3)$$

$$Y(y) = P \cos(c_f y) + Q \sin(c_f y) + R \cosh(c_f y) + T \sinh(c_f y), \quad (4)$$

де

$A, B, C, D, P, Q, R, T, k_f, c_f$  – довільні константи.

Загальний розв'язок рівняння (2) має задовольняти граничні умови задачі. Згідно з граничними умовами переміщення  $w$  і згинальний момент набувають нульового значення уздовж границь.

Згинальні моменти  $M_x$  та  $M_y$  належать до переміщення за формулами

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right);$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right).$$

Рівність переміщення нулю уздовж краю, наприклад, уздовж краю

$$x = a,$$

для всіх значень  $y$  – забезпечується за умови, що  $\partial^2 w / \partial y^2$  також дорівнює нулю уздовж того ж краю.

У цьому випадку граничні умови стають такі:

$$w(0, y) = \frac{\partial^2 w(0, y)}{\partial x^2} = 0;$$

$$w(a, 0) = \frac{\partial^2 w(a, 0)}{\partial x^2} = 0;$$

$$w(x, 0) = \frac{\partial^2 w(x, 0)}{\partial y^2} = 0;$$

$$w(x, b) = \frac{\partial^2 w(x, b)}{\partial y^2} = 0$$

Вісім граничних умов приводять до визначення восьми рівнянь з вісьмома невідомими константами  $A, B, C, D, P, Q, R, T$  з рівнянь (3), (4).

Оскільки  $X(x) \neq 0$  і  $Y(y) \neq 0$  гранична умова набуває вигляду:

$$X(0) = X(a) = \frac{d^2 X(0)}{dx^2} = \frac{d^2 X(a)}{dx^2} = 0; \quad (5)$$

$$Y(0) = Y(b) = \frac{d^2 Y(0)}{dy^2} = \frac{d^2 Y(b)}{dy^2} = 0. \quad (6)$$

Для існування нетривіального розв'язку, детермінант, сформований коефіцієнтами  $A, B, C, D, P, Q, R, T$  має дорівнювати нулю, що приводить до характеристичного рівняння.

Гранична умова

$$X(0) = 0$$

потребує, щоб

$$A + C = 0.$$

У той же час умова

$$X''(0) = 0$$

потребує:

$$-A + C = 0.$$

Ці два рівняння можуть одночасно задовольнятися тільки у випадку, якщо

$$A = C = 0.$$

Граничні умови за  $x = a$  задовольняються, якщо

$$B \sin(k_f a) + D \sinh(k_f a) = 0, \quad (7)$$

$$-B k_f^2 \sin(k_f a) + D k_f^2 \sinh(k_f a) = 0. \quad (8)$$

Для того, щоб нетривіальний розв'язок існував, необхідно виконання такої умови:

$$\begin{vmatrix} \sin(k_f a) & \sinh(k_f a) \\ -k_f^2 \sin(k_f a) & k_f^2 \sinh(k_f a) \end{vmatrix} = 0. \quad (9)$$

Розрахунок детермінанта у рівнянні (9) приводить до характеристичного рівняння

$$2k_f^2 \sin k_f a \sinh k_f a = 0,$$

яке задовольняється, якщо

$$k_f = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Розв'язок  $k_f = 0$  відкинуто, оскільки він веде до тривіального результату

$$X(x) = 0.$$

Підставляючи рівняння (10) у рівняння (7), (8), визначаємо, що  $D$  має дорівнювати нулю, і тому

$$X(x) = B_m \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right), \quad m = 1, 2, \dots$$

Застосовуючи граничні умови (6) до рівняння (4), аналогічно отримуємо

$$c_f = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1, 2, \dots$$

та

$$Y(y) = Q_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Отже, використовуючи рівняння (2), розв'язок можна записати в такому вигляді

$$w_{mn} = W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad (11)$$

$$m = 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots$$

Нижній індекс  $mn$  використовують, щоб позначити факт, що для кожної комбінації значень  $m$  і  $n$  існують різні функції від  $x$  і  $y$ , які задовольняють диференціальне рівняння і граничні умови. Підставляючи  $w_{mn}$  з рівняння (11) в основне рівняння (1), отримуємо частоти для кожної з функцій  $w_{mn}$ :

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{D}{\rho_s h} \left[ \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]},$$

де

$\omega_{mn}$  – власні частоти ВО пластини.

Індекс  $mn$  указує, що для кожного значення  $m, n$  в рівнянні (11) потрібна різна частота.

Для концентрованого навантаження, що діє в точці  $(x_F, y_F)$  і компенсуючих збуджень, що діють в точках  $(x_k, y_k)$  рівняння руху  $w(x, y)$  набуває вигляду

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - \rho_s h \omega^2 w = F, \quad (12)$$

де

$$F = F_F \delta(x - x_F) \delta(y - y_F) \exp(i\varphi_F) + \sum_{k=1}^{\infty} F_k \delta(x - x_k) \delta(y - y_k) \exp(i\varphi_k).$$

Граничні умови, накладені на  $w$ , такі ж, як і в рівняннях (5) і (6).

Для того, щоб розв'язати рівняння (12), вважаємо, що функція  $w(x, y)$  є сумою власних функцій, знайдених з аналізу вільних коливань:

$$w_{mn} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad (13)$$

$$m = 1, 2, \dots \quad \text{та} \quad n = 1, 2, \dots$$

де

$W_{mn}$  – невідомі константи.

Кожна із власних частот задовольняє граничні умови.

Якщо підставимо рівняння (13) у рівняння (12), матимемо

$$D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \times \left\{ \left[ \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]^2 - \frac{\rho_s h}{D} \omega^2 \right\} = F. \quad (14)$$

Перемноживши обидві частини рівняння (14) на  $\sin\left(\frac{q\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{s\pi y}{b}\right)$ , після інтегрування за розмірами пластини і використання умов ортогональності функцій, отримуємо:

$$\int_0^b \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{s\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \times \sin\left(\frac{q\pi x}{a}\right) dx dy = \frac{a \delta_{mq} b \delta_{ns}}{4}. \quad (15)$$

Інтегрування правої частини рівняння (15) дає

$$\int_0^b \int_0^a F_F \delta(x - x_F) \sin\left(\frac{q\pi x}{a}\right) \delta(y - y_F) \sin\left(\frac{s\pi y}{b}\right) \times \exp(i\varphi_F) dx dy + \sum_{k=1}^K \int_0^b \int_0^a F_k \delta(x - x_k) \sin\left(\frac{q\pi x}{a}\right) \times \delta(y - y_k) \sin\left(\frac{s\pi y}{b}\right) \exp(i\varphi_k) dx dy =$$

$$= F_F \exp(i\varphi_F) \int_0^b \delta(y - y_F) \sin\left(\frac{s\pi y}{b}\right) \int_0^a \delta(x - x_F) \times \sin\left(\frac{q\pi x}{a}\right) dx dy + \sum_{k=1}^K F_k \exp(i\varphi_k) \int_0^b \delta(y - y_k) \times \sin\left(\frac{s\pi y}{b}\right) \int_0^a \delta(x - x_k) \sin\left(\frac{q\pi x}{a}\right) dx dy =$$

$$= F_F \sin\left(\frac{m\pi x_F}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_F}{b}\right) \exp(i\varphi_F) + \sum_{k=1}^K F_k \sin\left(\frac{m\pi x_k}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_k}{b}\right) \exp(i\varphi_k).$$

Знаходимо вираз для  $W_{mn}$ :

$$W_{mn} = -\frac{4}{ab\rho_s h(\omega^2 - \omega_{mn}^2)} \times \left[ F_F \sin\left(\frac{m\pi x_F}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_F}{b}\right) \exp(i\varphi_F) + \sum_{k=1}^K F_k \sin\left(\frac{m\pi x_k}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_k}{b}\right) \exp(i\varphi_k) \right].$$

Поперечний рух пластини можна визначити у такій формі:

$$w(x, y) = -\frac{4}{\rho_s h a b} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{(\omega^2 - \omega_{mn}^2)} \times \left[ F_F \exp(i\varphi_F) \sin\left(\frac{m\pi x_F}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_F}{b}\right) + \sum_{k=1}^K F_k \exp(i\varphi_k) \sin\left(\frac{m\pi x_k}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_k}{b}\right) \right]. \tag{16}$$

Акустичне випромінювання пластини моделюють за рівнянням Гельмгольца:

$$\Delta p + k^2 p = 0; \quad z = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho\omega^2 w(x).$$

Розглядаючи модель плоского поршня в нескінченному екрані (рис. 1), розв'язок для тривимірного акустичного поля на поверхні пластини можна записати так:

$$p(x, y, 0) = -\frac{\rho\omega^2}{2\pi} \int_0^a \int_0^b \frac{\exp(ikr)}{r} w(x_0, y_0) dx_0 dy_0,$$

де

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

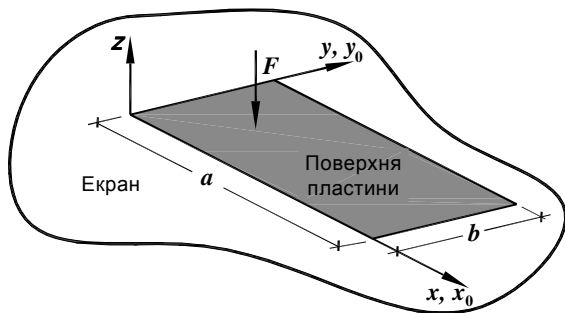


Рис. 1. Модель плоского поршня для розрахунку акустичного випромінювання

Потужність випромінюваного шуму можна визначити сумою великої кількості окремо випромінюючих елементів поверхні пластини. Акустична потужність пластини

$$W = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^a \int_0^b p(x, y, 0) s^*(x, y) dx dy, \tag{17}$$

де

$s(x, y)$  – швидкість коливань:  $s(x, y) = -i\omega w(x, y)$ .

Сумарний РЗП можна визначити як

$$L_{w\Sigma} = 10 \lg \int_{f_{start}}^{f_{fin}} W df (W_0)^{-1},$$

де  $W_0 = 10^{-12}$  Вт.

### Параметричне дослідження

Запропонований алгоритм був реалізований у середовищі програмування ФОРТРАН.

Параметри пластини, які використовувалися для обчислень, наведено в табл. 1, власні частоти коливань для цієї пластини – у табл. 2.

Таблиця 1

### Параметри пластини

Параметр	Змінна	Значення параметра
Довжина уздовж осі, м:		
абсцис	$a$	0,61
ординат	$b$	0,61
Товщина пластини, м	$h$	0,00635
Густина матеріалу (сталь), кг/м <sup>3</sup>	$\rho_s$	7800,0
Модуль Юнга, Па	$E$	$2,1 \cdot 10^{11}$
Коефіцієнт загасання	$\eta$	0,1
Пуассона	$\nu$	0,3
Кількість мод	$n-m$	3–3

Таблиця 2

### Власні частоти мод коливань ВО пластини

Номер моди (осі $x-y$ )	Власна частота, Гц
1–1	84,2
1–2...2–1	210,5
2–2	336,7
1–3 3–1	420,9
2–3 3–2	547,2
3–3	757,6

Такі моди, як 1–3 і 3–1, збігаються у зв'язку з тим, що пластини квадратна.

Поперечний рух пластини в сусідній півхвилі певної моди пластини має протилежний знак відносно переміщення в поточній півхвилі пластини.

Це означає, що треба використовувати компенсуючу силу з такою ж фазою, як збуджуюча сила, щоб зменшити акустичне випромінювання у випадку, коли компенсуюча сила виникає в сусідній півхвилі певної моди пластини відносно розміщення збуджуючого навантаження.

Поділ пластини на півхвилі для моди 4-3 зображено на рис. 2.

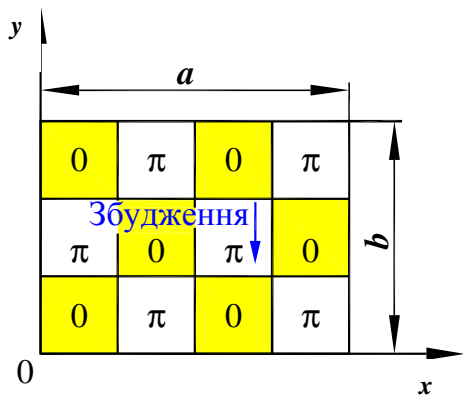


Рис. 2. Різниця фаз між компенсуючою та збуджуючою силою для різних півхвиль пластини моди 4-3

Для зменшення РЗП компенсуючі сили потрібно застосовувати з різницями фаз, вказаними для кожної півхвилі.

Такий розподіл різниць фаз є також типовим для інших мод коливань пластини.

Параметричне дослідження звукового випромінювання ВО пластини виконане за допомогою формул (16), (17).

Для випадку акустичного випромінювання, що показаний на рис. 3, стрілка, направлена вниз, позначає компенсуючу силу, вгору – збуджуючу силу (навантаження).

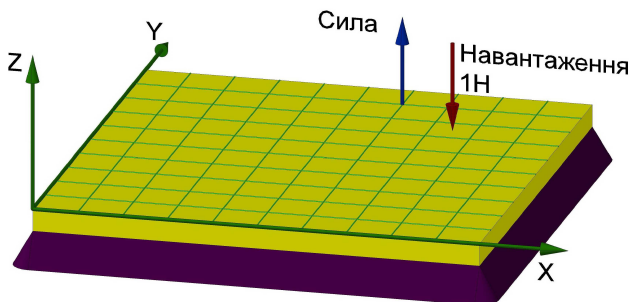


Рис. 3. Схема ділянки навантаження і точкової компенсуючої сили на ВО пластині

Рівень звукової потужності початкової конфігурації становить 125 дБ для всіх досліджень на ВО пластині, які будуть наведені.

Різниця фаз між навантаженням та компенсуючою силою  $\Delta\phi = \pi$ .

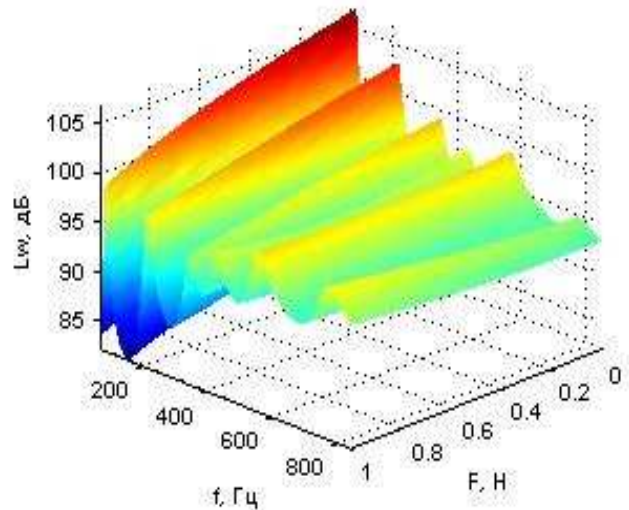
Більшість мод пластини зменшується зі збільшенням значення сили. Це також стосується моди 1-3.

Але зменшення РЗП обмежене значенням 0,6 Н, після якої РЗП збільшується. Таке обмежувальне значення сили може бути знайдене на модах 1-1, 1-2, 2-2 для компенсуючої сили, що перевищує збуджуюче навантаження.

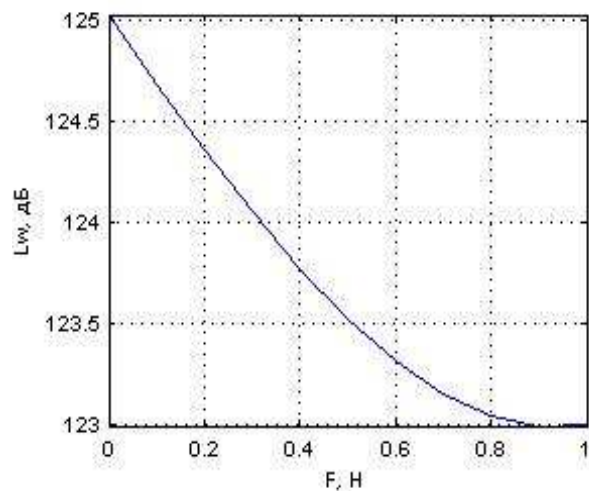
Для моди 3-3 компенсуюча сила розміщена у півхвилі, суміжній з півхвилею, в якій спостерігається навантаження.

Отже,  $\Delta\phi = 0$  потрібна для компенсації, а в ситуації, зображеній на рис. 3, відбувається збільшення РЗП на моді 3-3 зі збільшенням значення сили.

Зменшення сумарного РЗП, показано на рис. 4, б, спостерігається внаслідок домінуючого впливу мод 1-1, 1-2, 2-2.



а



б

Рис. 4. Звуковий спектр (а) і сумарний РЗП (б) для змінного значення компенсуючої сили на ВО пластині

Спектр звукового випромінювання для розрахункового випадку (рис. 5) показано на рис. 6.

Товста лінія під збуджуючою силою на рис. 5 ілюструє змінні розташування компенсуючої сили.

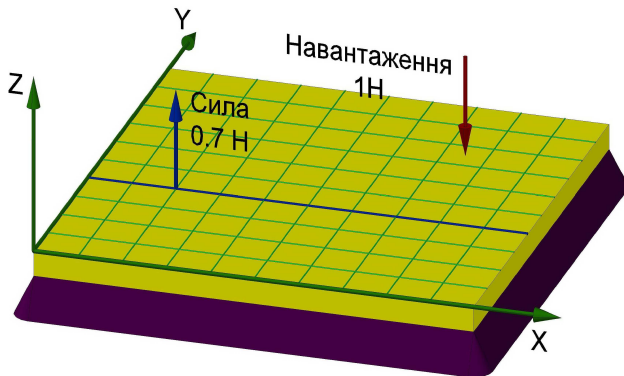


Рис. 5. Вплив дії концентрованої компенсуючої сили на акустичне випромінювання ВО пластини

Різниця фаз між навантаженням і компенсуючою силою дорівнює

$\pi$  ( $\Delta\phi = \pi$ ).

Оскільки компенсуюча сила менша за значенням від навантаження, її оптимальне розміщення стає ближчим до піка (антивузла) форми моди, ніж розміщення сили навантаження. Це спостерігається на першій моді.

Моди 1–2 і 2–1 мають мінімум, що відповідає 0,9 відносної довжини. Це пояснюється мінімумами

у  $x_k = 0$  та  $x_k = 1$

і мінімумом

$x_k = 0,75$

для моди 2–1, якщо її розглядати окремо від моди 1–2.

Для моди 2–2 зменшення РЗП спостерігається між

$x_k = 0$  та  $x_k = 0,5$

і збільшення – у проміжку

$0,5 < x_k < 1$ .

Подібно до мод 1–2 і 2–1 моди 1–3 і 3–1 мають мінімуми близько до кінців пластини.

Коливання інших мод можна вважати незначними.

Утворений графік сумарного РЗП (рис. 6, б) показує збільшення сумарного РЗП для всіх варіантів дії сили.

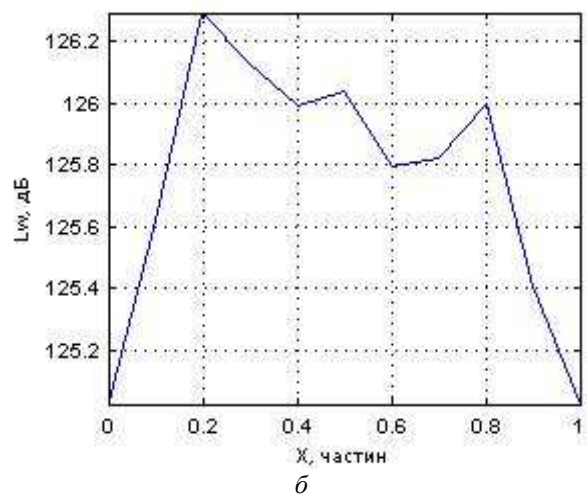
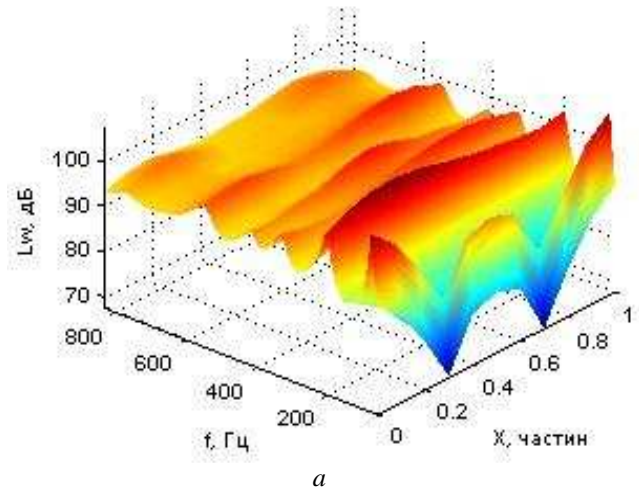


Рис. 6. Звуковий спектр (а) і сумарний РЗП (б) для змінної дії компенсуючої сили вздовж осі x на ВО пластині

Як компенсатор змінюється вздовж координати y, показано на рис. 7.

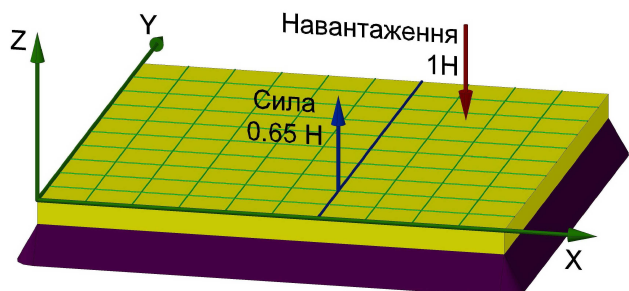


Рис. 7. Вплив розташування точкової компенсуючої сили паралельно осі y на акустичне випромінювання ВО пластини

Умови дослідження такі:  $\Delta\phi = \pi$ , навантаження і компенсуюча сила перебувають у протифазі.

Результати дослідження (рис. 8) показують, що мінімумами першої моди є 0,2 та 0,7.

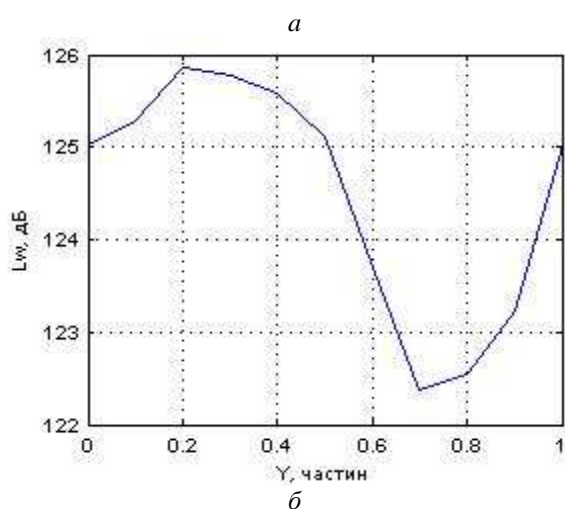
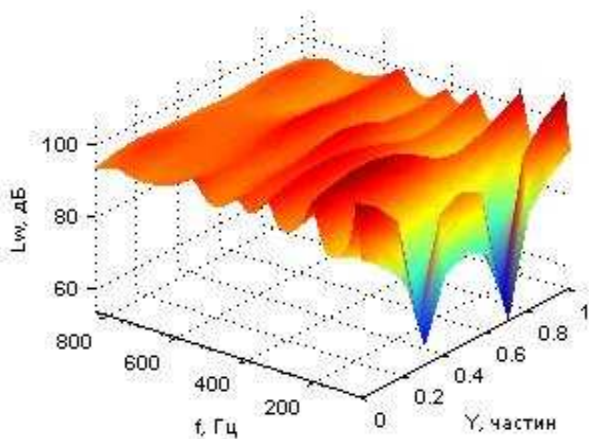


Рис. 8. Звуковий спектр (а) і сумарний РЗП (б) для змінного розташування компенсуючої сили вздовж осі у на ВО пластині

Взагалі звуковий спектр схожий на випадок, зображений на рис. 5 та 6.

Різниця у моді 2–2 пов’язана з тим, що для  $0 < y_k < 0,5$  компенсатор опиняється в суміжній півхвилі пластини моди 2–2 і від  $y_k = 0,5$  до  $y_k = 1$  міститься в тій самій півхвилі, що й навантаження.

Якщо розташування по осі  $x$  змінне, то проміжок від  $x_k = 0$  до  $x_k = 0,5$  відповідає діагональній півхвилі і проміжок від  $x_k = 0,5$  до  $x_k = 1$  – суміжній півхвилі.

Для мод 2–3 і 3–2 деяке зменшення може спостерігатися тільки у діапазоні  $0,2 < y_k < 0,3$ .

Мінімуму моди 3–3 відповідає інтервал  $0,4 < y_k < 0,6$ . Це місце відповідає діагональній півхвилі відносно півхвилі навантаження.

Після інтегрування отриманого спектра мінімальний сумарний РЗП відповідає 0,7. Зменшення сумарного РЗП становить тільки 2,5 дБ.

Схему навантаження показано на рис. 9, результати РЗП – на рис.10.

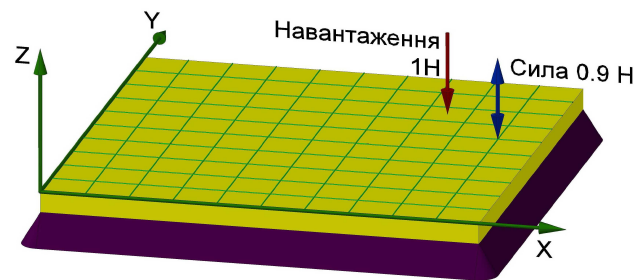


Рис. 9. Вплив  $\Delta\phi$  на акустичне випромінювання ВО пластини

Компенсуюча сила для мод, зображених на рис. 10, міститься в тій самій півхвилі, як і для більшості мод. Тому виникає різниця фаз  $\pi$  радіан. Інша ситуація стосується моди 3–3, для якої компенсуюча сила виникає в суміжній півхвилі пластини.

Отже, мінімуми для цієї моди – 0 або  $2\pi$  радіан. Мінімум більшості мод за  $\phi = \pi$  утворив відповідний мінімум на графіку сумарного РЗП (рис. 10, б).

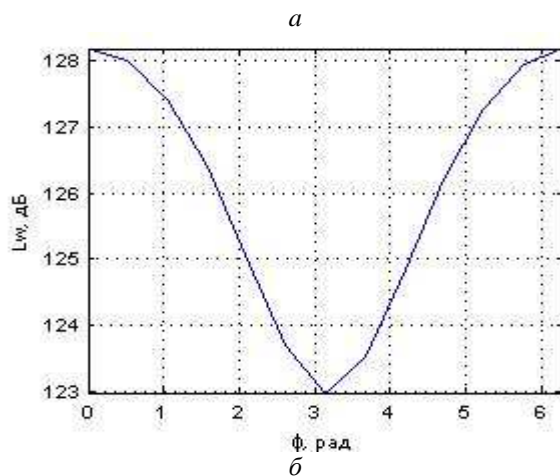
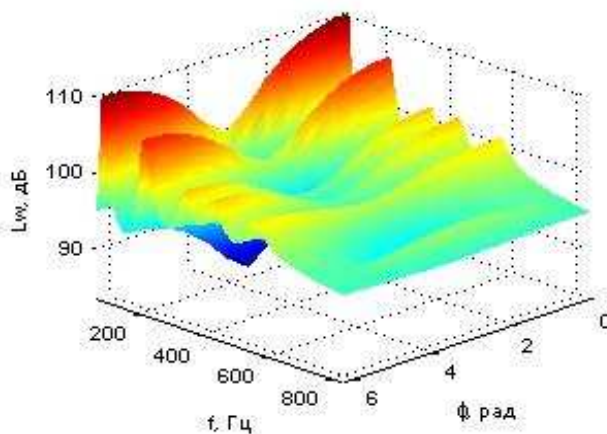


Рис. 10. Звуковий спектр (а) і сумарний РЗП (б) для змінної фази компенсуючої сили на ВО пластині

Для ситуації, що зображена на рис. 11, розміщення компенсуючої сили змінюється вздовж діагоналі від  $x_k = 0$  і  $y_k = 0$  до  $x_k = 1$  і  $y_k = 1$ , тому підписи позначок по осі  $x, y$  на рис. 11 та 12 відповідають обом координатам ( $\Delta\varphi = \pi$ ).

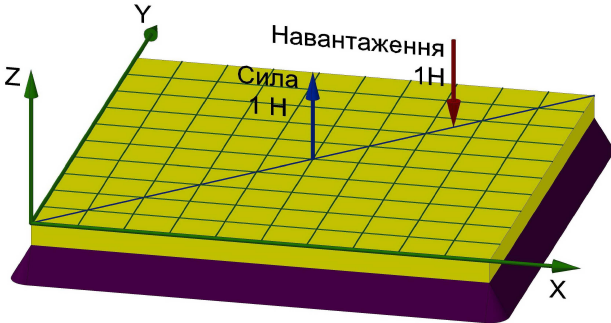


Рис. 11. Вплив розташування точкової компенсуючої сили по діагоналі на акустичне випромінювання ВО пластини

Результати моделювання такого випадку показано на рис. 12.

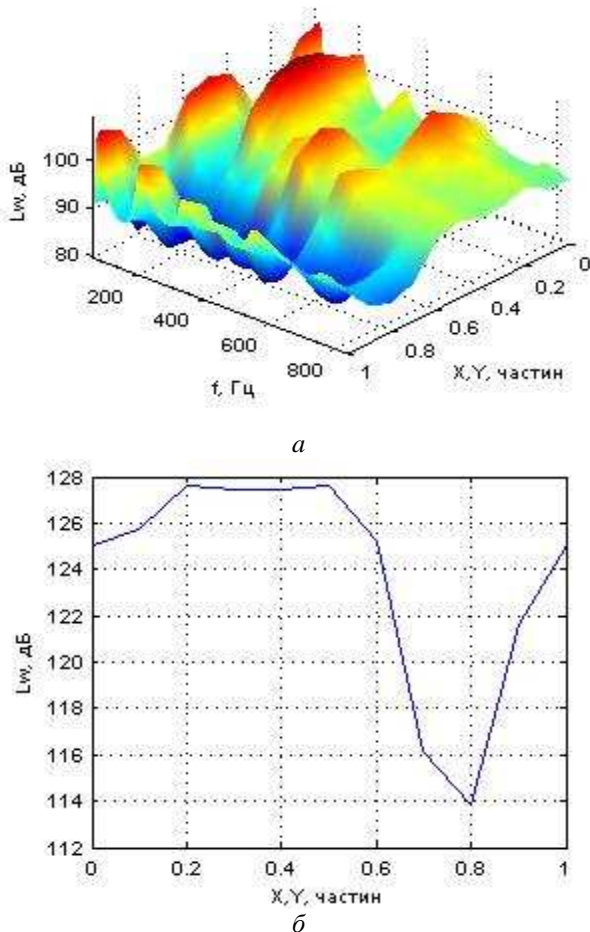


Рис. 12. Звуковий спектр (а) і сумарний РЗП (б) для змінного розташування компенсуючої сили вздовж діагоналі пластини, починаючи з точки з координатами (0,0) до точки (а,а)

Через симетрію коливання ВО пластини на моді 1-1 завжди маємо симетричний спектр випромінювання на першій моді, яка має мінімуми, що відповідають 0,7–0,8 і 0,2–0,3.

Усі моди коливань мають мінімум за 0,75.

Мода 2–2 має локальний мінімум за 0,25, оскільки компенсатор розміщений в антивузлі діагональної півхвилі відносно півхвилі навантаження.

Моди 1–3 і 3–1 мають локальний мінімум за 0,2. Деякі локальні мінімуми також спостерігають для мод 2–3 і 3–2 у діапазонах  $0,3 < x_k < 0,5$  та  $0,3 < y_k < 0,5$ .

Розташування компенсатора змінюється вздовж діагоналі пластини від  $x_k = 0$  і  $y_k = 1$  до  $x_k = 1$  і  $y_k = 0$  відносних довжин пластини ( $y_k = 1 - x_k$ ) (рис.13).

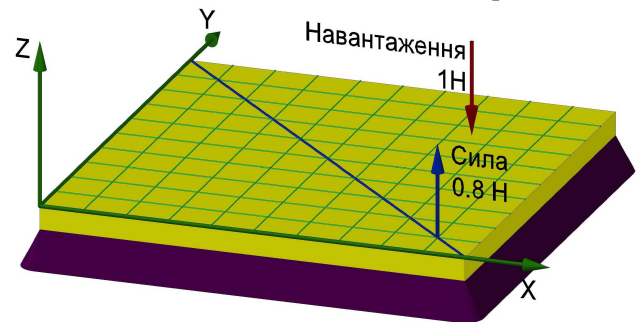


Рис. 13. Схема розміщення навантаження і точкової компенсуючої сили на ВО пластині

На рис. 14 перший номер підпису відповідає осі абсцис, другий номер – осі ординат. Значення компенсатора становить 0,8 Н. Він діє у протифазі з навантаженням. На рис. 14 видно, що мінімумами першої моди є  $x_k = 0,3$  і  $x_k = 0,7$ .

Зміщення від значень 0,25 і 0,75, які спостерігалися у попередніх дослідженнях (рис. 11 та 12), може бути пояснене меншим значенням компенсуючої сили.

У такій ситуації оптимальне розміщення компенсуючої сили наближається до антивузла форми моди, тобто до

$$x_k = y_k = 0,5$$

для моди 1–1.

Для мод 1–2, 2–1 і 2–2 жодних змін не спостерігається для точок  $x_k = 0; 0,5; 1$ .

Для інших розташувань компенсуючої сили може спостерігатися тільки збільшення РЗП.

Для мод 1–3 і 3–1 мінімуми розташовані в діапазонах

$$0 < x_k < 0,3 \text{ і } 0,6 < x_k < 1.$$



Півхвилі мод 1–3 і 3–1 перекриваються у цих регіонах таким чином, що різниця фаз, потрібна для компенсації навантаження, відповідає різниці фаз, використовуваних на цьому етапі дослідження.

Майже ніякого впливу не спостерігається на модах 2–3, 3–2 і 3–3. Із графіка сумарного РЗП (рис. 14, б) видно, що жодного зменшення не можна очікувати, якщо компенсуюча сила міститься на цій діагоналі.

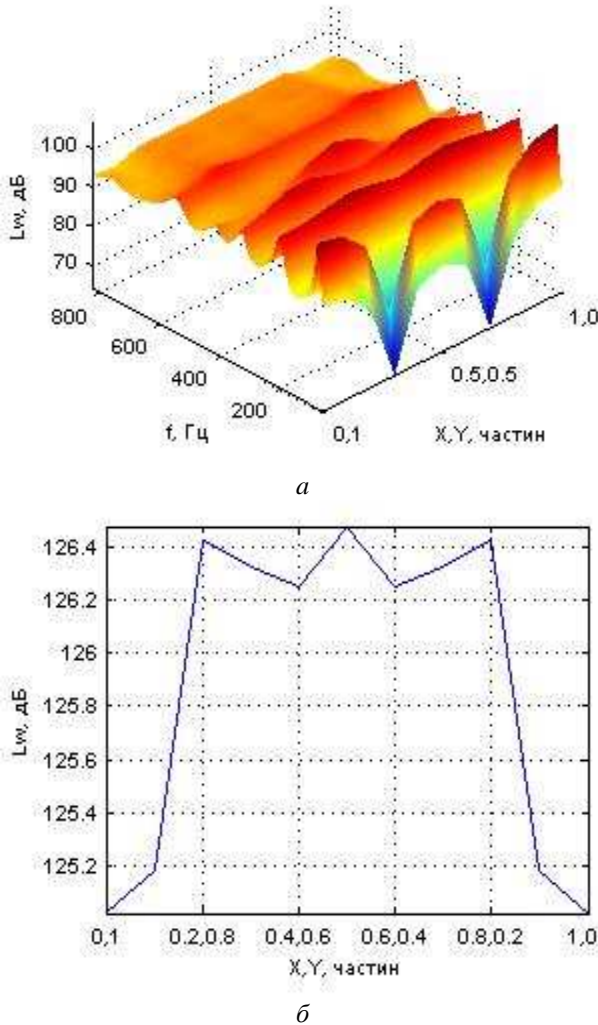


Рис. 14. Звуковий спектр (а) і сумарний РЗП (б) для змінного розміщення компенсуючої сили вздовж діагоналі пластини, починаючи від точки з координатами  $(0, b)$  до точки  $(a, 0)$

### Експериментальна перевірка аналітичних рішень коливань пружної пластини

Для того, щоб перевірити підхід, використаний для обчислення характеристик ВО пластини, подібний підхід було використано для цілком вільної пластини.

Наближена формула для частоти виведена із застосуванням методу Релея і, якщо форми хвилі вібрації пластини і балки подібні, то для пластини з вільними всіма краями, передбачувана форма хвилі є добутком характеристичних функцій для двох балок з вільними кінцями.

Метод Релея накладає додаткові обмеження на систему.

Отже, отримані у результаті частоти є вищими від тих, які можна отримати точним аналізом.

Наближені частоти порівнянні з результатами експерименту.

Експеримент був проведений в акустичній лабораторії Дрезденського технічного університету в Інституті легких конструкцій та полімерних матеріалів.

Пластина з параметрами, вказаними у табл. 3, підтримувалася двома нитками вздовж її довгої сторони  $a$ , як показано на рис. 15.

Таблиця 3

### Параметри цілком вільної прямокутної пластини

Параметр	Змінна	Значення параметра
Довжина вздовж осі, м:		
абсцис	$a$	0,3
ординат	$b$	0,23
Товщина пластини, м	$h$	0,0015
Матеріал	–	сталь
Коефіцієнт Пуассона	$\nu$	0,3
Густина матеріалу, $\text{кг/м}^3$	$\rho_s$	7800
Модуль Юнга, МПа	$E$	206366

Балка

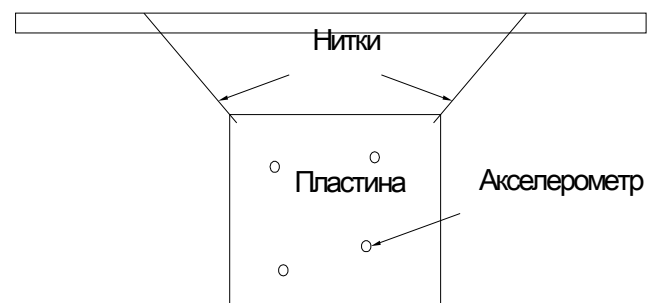


Рис. 15. Експериментальна установка

Пластину збуджували молотком у вузлах сітки. Поперечну вібрацію заміряли чотирма акселерометрами. Після модального аналізу було отримано власні частоти коливань пластини.

Власні частоти вільної поперечної вібрації цілком вільної прямокутної пластини можна визначити як

$$\omega_{mn}^2 = \frac{D}{\rho h} \left( \frac{\pi}{a} \right)^4 \lambda_{mn}^2, \quad (18)$$

де

$m$  і  $n$  – кількість ліній вузлів у напрямках  $X$  та  $Y$  відповідно.

Фактор частоти  $\lambda$  можна визначити так:

$$\lambda_{mn}^2 = G_x^4 + G_y^4 \left( \frac{a}{b} \right)^4 + 2 \left( \frac{a}{b} \right)^2 [H_x H_y + (-)^{m+n} J_x J_y] \quad (19)$$

Коефіцієнти  $G_x$ ,  $H_x$ ,  $J_x$  із рівняння (19) (табл. 4) отримують із табл. 5, замінюючи у на  $x$  та  $n$  на  $m$ .

Таблиця 4

**Коефіцієнти визначення частотного фактора  $\lambda$**

$m$	0	1	2	3, 4, 5, ...
$G_x$	0	0	1,506	$m-0,5$
$H_x$	0	0	1,248	$(m-0,5)^2 \left[ 1 - \frac{2}{(m-0,5)\pi} \right]$
$J_x$	0	$\frac{12}{\pi^2}$	5,017	$(m-0,5)^2 \left[ 1 + \frac{6}{(m-0,5)\pi} \right]$

Власні частоти, отримані експериментально, порівняні з власними частотами, обчисленими за формулою (18), наведено в табл. 5. Порівняння показує, що максимальна похибка (4,7 %) відповідає частоті 1–1.

Імовірно, похибки викликані такими умовами:

– недосконалім забезпеченням граничних умов;

– подібністю пластини до квадратної пластини:

$$\frac{a}{b} = 1,3043;$$

– наближеним характером формули (18).

Таблиця 5

**Порівняння власних частот, отриманих теоретично та експериментально**

$m \backslash n$	0	1	2	3	4
Власні частоти, отримані експериментально, Гц					
0	–	–	160	426	834
1	–	80.06	219	484	881
2	91.3	181	358	637	1030
3	252	341	549	852	–
4	492	578	802	–	–
5	798	896	–	–	–
Власні частоти, отримані теоретично, Гц					
0	–	–	157.24	433.31	849.28
1	–	76.47	221.02	490.69	901.30
2	92.42	180.74	368.05	651.86	1061.48
3	254.69	343.34	564.10	877.58	1300.36
4	499.19	583.31	819.05	1158.33	1599.61
5	825.19	905.35	1146.65	1504.57	1964.11
Відносна похибка, %					
0	–	–	1.75	1.69	1.80
1	–	4.70	0.92	1.36	2.25
2	1.21	0.14	2.73	2.28	2.97
3	1.06	0.68	2.68	2.91	–
4	1.44	0.91	2.08	–	–
5	3.30	1.03	–	–	–

Для вільної пластини перехід від характеристик мод прямокутних пластин до характеристик квадратних пластин поступовий.

Отже, більш ускладнена формула потрібна для оцінювання частоти, щоб включити ефект

$$m/n \pm n/m \text{ мод.}$$

Такі види мод є для

$$m-n = \pm 2, 4, 6.$$

**Висновки**

1. Різниця фаз між навантаженням і компенсуючою силою, потрібною для компенсації навантаження, є різною для різних півхвиль форми моди. Різниця фаз розподілена вздовж пластини у формі шахової дошки, у разі розміщення компенсуючої сили в тій самій півхвилі, що й положення навантаження

$$\Delta\varphi = \pi.$$

2. Якщо фазу компенсатора було вибрано правильно, тоді РЗП зменшується зі збільшенням значення компенсуючої сили до деякого обмеженого значення.

Це значення відмінне для різних мод коливань пластини.

3. Якщо фазу компенсатора було вибрано неправильно (див. висновок 1), тоді РЗП збільшується зі збільшенням значення компенсуючої сили без будь-яких обмежень.

4. Якщо  $F_k < F_F$  тоді оптимальне розміщення компенсатора прагне бути ближче до антивузла за навантаження.

Нехай  $x_{AF}$  є розміщенням найближчого антивузла до розташування навантаження і  $x_{Ak}$  є розташуванням найближчого антивузла до компенсатора, тоді

$$|x_{Ak} - x_k| < |x_{AF} - x_F|.$$

5. Якщо  $F_k > F_F$  тоді оптимальне розміщення компенсатора прагне бути ближче до вузла за навантаження.

Нехай  $x_{NF}$  є розміщенням вузла, найближчого до розташування навантаження, а  $x_{Nk}$  є розташуванням вузла, найближчого до компенсатора, тоді

$$|x_{Nk} - x_k| < |x_{NF} - x_F|.$$

Такий самий принцип можна застосувати до координати  $y$ .

#### Література

1. *Leissa A.W.* Vibration of plates / A.W. Leissa // National aeronautics and space administration, 1993.
2. *Preumont A.* Vibration control of active structures / A. Preumont. – Kluwer academic publishers, Dordrecht, 2003. – 350 p.
3. *Hansen C.H.* Active Control of Noise and Vibration E and FN Spon / C.H. Hansen, S.D. Snyder, London. 1997.
4. *Lee J.-C.* Active control of sound radiation from a rectangular plate excited by a line moment / J.-C. Lee, J.-C. Chen // Journal of Sound and Vibration, 1999. – № 220 (1). – P. 99–115.
5. *Makarenko V.M.* Parametric investigation of acoustic radiation by a beam under load and actuator forces / V.M. Makarenko et al.// NAU Proceedings 2005. – №4. – P. 122–133.
6. *Makarenko V.M.* Investigation of sound radiation by cantilever beam / V.M. Makarenko // Вісник НАУ. – 2006. – № 1. – С. 169–172.
7. *Makarenko V.M.* Research of the modal response of simply supported and cantilever beams subjected to point and distributed harmonic excitations / V.M. Makarenko // Proceedings of the NAU. – 2006. – №3. – P. 101–107.
8. *Makarenko V.M.* Modeling and control of sound radiation by simply supported and cantilever beam coupled with smart material / V.M. Makarenko // Proceedings of the NAU. – 2007. – №3. – P. 142–150.
9. *Makarenko V.M.* Analysis of isotropic actuator application for excitations compensation / V.M. Makarenko // Proceedings of the third world congress "Aviation in the XXI century". – 2008. – Vol. 2. – P. 4.61–4.62.

Стаття надійшла до редакції 04.06.09.