УДК 62.505

В.К. Антонов, к.т.н., доц.

ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНИХ ДРОБОВОГО ПОРЯДКУ В ЗАДАЧАХ СТРУКТУРНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ І МЕХАНІКИ

Запропоновано визначення похідних дробового порядку для застосування в задачах структурної ідентифікації, що приводить до природних алгоритмів визначення порядку похідних настроюваної моделі.

The motion of fractional derivative is proposed. The definition is used to problems of structural identification. It gives natural algorithms of definition of orders of derivatives of adaptive (ture) model.

дробові похідні, механіка, структурна ідентифікація

Вступ

Для структурної ідентифікації динамічних об'єктів треба визначити вид правих частин диференціальних рівнянь ітераційним способом.

Для центрованих спостережень перше наближення знаходимо у вигляді лінійної диференціальної системи. Визначивши її параметри як сталі, задачу вважаємо розв'язаною.

Якщо параметри регулярно змінюються в часі на відміну від неконтрольованих збурень, повторюємо процедуру:

− знаходимо доповнювальні лінійні диференціальні рівняння для центрованих функцій зміни несталих параметрів, розглядаючи на підставі першого досліду ідентифіковану систему як нестаціонарну;

− приєднуємо нову диференціальну систему для коефіцієнтів до попередньо ідентифікованої;

− отримуємо в цілому нелінійну систему, еквівалентну попередньо визначеній як нестаціонарній. Вона містить добутки змінних і є нелінійною.

Далі аналізуємо добудовану лінійну систему на стаціонарність.

Якщо система стаціонарна, процедуру закінчуємо. Якщо ні, повторюємо так само процедуру для нової нестаціонарної системи.

Упевнившись, що маємо справу не з гетероскедастичністю, повторюємо досліди до досягнення стану «залишків на рівні шумів».

Процедура за побудовою не може не збігатися, оскільки вихідні дані на кінцевому відрізку не можуть містити нескінченної інформації, а кожна ітерація кінцево зменшує попередньо неврахована (внаслідок невідповідності структури) інформацію. Доцільно обмежувати зростання порядку рівнянь, наприклад, створенням нових наближень із членами у вигляді добутків регресорів у наперед невизначених степенях, які визначаються як додаткові параметри, що ідентифікуються.

За всіма відомими способами послідовної побудови структури не розглядається питання автоматичного визначення порядку диференціальних рівнянь. Адже можливе узагальнення структури у вигляді суми добутків змінних з наперед невизначеними степенями (параметрами), і невизначеними порядками диференціювання (ідентифікованими параметрами).

Ускладнюючи структуру, вкладаючи в неї потенціально більше степенів вільності для відбиття вихідної інформації, ніж мінімально потрібно, вважаючи її спроможною врахувати інформації більше, ніж міститься в регресорах, тобто із завищено інформаційномісткою, через її надмірність щодо вихідних даних, отримуємо невизначеність – неоднозначність результатів. Вона виявляється у вигляді існування деякої області визначення параметрів, наприклад, мінімуму функції Ляпунова.

Для області визначення настроюваних параметрів маємо ситуацію, що існує відносно похибок вимірювань.

Структурне зміщення спричиняє похибки оцінювання параметрів, як і похибки вимірювання траєкторії руху об'єкта.

Таким чином, задача структурної ідентифікації зведена до параметричної задачі. Те саме зробимо з визначенням порядку похідних.

Постановка задачі

Маючи за мету визначити порядки похідних у моделі об'єкта як параметри, визначатимемо похідні довільного дійсного (можливо і комплексного) порядку. Тоді порядки диференціювання можуть бути визначені, наприклад, градієнтним методом як звичайні параметри.

Визначення порядків похідних від регресорів є елементом структурної ідентифікації динамічних систем. Можливі адаптивні за якістю перехідних процесів алгоритми зі зворотним зв'язком за рівнем несталості процесів пошуку параметрів, що зменшує управління при наближенні до розв'язку.

Визначення дробових похідних

У праці [1] наведено відомі способи визначення дробових похідних.

У практиці розрахунків для технічних об'єктів достатньо використати похідні не дуже високого порядку, наприклад четвертого. Тоді, використавши процедуру числового диференціювання, побудуємо для заданої функції послідовно функції похідних включно до четвертого порядку.

Графіки вихідної функції та її похідних розмістимо вздовж додаткової осі порядку диференціювання у площинах, що перетинають додаткову вісь у точках 0, 1, 2, 3, 4, і проінтерполюємо функцію та її похідні за допомогою, наприклад, інтерполяційного полінома Лагранжа уздовж осі порядку диференціювання [2].

Коли використовуються від'ємні показники диференціювання, тобто будуємо інтеграли від вихідної функції, отримуємо можливість ідентифікувати інтегро-диференціальні рівняння.

У розглянутому випадку в разі використання інтерполяційного полінома Лагранжа рівняння для визначення дробових похідних має вигляд

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}F(n,x) &= \frac{1}{24}(n^4-10n^3+35n^2-50n+24)f(x)-\\ &-\frac{1}{6}(n^4-9n^3+26n^2-24n)\frac{df(x)}{dx}+\\ &+\frac{1}{4}(n^4-8n^3+19n^2-12n)\frac{d^2f(x)}{dx^2}-\\ &-\frac{1}{6}(n^4-7n^3+14n^2-8n)\frac{d^3f(x)}{dx^3}+\\ &+\frac{1}{24}(n^4-6n^3+11n^2-6n)\frac{d^4f(x)}{dx^4}\ ,\end{aligned} \tag{1}$$

де

$F(n,x)$ − неперервна за порядком диференціювання на відрізку [0, 4] функція порядку диференціювання n і незалежної змінної x;

$f(x)$ − вихідна функція незалежної змінної x, наприклад часу.

Функцію $F(n,x)$ можна використовувати як настроюваний за порядком диференціювання регресор.

Під час використання градієнтних методів можна визначити похідні за порядком диференціювання при визначенні напрямку руху за порядком для визначення його сталого значення:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dn}\frac{d^n}{dx^n}F(n,x) &= \frac{1}{24}(4n^3-30n^2+70n-50)f(x)-\\ &-\frac{1}{6}(4n^3-27n^2+52n-24)\frac{df(x)}{dx}+\\ &+\frac{1}{4}(4n^3-24n^2+38n-12)\frac{d^2f(x)}{dx^2}-\\ &-\frac{1}{6}(4n^3-21n^2+28n-8)\frac{d^3f(x)}{dx^3}+\\ &+\frac{1}{24}(4n^3-18n^2+22n-6)\frac{d^4f(x)}{dx^4}\ .\end{aligned} \tag{2}$$

Для розгляду модельного прикладу використаємо вираз (2).

Для гетероскедастичних систем порядок може бути не сталою, а наприклад, функцією часу. Можливі системи з управлінням порядком диференціювання, наприклад, за допомогою нейронної мережі.

Формальне визначення похідних дробового порядку за допомогою перетворювання Лапласа еквівалентне рівнянню (1).

Загальний запис похідної дробового порядку функції часу $x(t)$ за допомогою деякого інтерполяційного оператора I, визначеного, наприклад, за Ньютоном, або за допомогою сплайнів, має вигляд

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = I\left(n, \frac{d^{-\infty}x(t)}{dt^{-\infty}}, \cdots, \frac{d^{-1}x(t)}{dt^{-1}}, x(t), \frac{dx(t)}{dt}, \ldots \cdots, \frac{d^{\infty}x(t)}{dt^{\infty}} \right) = F(n,X)\ , \tag{3}$$

що відповідає можливості визначення похідної дробового порядку від виразу (3) за порядком диференціювання за формулою

$$\frac{d^m}{dn^m}\frac{d^n x(t)}{dt^n} = I\left(m, \frac{d^{-\infty}F}{dn^{-\infty}}, \cdots, \frac{d^{-1}F}{dn^{-1}}, F, \frac{dF}{dn}, \ldots \cdots, \frac{d^{\infty}F}{dn^{\infty}} \right) = F_1(m,n,X)\ . \tag{4}$$

Мають сенс вищі дробові похідні. За схемою (4) визначено похідну, символьне подання якої має вигляд

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right) = \lim_{\Delta n \to o} \frac{\dfrac{d^{n+\Delta n}x(t)}{dt^{n+\Delta n}} - \dfrac{d^n x(t)}{dt^n}}{\Delta n}\ . \tag{5}$$

Конструктивно розглянути інші визначення неперервних похідних, наприклад неперервної похідної Лі за зразком (5).

Задачу обернення неперервної похідної, коли аргумент і порядок диференціювання міняються місцями, формально запишемо у вигляді

$$F(n, X) = F(\varphi(X), \varphi^{-1}(n)) . \qquad (6)$$

Якщо є така функція φ, що виконується рівність (6), то вона виконує обернення.

Графік функції sin 0,5*t* та її дробових похідних додатного порядку до четвертого включно, визначених з кроком 0,2 по порядку диференціювання за формулою (1), зображено на рис. 1.

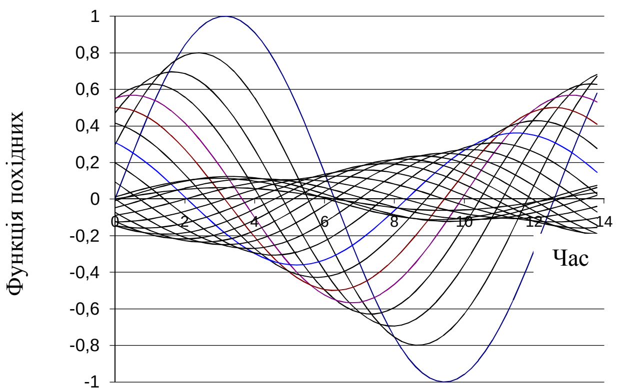

Рис. 1. Функція sin 0,5*t* та її дробові похідні

Самі функції розглядаються як похідні нульового порядку. Ту ж функцію з дробовими похідними у просторовому вигляді, коли додатково по горизонталі відкладається порядок диференціювання, показано на рис. 2.

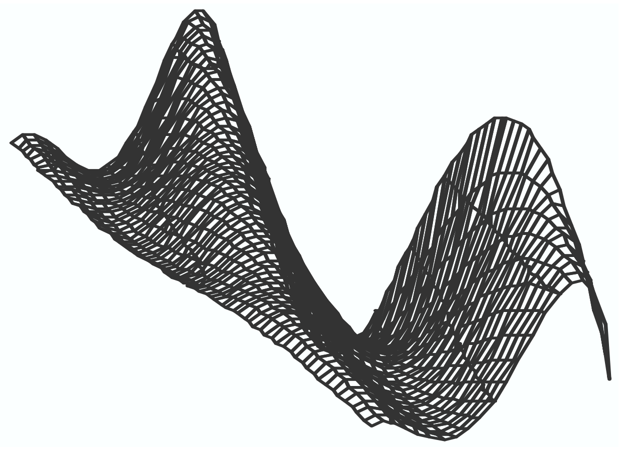

Рис. 2. Просторовий вигляд функції sin 0,5*t* та її дробові похідні

Із рис. 2 видно, що просторова поверхня задовольняє рівняння у частинних дискретних похідних, яке будується, виходячи із виразів (1) і (2). Його можна назвати супровідним.

Найбільш проста його конструкція − це рівняння, ліва частина якого є сумою частинних похідних від функції $F(n, x)$, а права частина будується за визначенням неперервної похідної

$$\frac{\partial F}{\partial n} + \frac{\partial F}{\partial x} = \varphi(n, x).$$

Диференціальні рівняння

Визначенню дробових похідних відповідають диференціальні рівняння з неперервними похідними.

Аналогом лінійного дискретного за порядком диференціювання диференціального рівняння є рівняння з неперервними похідними

$$\int_{n_1}^{n_2} a(n,t)\frac{d^n}{dt^n}x(t)dn = \varphi(n,t), \qquad (7)$$

яке еквівалентне континууму рівнянь в нормальній формі. Множина його фазових змінних має потужність континууму.

Розв'язок рівняння (7) знаходиться розвиненням функції $x(t)$ в ортогональний ряд або ітераційним способом і не викликає принципових обчислювальних труднощів. Коли функція коефіцієнтів $a(n,t)$ решітчаста, що набуває деяких ненульових значень тільки за цілих *n*, вираз (7) переходить у звичайне лінійне диференціальне рівняння.

В якісній теорії диференціальних рівнянь оцінюється їх стійкість. Для її визначення за Ляпуновим замінимо фазовий вектор неперервною функцією аргумента *n*, і додатково вимагатимемо виконання умов стійкості для всіх *n*.

Якщо для рівнянь з дискретними похідними використовується другий метод Ляпунова з дискретною похідною для функції Ляпунова, визначеної для досліджуваної системи, то для рівнянь з неперервними похідними його можна застосовувати за допомогою метода порівняння.

Якщо остання умова виконується, для функції Ляпунова визначається деяке стійке диференціальне рівняння у неперервних похідних, яке перетворюється у тотожність на рішеннях досліджуваного рівняння в неперервних похідних, що є умовою стійкості.

Застосування дробових похідних в ідентифікації

У задачах ідентифікації під час їх зведення до методу найменших квадратів важливо мати опуклість мінімізованої функції для реалізації градієнтних методів.

На рис. 3 зображено графіки функцій, що є інтегралами уздовж незалежної змінної від квадрату відхилення функції sin 0,5t і її цілих похідних від значення виразу (1) при різних, тобто і не цілих, значеннях показника диференціювання – інтеграли відхилу.

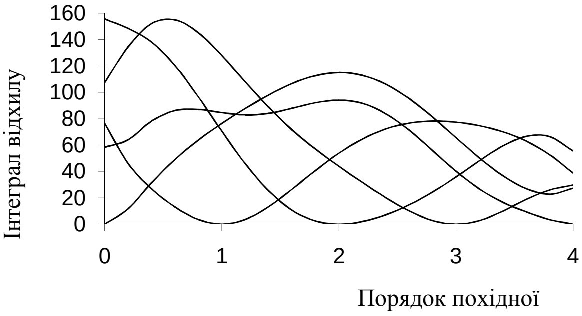

Рис. 3. Графіки функцій інтегралів відхилу

Із рис. 3 видно, що за цілих значень показника диференціювання значення інтегралів дорівнюють нулю, а за інших монотонно зростають принаймі в області, що містить сусідні цілі значення показника диференціювання.

Задаючи початкові значення показників диференціювання у проміжках між цілими, маємо гарантію визначення напрямку руху, використовуючи формулу (2). Це вірно для будь-якої функції, тому що її можна розкласти в гармонічний ряд. Тому можна будувати алгоритми для визначення порядків диференціювання як параметрів, рівноправних із традиційними.

Як приклад розглянемо модельну задачу визначення порядків похідних для диференціального рівняння

$$\overset{x_1}{y} + 2\overset{x_2}{y} + 3\overset{x_3}{y} = -u, \tag{8}$$

де

$x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, − точні значення похідних.

У цьому прикладі значення інших традиційних параметрів не ідентифікуються.

Задачу можна розв'язати градієнтним методом. Побудуємо допоміжну функцію, наприклад:

$$V_0 = (\overset{x_1}{y} + 2\overset{x_2}{y} + 3\overset{x_3}{y} + u)^2 = v^2; \tag{9}$$

$$V_1 = \ln(V_0 + 1); \tag{10}$$

$$V_2 = V + \langle \underset{X}{\mathrm{grad}} V_0 \otimes \underset{X}{\mathrm{grad}} V_0 \rangle; \tag{11}$$

$$V_4 = \ln(\ln(...(\ln(V_{0,1,2,3} + 1) + 1) + 1)....+1); \tag{12}$$

$$V_5 = \int_0^T V_{0,1,2,3,4} dt, \tag{13}$$

або за будь-якою комбінацією рівнянь (9)–(13).

Вираз (10) при додаванні похідних вищого порядку посилює опуклість. У задачах пошуку екстремуму введення дробових похідних приводить до додаткових умов, що посилює збіжність, і тому є доцільним. Побудуємо диференціальні (можливо і у дробових похідних) рівняння налаштування для пошукових параметрів

$$\dot{x}_i = -\varepsilon \underset{x_i}{\mathrm{grad}} V \tag{14}$$

або замість виразу (14) ітераційні рівняння

$$x_{j+1} = x_j + \Delta x_j \mathrm{sign}\left(\int_0^T \dot{x}_j dt\right), \tag{15}$$

які у сталому режимі визначають показники диференціювання – структурні параметри системи.

Графіки перехідних ітераційних процесів за формулою (15) для пошукових параметрів зображено на рис. 4.

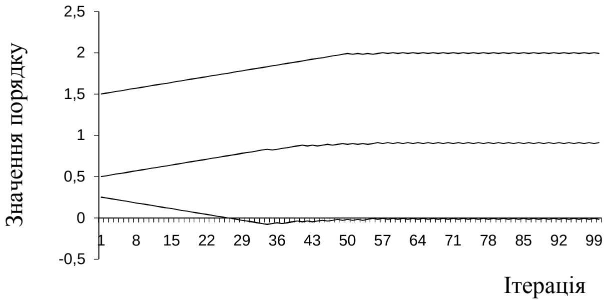

Рис. 4. Графіки перехідних процесів у модельному прикладі

Отримані значення

$x_1 = 2{,}013333;$

$x_2 = 0{,}944444;$

$x_3 = -0{,}0611112$

є оцінками, що збігаються з відомими значеннями параметрів системи (8).

Розв'язок отриманий параметризацією структури при одночасному пошуку інших параметрів. При цьому вочевидь посилюються вимоги до ідентифікуючого управління – чим більш воно сприятливе до визначення параметрів, тим гірше визначати порядки похідних. Тому управління слід оптимізувати.

Практичні результати

Під час використання цього підходу до аеродинамічного об'єкта в нестаціонарному русі виявлено ефект випромінювання енергії, що віднесено до нестаціонарності як причини. Утворюються вихорі, які, відриваючись, забирають енергію, зменшуючи коефіцієнт корисної дії.

Лобовий опір збільшується пропорційно числу Струхаля *Sh*. Коефіцієнт піднімальної сили зменьшується пропорційно *Sh* і аеродинамічній якості.
Подовжній момент збільшується пропорційно зменшенню коефіцієнта піднімальної сили, Sh^2 і середній хорді об'єкта.

Застосування дробових похідних у фізиці

Узагальнення полягає в постулюванні принципу, за яким нестаціонарна система випромінює енергію. Наприклад, атом випромінює (поглинає) енергію зі зміною свого стану. Електричний генератор коливань випромінює радіохвилі. Механічний об'єкт, що прискорюється, змінює внутрішню енергію. У рідині, що нагрівається, відбуваються гідроудари.
Космологічні об'єкти є нестаціонарними і випромінюють енергію. Наприклад, у нестаціонарному режимі скручування пружного стрижня випромінюється енергія, яка (за аналогією з електромагнітною індукцією) приводить до закручування іншого стрижня – приймача – це ефект торсіонної індукції. Якщо Всесвіт є нестаціонарним, і за цим принципом випромінює енергію, то повинні виникати додаткові виміри. Для побудови моделі використаємо дробові похідні. Впровадження дробового диференціювання у практиці удосконалення фізичних уявлень є природним, що стимулює їх прикладне застосування.
У задачах розвитку простору, часу і матерії порядки диференціальних рівнянь, а також часову і просторову розмірність матерії природно віднести до динамічних параметрів, рівноправних із традиційними. Природніше, коли зміщується акцент про початок розвитку матерії, і він має характер потенційної недосяжної можливості.
Неперервні близькі до нуля похідні не потребують пояснення причин руху, тому що при цьому майже нічого не відбувається з будь-якою точністю. Степенів вільності для запису рівнянь з уведенням динаміки порядків похідних стає більше.
Часова і просторова нестаціонарність матерії породжують час і простір, в них фізично проявляється і інакше не існує. Формалізуємо твердження введенням інваріантного інтервалу *ds* за Мінковським, але коефіцієнти якого залежать від квадратів похідних за часом і просторовими координатами від тензора енергії – імпульса:

$$ds^2=\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^2 dt^2-\left(\frac{\partial T}{\partial x_1}\right)^2 dx_1^2-\left(\frac{\partial T}{\partial x_2}\right)^2 dx_2^2-\left(\frac{\partial T}{\partial x_3}\right)^2 dx_3^2.$$

Як можливий, наведемо варіант рівняння для інтервалу

$$d^n s^m=\left(\int\limits_0^m \frac{\partial^r T(t,x)}{\partial t^r}dr\right)^m dt^n -$$
$$-\left(\int\limits_0^m \frac{\partial^r T(t,x)}{\partial x^r}dr\right)^m dx^n. \qquad (16)$$

Рівняння (16) – краще наближення, воно враховує передісторію розвитку, але допускає нефізичну можливість виникнення Всесвіту із «нічого», тому запишемо його у вигляді

$$d^n s^m=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_\varepsilon^m \frac{\partial^r T(t,x)}{\partial t^r}dr\right)^m dt^n -$$
$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_\varepsilon^m \frac{\partial^r T(t,x)}{\partial x^r}dr\right)^m dx^n. \qquad (17)$$

Інтервал за виразами (16)−(17) існує у просторі дробової розмірності m, що відповідає постановці задачі його розвитку.
Вираз (17) подібний до відомого хвильового рівняння [3], що не є випадковістю. Його можна записати у вигляді, коли показники диференціювання і розмірності простору міняються місцями. Метою є удосконалення виразу (17) для об'єднання уявлень теорії гравітації і квантової механіки.
У рівняння (14) простір і час, з одного боку, і матерія – з іншого, входять несиметрично, що відбиває підпорядкованість, в якій ведуча роль належить матерії.
Рівняння розвитку матерії часу і простору мають враховувати їх сучасний стан як граничні умови. Оскільки абсолютна істина у фізиці неможлива, вирази (16)−(17) слід доповнювати деякими параметрами – фізичними константами.
Для замикання системи потрібно записати рівняння для розвитку показника диференціювання *n* та показника розмірності *m*. Для цього припустимо, що на початкових стадіях розвитку процес еволюції був більш бурхливий, і з часом уповільнився, а розвиток показника диференціювання починається із значення, близького до нульового. Тобто матерії «не вистачає» на забезпечення необмеженого розвитку простору і часу. Тому як «рушійну силу» розвитку показника диференціювання візьмемо інтервал (17). У такому разі система замикається. Запишемо диференціальне рівняння для показника диференціювання

$$d^s n^m=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\left(\int\limits_{\varepsilon_1}^m \frac{\partial^r s}{\partial t^r}dr\right)^m dt^s. \qquad (18)$$

За рівнянням (18) показник диференціювання зростає тим швидше, чим скоріше змінюється інтервал. Інтегральні члени у наведених виразах враховують передісторію розвитку. Їх дія подібна до підсумовування амплітуд в квантовій механіці.

Рівняння (17) обмежує зростання показника диференціювання – часова і просторова складові зрівноважують одна одну. Час і простір розвиваються разом із матерією як рівноправні динамічні змінні, а не як відокремлена від неї форма існування. Але при цьому доводиться відмовитися від звичного розуміння, коли розмірність простору і часу є цілою. Рівняння для показника розмірності m побудуємо за виразом (18), якщо в ньому поміняємо місцями показники диференціювання і розмірності простору.

$$d^s m^n = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \left(\int_{\varepsilon_1}^{n} \frac{\partial^r s}{\partial t^r} dr \right)^n dt^s. \quad (19)$$

Якщо матерія не може з'являтися чи зникати, і діє закон її збереження, повинен існувати деякий інваріант наведеної системи. Він може бути утворений із тензора енергії – імпульса, наприклад у вигляді визначника.

Змістовність системи (17)−(19) полягає в тому, що вона за побудовою не приводить до деякої сингулярності для гіпотетичного «початку розвитку матерії», деякого «великого вибуху», який не треба вводити як нефізичний.

Модель параметрично і структурно ідентифікована з реальними властивостями матерії, часу і простору, оскільки оперує з ними опосередковано через співвідношення між комбінаціями фізичних змінних у тензорі енергії-імпульсу. Розвиток за нею є «м'яким», розширення Всесвіту за Хабблом є наслідком наведених рівнянь за умови скінченності його об'єму і пояснюється так само, як локальна гравітаційна дія.

Модель не є остаточною – це можливе наближення. Її вдосконалення полягає у формулюванні принципу найменшої дії у вигляді, придатному для побудови рівнянь у неперервних похідних, і погодженні моделі з ним. При цьому цікаво розглядати задачі про розмірність фізичного простору і часу як варіаційні.

Наприклад, експоненціальна функція часу задовольняє умову мінімуму функціоналу

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(\frac{\partial F(n,t)}{\partial n} \right)^2 + \left(\frac{\partial F(n,t)}{\partial t} \right)^2 \right) dndt.$$

У просторі розмірності, меншої за одиницю, визначати першу похідну неможливо.

Заперечення може викликати спроба робити фізичні висновки на основі визначення дробових похідних за інтерполяційними схемами, які зазвичай застосовують за суто прикладними призначеннями. Насправді інтерполяція відбиває розвиток з урахуванням невідворотності його результату, тобто на підставі досвіду. Отже, сценарій розвитку існує як деяке ціле, а не у вигляді фрагментів з можливістю довільного конструювання. Наприклад, заповнений газом ящик має перегородку, яка має градієнт щільності вздовж її товщини. Перегородка достатньо гарно пропускає молекули газу з високою кінетичною енергією. У частині ящика, в бік якої градієнт щільності зменшується, тиск з часом підвищується, а в іншій частині ящика зменшується. Маємо термодинамічний аналог тунельного ефекту.

У задачах теорії автоматичного управління для функціоналів з кратними інтегралами одержуємо систему рівнянь Белмана. При цьому підінтегральний вираз містить похідні від функції Белмана вищих порядків. При використанні функціоналів з дрібною кратністю інтегрування маємо параметричні регулятори, що залежить від порядку диференціювання фазових координат.

Висновки

Розгляд явищ в гільбертовому просторі цілої розмірності не дозволяє побудувати універсальних рівнянь гравітації і квантової механіки [2].

Відповідно до ідеї неперервного диференціального числення як фізично змістовного час, простір і матерію слід сприймати такими, що мають неперервну структуру, тобто множина числа степенів їх вільності має потужність континууму. Для їх аналізу доцільно викласти тензорний аналіз і теорію лінійних операторів для випадку простору континуальної розмірності.

Література

1. *Самко С.Г.* Интегралы и производные дробных порядков и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. − 688 с.

2. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации / Н.И. Ахиезер. – М.: Наука, 1965. – 408 с.

3. *Вакарчук І.О.* Квантова механіка / І.О. Вакарчук. – Л.: Вид-во Львів. нац. ун-ту ім. І.Франка, 2007. − 848 с.

Стаття надійшла до редакції 10.04.09.