УДК 539.3:624.071:624.01

Д.Е. Прусов, докторант

АНАЛІЗ РІВНЯНЬ РІВНОВАГИ ДИСКРЕТНОЇ РОЗРАХУНКОВОЇ МОДЕЛІ ҐРУНТОВОГО ПІВПРОСТОРУ

Проведено аналіз рівнянь рівноваги розрахункової моделі неоднорідного грунтового півпростору з метою розробки спеціального алгоритму розв'язку систем нелінійних рівнянь для плоскої задачі з використанням методів подовження за параметром збурення, Ньютона−Канторовича і подовження за розвитком пластичних деформацій.

The analysis of equilibrium equation of discrete design model of soil semispace is realized to develop the special algorithm for nonlinear equations system solution of two-dimensional problem using continuation method by perturbation parameter, Newton-Kantorovich method, and continuation method by plastically deformation evolution.

ґрунтовий півпростір, дискретна розрахункова модель, нелінійна теорія пружності і пластичності, рівняння рівноваги

Постановка проблеми

Проблема розробки спеціального алгоритму розв'язку систем нелінійних рівнянь для плоскої задачі неоднорідного півпростору з використанням методів подовження за параметром збурення, Ньютона−Канторовича і подовження за розвитком пластичних деформацій та алгоритму реалізації спеціальних граничних умов на основі розв'язку умовної варіаційної задачі методом невизначених множників Лагранжа є актуальною задачею прикладної механіки, яку можна вирішити на основі аналізу рівнянь рівноваги дискретної розрахункової моделі грунтового півпростору.

Аналіз досліджень

У багатьох дослідженнях розглядають класичні задачі розподілу напружень у лінійно деформованому масиві, які зводяться до плоских (плоска деформація). У разі смугового навантаження на одиничну пластинку аналітичний розв'язок задачі визначення розподілу напружень виконувався вченими А. Лявом, М. Харром, Н. Цитовичем, Н. Герсевановим, В. Флоріним та ін. [1−3]. У результаті було отримано спрощені до практичного використання табульовані формули з визначення стискаючих, розпірних (нормальних) і зсувних напружень.

За наявності великих переміщень і значних деформацій (зсувних) рівноважний стан скінченно-елементних моделей півпростору описується системами нелінійних рівнянь достатньо великого порядку − до десяти тисяч і більше. Існує багато методів розв'язку нелінійних рівнянь, таких, як метод подовження за параметром збурення, методи установлення, методи послідовних навантажень та ін. [4].

Методи подовження розглядають як засіб отримання початкових наближень, що розширюють область збіжності використаного методу. Виходячи з цього у запропонованій методиці під час застосування методу Ньютона−Канторовича для отримання відповідного початкового наближення використовують метод подовження за параметрами збурення, які іноді класифікують як метод послідовних навантажень, але у цьому випадку цей метод використовують у сполученні з методом Ньютона−Канторовича у рамках кожного кроку методу подовження. Крім того, на кожному кроці після завершення ітерацій за Ньютоном−Канторовичем виконують ітерації за розвитком зони пластичних деформацій.

Постановка завдання − аналіз розширеної нелінійної системи рівнянь рівноваги дискретної моделі півпростору *I-L*-го порядку з урахуванням додаткових в'язів (анкерних пристроїв, які пов'язують жорстко два вузли) під час розщеплення її на окремі блоки, які розв'язуються методом Ньютона−Канторовича.

Для задачі статики сильнонелінійної системи як параметр збурення доцільно використовувати безрозмірний параметр навантажування, вимушеного зміщення, реакцій в'язів та ін. Будемо вважати, що задача залежить від будь-якого безрозмірного параметра t, тоді маємо нелінійне рівняння

$$h(u, t) = 0;\ t \in [0, 1]. \quad (1)$$

Припустимо існування кривої розв'язань на інтервалі $[t_o,\ t]$ такої, що

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 1, \quad (2)$$

тоді маємо

$$h(u, t_i) = 0,\ i = 1,2,\ldots,n. \quad (3)$$

Метод розв'язання рівнянь рівноваги дискретної моделі

Під час використання методу Ньютона розв'язання i-го нелінійного рівня відбувається з початковим наближенням розв'язку i–1-го рівняння, оскільки розбиття інтервалу (2) завжди можна зробити таким, що різниця t_{i+1}- t_i буде досить малою і розв'язок $\{u^{i-1}\}$виявиться досить добрим початковим наближенням для $\{u^i\}$, тобто таким, що лежить в S–околі та забезпечує умови локальної збіжності.

Під час знайдення розв'язання i-го рівняння задачі (3) береться скінченна кількість ітерацій m за методом Ньютона [5] відповідно до рекурентної формули

$$u^{i,k+1} = u^{i,k} - \\ -h^1\left(u^{i,k},t_i\right)^{-1} h\left(u^{i,k},t_i\right), \tag{4}$$

$k = 0, 1, 2 \ldots, m^{-1}$; $u^{1,0} = u^0$;

$u^{i+1,0} = u^i$, m ; $i = 1,2, \ldots n^{-1}$,

де

$h^1(u^{1,k}, t_i)$ – матриця Якобі відображення h.

Оскільки на практиці безпосередньо обернену матрицю Якобі системи великого порядку, як правило, не обчислюють, а замість цього віддається перевага розв'язанню системи лінійних (лінеаризованних) рівнянь, то рекурентну формулу (4) за методом Ньютона можна записати у вигляді:

$$h'\left(u^{i,k},t_i\right)u^{i,k+1} = \\ = h'\left(u^{i,k},t_i\right)u^{i,k} - h\left(u^{i,k},t_i\right). \tag{5}$$

Для скорочення кількості ітерацій обчислювального процесу за методом Ньютона скористаємося теоремою Канторовича [5], згідно з якою в обчислювальному процесі (5) замість матриці Якобі використовують матрицю відображення h (u, t) (відображення СЕ-моделі, що породжується базисними функціями Φ^N скінченних апроксимацій [6; 7] на початковій ітерації кожного i-го кроку подовження за параметром t, а саме:

$$h'\left(u^{i,0},t_i\right) u^{i,k+1} = \\ = h'\left(u^{i,0},t_i\right) u^{i,k} - h\left(u^{i,k},t_i\right), \tag{6}$$

де

матриця $h'\left(u^{i,0},t_i\right)$ залишається постійною для всіх ітерацій i-го кроку подовження.

В ітераційному процесі використовується система нелінійних рівнянь рівноваги СЕ-моделі півпростору, яка визначається формулою

$$\left\{R\left(u\right)\right\} - \left\{Q\left(u\right)\right\} = 0,$$

де

$\{R(u)\}$, $\{Q\ (u)\}$ – вектори узагальнених внутрішніх і зовнішніх сил дискретної моделі півпростору.

Тоді рекурентну формулу (6) ітераційного процесу розв'язку квазістатичної задачі (1) на кроці за часом $t + \Delta t$, «n + 1» можна подати у вигляді

$$\left[K_{GL}^{(n)}\right]\cdot\left\{\Delta u_{i+1}^{n+1}\right\}_{(L)} = \\ = \left\{Q\left(u_i^n\right)\right\}_{(G)} - \left\{R\left(u_i^n\right)\right\}_G; \tag{7}$$

$$\left\{u_{i+1}^{n+1}\right\} = \left\{u_i^{n+1}\right\} + \left\{\Delta u_{i+1}^{n+1}\right\},$$

де

$\left[K_{GL}^{(n)}\right]$ – лінеаризована матриця жорсткості СЕ-моделі.

Критерієм завершення ітераційного процесу (7) за i є зниження норми вектора нев'язки

$$\left\{r\left(u_i^{n+1},t\right)\right\} = \left\{Q\left(u_i^{n+1}\right)\right\} - \left\{R\left(u_i^{n+1}\right)\right\}$$

до заданої малої величини

$$\left(r^{i,k},r^{i,k}\right) \leq \varepsilon.$$

Розв'язок задачі у переміщеннях деякої сукупності вузлів СЕ-моделі здійснюється відповідно до задач математичної фізики, тобто повинні накладатися відповідні кінематичні умови – якісні і кількісні, що забезпечують геометричну незмінність системи.

В'язі СЕ-моделі можна розділити на дві групи:

− безумовні;

− додаткові (умовні).

Безумовні в'язі (жорсткі) у класичному варіанті накладають за напрямками, що збігаються з осями глобального базису, в якому визначаються невідомі переміщення системи розв'язуючих рівнянь. Існує відома стандартна процедура врахування цих в'язів, яка полягає в тому, що у процесі формування матриці системи розв'язуючих рівнянь викреслюються рядок і стовпчик, що відповідають виключеному переміщенню.

Якщо геометричні в'язі задаються рівняннями, які установлюють співвідношення між переміщеннями різних вузлів дискретної моделі, то такі в'язі будемо враховувати, як додаткові. У цьому випадку необхідно розв'язувати умовну варіаційну задачу з використанням методу невизначених множників Лагранжа [8]:

$$\left(R_N^{\alpha'} + \lambda_S \frac{\partial f(u)}{\partial u_{\alpha'}^N} - Q_N^{\alpha'} \right) \delta u_{\alpha'}^N = 0;$$

$$(N = 1,2,...M); \qquad (8)$$

$$f^S \left(u_{\alpha'}^1, u_{\alpha'}^2, ..., u_{\alpha'}^R, ..., u_{\alpha'}^{M-G}\ u_{\alpha'}^{M-G+1}, ..., u_{\alpha'}^M \right) = 0;$$

$$S < I \qquad (9)$$

Маємо розширену систему варіаційних рівнянь (8), із числом рівнянь $M+S$ і відповідним числом невідомих $u_M + \lambda_S$. Цю систему можна розв'язувати як сумісну розширену систему, що дасть математичні труднощі, пов'язані з обумовленістю матриці жорсткості.

За лінійних рівнянь в'язів (9) більш доцільними є виключення кількості рівнянь, що відповідають кількості залежних варіацій переміщень.

Одним із таких методів є метод невизначених множників Лагранжа.

Варіаційна задача (8) утримує α залежних і I – α незалежних із варіацій $\delta u^N_{\alpha'}$ [3].

Підбираємо множники Лагранжа λ_S так, щоб

$$F_K^{\alpha'} + \lambda_S \frac{\partial f^s(u)}{\partial U_K^{\alpha'}} - Q_K^{\alpha'} = 0$$

(К=I-L+1, I-L+2,...I),

завдяки чому виключаємо L залежних із варіацій $\delta u^N_{\alpha'}$.

Усі останні варіації вільні і коефіцієнти біля них повинні обернутися в нуль, тому отримуємо остаточно систему рівнянь порядку $I - L$:

$$F_I^{\alpha'} + \lambda_S \frac{\partial f^S(u)}{\partial u_I^{\alpha'}} - Q_I^{\alpha'} = 0$$

$(I = 1,2,\ldots,I\text{-}L)$.

Висновки

Розглянуто шляхи розв'язку систем нелінійних алгебричних рівнянь рівноваги дискретної розрахункової моделі ґрунтового півпростору зі слабкими прошарками ґрунтів з використанням методів подовження за параметром збурення, Ньютона−Канторовича і подовження за розвитком пластичних деформацій з урахуванням спеціальних граничних умов на основі розв'язку умовної варіаційної задачі методом невизначених множників Лагранжа.

Перспективи подальших розвідок стосуються проведення аналізу розв'язків тестових задач класичної механіки ґрунтів для встановлення точності запропонованої методики дослідження нелінійного деформування ґрунтового півпростору у граничному напруженому стані, що дозволить засвідчити достеменність лінеаризованних співвідношень нелінійної теорії.

Література

1. *Флорин В.А.* Основы механики грунтов / В.А. Флорин. – М.: Госстройиздат. Т.1, II, 1961. – 543 с.

2. *Харр М.Е.* Основы теоретической механики грунтов // М.Е. Харр. – М.: Изд-во лит. по стр-ву, 1971. − 320 с.

3. *Цытович Н.А.* Механика грунтов / Н.А. Цытович. – М.: Гос. Изд-во лит. по стр-ву, архит. строит. материалам. − М.: Высш. шк., 1983. – 636 с.

4. *Баженов В.А., Цихановський В.К., Кислоокий В.М.* Метод скінченних елементів у задачах нелінійного деформування тонких та м'яких оболонок / В.А. Бажедов, В.К. Цихановський, В.М. Кислоокий. – К.: КНУБА, 2000. – 386 с.

5. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / ДЖ. Ортега, В. Рейнболдт. – М.: Мир, 1975. – 558 с.

6. *Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред / Дж. Оден. – М.: Мир, 1976. – 464 с.

7. *Цихановський В.К., Прусов Д.Е.* Метод скінченних елементів у задачах дослідження неоднорідного півпростору з урахуванням геометричної і фізичної нелінійності / В.К. Цихановський, Д.Е. Прусов // Опір матеріалів та теорія споруд: Наук.-техн. збірник.– Вип.75.– К.: КНУБА.– 2004.– С. 87–98.

8. *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды / А. Грин, ДЖ. Адкинс. – М.: Мир, 1985. – 455 с.

9. *Ланцош К.* Вариационные принципы механіки / К. Ланцош. – М.: Мир, 1965.– 408 с.

Стаття надійшла до редакції 08.09.09.