УДК 519.652:519.254 (045)

П.О. Приставка, д.т.н., проф.

НЕБІНАРНЕ ПОПОВНЕННЯ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ВІДЛІКІВ ГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ ЛІНІЙНИМИ ОПЕРАТОРАМИ

Подано дослідження обчислювального аспекту застосування локальних поліноміальних сплайнів двох змінних на основі B-сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому, в задачі небінарного поповнення двовимірних послідовностей.

This article is the solution of practical research of the polynomial splines of two variable based on the B-splines that, on average, are related to the interpolar. These splines allow us to get simple calculating schemes which are convenient for the practical application for non-binary subdivisions.

***B*-сплайн, лінійний оператор, небінарне масштабування, послідовність відліків двовимірної функції**

Постановка проблеми

У задачах обробки двовимірних сигналів, таких, як цифровані зображення, одним з актуальних є питання зміни масштабу.

Формальні вимоги, що висувають до методів зміни масштабу, такі:

– забезпечення прийнятної якості змасштабованого зображення;

– швидкодія виконання операції.

Перша з вимог важлива при зменшенні масштабу (збільшенні розміру зображення). Її виконання забезпечується застосуванням методів інтерполяції, адже мова йде про збільшення кількості членів двовимірних послідовностей, якими представлено двовимірні цифровані зображення.

Друга вимога потребує використання методів інтерполяції, які при прийнятній якості апроксимації мали б найменшу обчислювальну складність, тобто мова йде про мінімальну кількість арифметичних операцій у відповідних обчислювальних схемах.

Найбільш універсальними є методи інтерполяції у вигляді неперервних наближень – білінійна або бікубічна інтерполяція з використанням, наприклад, лінійних комбінацій *B*-сплайнів. У такому разі можна задавати довільний коефіцієнт зміни розміру зображення по горизонталі та вертикалі. Обчислювальні схеми зазначених методів можна суттєво спростити, якщо розглядати часткові випадки зміни масштабу. Наприклад, найвищу швидкодію демонструють методи при двократному збільшенні розміру по горизонталі (вертикалі). Подібні методи використовуються, наприклад, при кратномасштабному аналізі.

Загальна назва обчислювальних процедур, що є частковими випадками методів неперервних апроксимацій та які забезпечують необов’язково бінарне масштабування числових послідовностей – subdivision-методи. Такі методи широко застосовують в практиці обробки цифрованих зображень.

Не відкидаючи важливості використання операторів, що забезпечують бінарне масштабування послідовностей, слід відмітити практичну необхідність отримання небінарних проекцій. Останнє є актуальним при реалізації, наприклад, технологій стиснення зображень з втратами. Поставимо за вимогу одержати такі оператори, до того ж вимагатимемо обчислювальної простоти.

Аналіз досліджень та постановка задачі

Суттєвим спрощенням при виборі методу неперервної апроксимації, придатним для зміни масштабу цифрованих зображень, є застосування апроксимацій гладких функцій. Таке спрощення не є грубим у разі використання методів на основі фінітних функцій. На сьогодні, з урахуванням вимоги низької обчислювальної складності відповідних процедур, позиції лідера в обробці зображень займають методи, засновані на використанні лінійних комбінацій *B*-сплайнів. Свій внесок у фундаментальну розробку апарату апроксимацій на основі *B*-сплайнів зробили І. Шоенберг, К. Де Бор, М.П. Корнійчук, А.О.Лигун та ін.

Серед російськомовних видань, що приділяють увагу практичним питанням застосування *B*-сплайнів, можна відмітити роботи [1; 2].

Питання, пов’язані з обчислювальним аспектом застосування *B*-сплайнів, як в задачі апроксимації, так і при побудові процедур вейвлет-аналізу, достатньо вичерпно викладено в роботі [3].

Теоретичні та практичні дослідження сплайнів на основі *B*-сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому, подано в роботах [4; 5]. Стосовно останнього типу сплайнів відмітимо, що вибір як апарат апроксимації операторів, які є близькими до інтерполяційних у середньому, обумовлений більш високою стійкістю оцінки наближення за даними, що є різного роду результатами вимірювань. За визначенням такі оператори можуть бути рекомендовані для опрацювання саме цифрованих зображень та відео.

У роботі [6] отримані лінійні оператори небінарного масштабування одновимірних послідовностей відліків гладких функцій, які дозволяють масштабування як з вимогою згладжування, так і асимптотично точно.

Мета роботи – подати оператори небінарного масштабування двовимірних послідовностей відліків гладких функцій на підставі алгоритмізації обчислювальних схем сплайнів двох змінних на основі *B*-сплайнів, що є близькими до інтерполяційних у середньому [5].

Виклад основного матеріалу

Нехай задано розбиття Δ_{h_t}, Δ_{h_q} осей T і Q точками

$t_i = ih_t$, $i \in \mathbb{Z}$, $h_t > 0$, $q_j = jh_q$, $j \in \mathbb{Z}$, $h_q > 0$,

відповідно до яких задається розбиття Δ_{h_t,h_q} дійсної площини на однакові прямокутні області, кожна з яких визначається координатами лівого нижнього та правого верхнього кута:

$$\Delta_{h_t,h_q} : \left\{ \left(ih_t, jh_q \right), \left((i+1)h_t, (j+1)h_q \right); i, j \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Часто є потреба кожну (i,j)-у прямокутну область розбиття Δ_{h_t,h_q} асоціювати з центральною точкою такого прямокутника. У цьому разі доцільно поряд з Δ_{h_t,h_q} розглядати сітку вузлів $\tilde{\Delta}_{h_t,h_q}$, визначену точками

$t_i = (i+0{,}5)h_t$, $i \in \mathbb{Z}$, $h_t > 0$,

$q_j = (j+0{,}5)h_q$, $j \in \mathbb{Z}$, $h_q > 0$.

Нехай у вузлах розбиття Δ_{h_t,h_q} ($\tilde{\Delta}_{h_t,h_q}$) задано значення деякої функції $p(t,q) \in C^{r,r}$:

$p_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{Z}$, $r = 2,3,\ldots$.

Вважаємо, що виконується

$$p_{i,j} = \overline{p}_{i,j} + \varepsilon_{i,j}, \tag{1}$$

де

$$\overline{p}_{i,j} = \frac{1}{h_t h_q} \int\limits_{(i-0,5)h_t}^{(i+0,5)h_t} \int\limits_{(j-0,5)h_q}^{(j+0,5)h_q} p(t,q)\,dt\,dq;$$

$\varepsilon_{i,j}$ – деяка похибка.

Якщо задано системи базисних функцій у вигляді *B*-сплайнів, двовимірний сплайн, що є наближенням функції $p(t,q)$, такий:

$$S_{r,0}(p,t,q) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} p_{i,j} B_{r,h_t}(t - ih_t) B_{r,h_q}(q - jh_q),$$

де з точністю до аргументу

$$B_{r,h}(t) = \frac{1}{h} \int\limits_{t-h/2}^{t+h/2} B_{r-1,h}(\tau)\,d\tau; \qquad r \ge 1,$$

$$B_{0,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-h/2; h/2], \\ 1, & t \in [-h/2; h/2]; \end{cases} \quad h = h_t, h_q.$$

Наприклад, розгорнуте подання сплайну $S_{2,0}(p,t,q)$ буде таке:

$$\begin{aligned} S_{2,0}(p,t,q) = \frac{1}{64}\Big(&(1-x)^2(1-y)^2 p_{i-1,j-1} + \\ &+(1-x)^2(6-2y^2)p_{i-1,j} + (1-x)^2(1+y)^2 p_{i-1,j+1} + \\ &+(6-2x^2)(1-y)^2 p_{i,j-1} + (6-2x^2)(6-2y^2)p_{i,j} + \\ &+(6-2x^2)(1+y)^2 p_{i,j+1} + (1+x)^2(1-y)^2 p_{i+1,j-1} + \\ &+(1+x)^2(6-2y^2)p_{i+1,j} + (1+x)^2(1+y)^2 p_{i+1,j+1}\Big), \end{aligned} \tag{2}$$

де

$$x = \frac{2}{h_t}(t - ih_t),\ |x| \le 1;\ y = \frac{2}{h_q}(q - jh_q),\ |y| \le 1. \tag{3}$$

При цьому для $\forall p(t,q) \in C^{2,2}$ і $\forall \varepsilon > 0$ справедлива нерівність [5]:

$$\begin{aligned} \left\| p(t,q) - S_{2,0}(p,t,q) \right\| \le \frac{h_t^2}{6} \left\| p''_{t^2}(t,q) \right\| + \frac{h_q^2}{6} \left\| p''_{q^2}(t,q) \right\| + \\ + \frac{h_t^2 h_q^2}{36} \left\| p^{(4)}_{t^2 q^2}(t,q) \right\| + \varepsilon \cdot \left\| p(t,q) \right\| + o(h^4), \end{aligned} \tag{4}$$

де

$h = \max\{h_t, h_q\}$.

Вираз (2) дозволяє отримати наближення функції $p(t,q) \in C^{2,2}$ в будь-якій точці (i,j)-го елементу розбиття $\tilde{\Delta}_{h_t,h_q}$. При цьому з нерівності (4) видно, що даний оператор забезпечує згладжування даних формули (1).

Для апроксимації з більшим ступенем згладжування за значеннями формулл (1) можна використовувати сплайн $S_{4,0}(p,t,q)$ [5]. При цьому для $\forall p(t,q) \in C^{2,2}$ і $\forall \varepsilon > 0$ виконується:

$$\begin{aligned} \left\| p(t,q) - S_{4,0}(p,t,q) \right\| \le \frac{h_t^2}{4} \left\| p''_{t^2}(t) \right\| + \frac{h_q^2}{4} \left\| p''_{t^2}(t) \right\| + \\ + \frac{h_t^2 h_q^2}{16} \left\| p^{(4)}_{t^2 q^2}(t,q) \right\| + \varepsilon \left\| p(t,q) \right\| + o(h^4), \end{aligned}$$

де

$h = \max\{h_t, h_q\}$.

При необхідності наближень, близьких до інтерполяційних, у праці [5] пропонується використання обчислювальних схем на основі розкриття функціоналів, на зразок:

$$S_{2,1}(p,t,q)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left(p_{i,j}-\frac{1}{6}\Delta_i^2 p_{i,j}-\frac{1}{6}\Delta_j^2 p_{i,j}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{36}\Delta_{ij}^2 p_{i,j}\right)B_{2,h_t}(t-ih_t)B_{2,h_q}(q-jh_q), \qquad (5)$$

де $\Delta_i^2 p_{i,j}=p_{i-1,j}-2p_{i,j}+p_{i+1,j}$;

$\Delta_j^2 p_{i,j}=p_{i,j-1}-2p_{i,j}+p_{i,j+1}$;

$\Delta_{ij}^2 p_{i,j}=\Delta_i^2 p_{i,j-1}-2\Delta_i^2 p_{i,j}+\Delta_i^2 p_{i,j+1}=$

$=\Delta_j^2 p_{i-1,j}-2\Delta_j^2 p_{i,j}+\Delta_j^2 p_{i+1,j}$.

Доведено, що для $\forall p(t,q)\in C^{3,3}$ і $\forall\varepsilon>0$ справедлива нерівність [5]:

$$\left\|p(t,q)-S_{2,1}(p,t,q)\right\|\le\frac{h_t^3}{12\sqrt{3}}\left\|p'''_{t^3}(t,q)\right\|+\frac{h_q^3}{12\sqrt{3}}\left\|p'''_{q^3}(t,q)\right\|+$$

$$+\frac{h_t^3h_q^3}{432}\left\|p^{(5)}_{t^3q^3}(t,q)\right\|+\varepsilon\frac{16}{9}\left\|p(t,q)\right\|+o\left(h^6\right),$$

де

$h=\max\{h_t,h_q\}$.

Нехай задано

$P=\{p_{i,j,\kappa}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$, $\kappa=1,2,\ldots$

– послідовність відліків гладкої функції $p(t,q)$, визначених на регулярній, рівномірній сітці вузлів. Під κ будемо розуміти крок ітерації небінарного масштабування (проектування) послідовності P. Подамо приклади використання виразів (2), (5) для забезпечення небінарного масштабування P. Не зменшуючи загальності, якщо $\{p_{i,j,\kappa-1}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ – початкова послідовність, а $\{p_{i,j,\kappa}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ – утворена шляхом "проектування", наприклад, 25 точок в 16, тоді маємо таке визначення для $p_{i,j,\kappa}$.

Нехай індекси i та j визначаються за правилом: $i=4l_i$, $j=4l_j$, $l_i,l_j\in\mathbb{Z}$.

Тоді побудова лінійних операторів, що забезпечують процес небінарного масштабування, зводиться до отримання для $\forall l_i,l_j$ подання наведених сплайнів $S_{4,0}(p,t,q)$, $S_{2,1}(p,t,q)$ (або аналогічних сплайнів [5]) з аргументами у вигляді виразу (3) в точках із множини:

$(x;y):\{(0,25;0,25)$, $(0,25;0,75)$, $(0,25;-0,75)$, $(0,25;-0,25)$, $(0,75;0,25)$, $(0,75;0,75)$, $(0,75;-0,75)$, $(0,75;-0,25)$, $(-0,75;0,25)$, $(-0,75;0,75)$, $(-0,75;-0,75)$, $(-0,75;-0,25)$, $(-0,25;0,25)$, $(-0,25;0,75)$, $(-0,25;-0,75)$, $(-0,25;-0,25)\}$.

Наприклад, у точках $(x=0,25;y=0,25)$ та $(x=0,75;y=-0,75)$ відповідно неважко отримати такі функціонали, як часткові випадки сплайнів $S_{2,1}(p,t,q)$, $S_{4,0}(p,t,q)$:

$$p_{i,j,k}=\sum_{ii=i+l_i-2}^{i+l_i+2}\sum_{jj=j+l_j-2}^{j+l_j+2}\gamma_{aa,ii-(i+l_i),jj-(j+l_j)}^{(S_{21,(25\to16)})}p_{ii,jj,\kappa-1},$$

$$p_{i,j,k}=\sum_{ii=i+l_i-2}^{i+l_i+2}\sum_{jj=j+l_j-2}^{j+l_j+2}\gamma_{aa,ii-(i+l_i),jj-(j+l_j)}^{(S_{40,(25\to16)})}p_{ii,jj,\kappa-1},$$

$$p_{i+1,j+2,k}=\sum_{ii=i+l_i-1}^{i+l_i+3}\sum_{jj=j+l_j+1}^{j+l_j+5}\gamma_{bc,ii-(i+l_i+1),jj-(j+l_j+3)}^{(S_{21,(25\to16)})}p_{ii,jj,\kappa-1},$$

$$p_{i+1,j+2,k}=\sum_{ii=i+l_i-1}^{i+l_i+3}\sum_{jj=j+l_j+1}^{j+l_j+5}\gamma_{bc,ii-(i+l_i+1),jj-(j+l_j+3)}^{(S_{40,(25\to16)})}p_{ii,jj,\kappa-1},$$

де

$$\gamma_{aa}^{(S_{21,(25\to16)})}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0{,}00014 & 0{,}00034 & -0{,}01096 & -0{,}00162 & 0{,}00038\\ 0{,}00034 & 0{,}00082 & -0{,}02678 & -0{,}00395 & 0{,}00093\\ -0{,}01096 & -0{,}02678 & 0{,}87403 & 0{,}12904 & -0{,}03043\\ -0{,}00162 & -0{,}00395 & 0{,}12904 & 0{,}01905 & -0{,}00449\\ 0{,}00038 & 0{,}00093 & -0{,}03043 & -0{,}00449 & 0{,}00106 \end{pmatrix};$$

$$\gamma_{aa}^{(S_{40,(25\to16)})}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0{,}000001 & 0{,}00016 & 0{,}00049 & 0{,}00018 & 0{,}00001\\ 0{,}00016 & 0{,}03526 & 0{,}11065 & 0{,}04052 & 0{,}00119\\ 0{,}00049 & 0{,}11065 & 0{,}34722 & 0{,}12715 & 0{,}00375\\ 0{,}00018 & 0{,}04052 & 0{,}12715 & 0{,}04656 & 0{,}00137\\ 0{,}00001 & 0{,}00119 & 0{,}00375 & 0{,}00137 & 0{,}00004 \end{pmatrix};$$

$$\gamma_{bc}^{(S_{21,(25\to16)})}=$$

$$=\begin{pmatrix} 0{,}00008 & -0{,}00053 & -0{,}00097 & 0{,}00012 & 0{,}02E\text{-}5\\ 0{,}00581 & -0{,}03727 & -0{,}06812 & 0{,}00831 & 0{,}00012\\ -0{,}04769 & 0{,}30558 & 0{,}55860 & -0{,}06812 & -0{,}00097\\ -0{,}02609 & 0{,}16716 & 0{,}30558 & -0{,}03727 & -0{,}00053\\ 0{,}00407 & -0{,}02609 & -0{,}04769 & 0{,}00582 & 0{,}00008 \end{pmatrix};$$

$$\gamma_{bc}^{\left(S_{40,(25\to16)}\right)} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2{,}5E\text{-}7 & 4E\text{-}6 & 5{,}25E\text{-}6 & 6{,}8E\text{-}7 & 1{,}03E\text{-}10 \\ 0{,}00163 & 0{,}02620 & 0{,}03441 & 0{,}00445 & 6{,}8E\text{-}7 \\ 0{,}0126 & 0{,}20272 & 0{,}03441 & 0{,}03441 & 5{,}25E\text{-}6 \\ 0{,}0096 & 0{,}15434 & 0{,}20272 & 0{,}0262 & 4E\text{-}6 \\ 0{,}0006 & 0{,}0096 & 0{,}0126 & 0{,}00163 & 2{,}5E\text{-}7 \end{pmatrix}.$$

Якщо маємо відповідність послідовності $\left\{p_{i,j,\kappa-1}\right\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ – вузлові точки $\left\{t_{i,j,\kappa-1}\right\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$, причому $t_{i,j,\kappa-1} = \left((i+0{,}5)h_t;(j+0{,}5)h_q\right)$, $i,j\in\mathbb{Z}$, $h_t,h_q>0$, то тоді відповідна для $\left\{p_{i,j,\kappa}\right\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ послідовність вузлів $\left\{t_{i,j,\kappa}\right\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ визначається так:

$$t_{i,j,\kappa} = \left(\frac{5}{4}(i+0{,}5)h_t;\frac{5}{4}(j+0{,}5)h_q\right),\ i,j\in\mathbb{Z}.$$

Якщо $i=4l_i$, $j=4l_j$, $l_i,l_j\in\mathbb{Z}$, то для $\forall l_i,l_j$ маємо:

$$t_{i+ii,j+jj,\kappa}:\left(\frac{5}{4}(i+0{,}5+ii)h_t;\frac{5}{4}(j+0{,}5+jj)h_q\right),$$
$$ii,jj=\overline{0,3}.$$

Наведемо інший приклад. Нехай $\left\{p_{i,j,\kappa-1}\right\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ – початкова послідовність, а $\left\{p_{i,j,\kappa}\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ – утворена шляхом “проектування” 16 точок в 25. Тоді маємо таке визначення для $p_{i,j,\kappa}$.

Нехай індекси i та j визначаються за правилом: $i=5l_i$, $j=5l_j$, $l_i,l_j\in\mathbb{Z}$.

Тоді для $\forall l_i,l_j$, значення двовимірних сплайнів (2), (5) відповідно у точках:

$(x;y):\{(-0{,}2;-0{,}2)$, $(-0{,}2;-0{,}6)$, $(-0{,}2;1)$, $(-0{,}2;0{,}6)$, $(-0{,}2;0{,}2)$, $(-0{,}6;-0{,}2)$, $(-0{,}6;-0{,}6)$, $(-0{,}6;1)$, $(-0{,}6;0{,}6)$, $(-0{,}6;0{,}2)$, $(1;-0{,}2)$, $(1;-0{,}6)$, $(1;1)$, $(1;0{,}6)$, $(1;0{,}2)$, $(0{,}6;-0{,}2)$, $(0{,}6;-0{,}6)$, $(0{,}6;1)$, $(0{,}6;0{,}6)$, $(0{,}6;0{,}2)$, $(0{,}2;-0{,}2)$, $(0{,}2;-0{,}6)$, $(0{,}2;1)$, $(0{,}2;0{,}6)$, $(0{,}2;0{,}2)$ забезпечать побудову операторів зазначеного небінарного масштабування. Наприклад, у точках $(x=-0{,}2;y=1)$, $(x=1;y=-0{,}6)$ відповідно можна отримати такі функціонали, як часткові випадки сплайнів $S_{2,1}(p,t,q)$, $S_{4,0}(p,t,q)$:

$$p_{i,j+2,\kappa} = \sum_{ii=i-l_i-2}^{i-l_i+2}\ \sum_{jj=j-l_j-1}^{j-l_j+3} \gamma_{AC,ii-(i-l_i),jj-(j-l_j+1)}^{\left(S_{21,(16\to25)}\right)} p_{ii,jj,\kappa-1},$$

$$p_{i,j+2,\kappa} = \sum_{ii=i-l_i-2}^{i-l_i+2}\ \sum_{jj=j-l_j-1}^{j-l_j+3} \gamma_{AC,ii-(i-l_i),jj-(j-l_j+1)}^{\left(S_{40,(16\to25)}\right)} p_{ii,jj,\kappa-1},$$

$$p_{i+2,j+1,\kappa} = \sum_{ii=i-l_i-1}^{i-l_i+3}\ \sum_{jj=j-l_j-1}^{j-l_j+3} \gamma_{CB,ii-(i-l_i+1),jj-(j-l_j+1)}^{\left(S_{21,(16\to25)}\right)} p_{ii,jj,\kappa-1},$$

$$p_{i+2,j+1,\kappa} = \sum_{ii=i-l_i-1}^{i-l_i+3}\ \sum_{jj=j-l_j-1}^{j-l_j+3} \gamma_{CB,ii-(i-l_i+1),jj-(j-l_j+1)}^{\left(S_{40,(16\to25)}\right)} p_{ii,jj,\kappa-1},$$

де

$$\gamma_{AC}^{\left(S_{21,(16\to25)}\right)} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0{,}00250 & -0{,}01750 & -0{,}01750 & 0{,}00250 \\ 0 & -0{,}00972 & 0{,}06806 & 0{,}06806 & -0{,}00972 \\ 0 & -0{,}07861 & 0{,}55028 & 0{,}55028 & -0{,}07861 \\ 0 & 0{,}00139 & -0{,}00972 & -0{,}00972 & 0{,}00139 \\ 0 & 0{,}00111 & -0{,}00778 & -0{,}00778 & 0{,}00111 \end{pmatrix};$$

$$\gamma_{AC}^{\left(S_{40,(16\to25)}\right)} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0{,}00023 & 0{,}00248 & 0{,}00248 & 0{,}00023 \\ 0 & 0{,}01025 & 0{,}11278 & 0{,}11278 & 0{,}01025 \\ 0 & 0{,}0247 & 0{,}27167 & 0{,}27167 & 0{,}0247 \\ 0 & 0{,}00645 & 0{,}07092 & 0{,}07092 & 0{,}00645 \\ 0 & 0{,}0000(4) & 0{,}00049 & 0{,}00049 & 0{,}0000(4) \end{pmatrix};$$

$$\gamma_{CB}^{\left(S_{21,(16\to25)}\right)} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}00444 & -0{,}02639 & -0{,}06861 & 0{,}00694 & 0{,}00028 \\ -0{,}03111 & 0{,}18472 & 0{,}48028 & -0{,}04861 & -0{,}00194 \\ -0{,}03111 & 0{,}18472 & 0{,}48028 & -0{,}04861 & -0{,}00194 \\ 0{,}00444 & -0{,}02639 & -0{,}06861 & 0{,}00694 & 0{,}00028 \end{pmatrix};$$

$$\gamma_{CB}^{\left(S_{40,(16\to25)}\right)} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}00071 & 0{,}01467 & 0{,}0227 & 0{,}00359 & 0{,}00001 \\ 0{,}00782 & 0{,}16136 & 0{,}24967 & 0{,}03945 & 0{,}00003 \\ 0{,}00782 & 0{,}16136 & 0{,}24967 & 0{,}03945 & 0{,}00003 \\ 0{,}00071 & 0{,}01467 & 0{,}0227 & 0{,}00359 & 0{,}00001 \end{pmatrix}.$$

Якщо маємо відповідність послідовності $\{p_{i,j,\kappa-1}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ – вузлові точки $\{t_{i,j,\kappa-1}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$, причому $t_{i,j,\kappa-1} = \left((i+0{,}5)h_t;(j+0{,}5)h_q\right)$, $i,j\in\mathbb{Z}$, $h_t,h_q>0$, то тоді відповідна для $\{p_{i,j,\kappa}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ послідовність вузлів $\{t_{i,j,\kappa}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ визначається так:

$$t_{i,j,\kappa} = \left(\frac{4}{5}(i+0{,}5)h_t;\frac{4}{5}(j+0{,}5)h_q\right),\ i,j\in\mathbb{Z}.$$

Якщо $i=5l_i$, $j=5l_j$, $l_i,l_j\in Z$, то для $\forall l_i,l_j$ маємо:

$$t_{i+ii,j+jj,\kappa} : \left(\frac{4}{5}(i+0{,}5+ii)h_t;\frac{4}{5}(j+0{,}5+jj)h_q\right),$$

$$ii,jj=\overline{0,4}.$$

Висновки

Отримані в роботі лінійні оператори небінарного масштабування послідовностей відліків гладких функцій двох змінних дозволяють здійснювати вказану операцію як з вимогою згладжування (за використанням результатів, отриманих зі сплайну $S_{4,0}(p,t,q)$), так і асимптотично точно (використання сплайну $S_{2,1}(p,t,q)$). Обчислювальні процедури на основі запропонованих операторів при реалізації їх у програмному забезпеченні задовольняють вимогу обробки даних у режимі реального часу. Останнє є можливим через обмежену кількість простіших арифметичних операцій поданих функціоналів за умови відповідного розкриття та групування коефіцієнтів.

Подальші дослідження мають ураховувати можливість модифікацій поданих лінійних функціоналів при інших типах небінарного масштабування, а також поширення подібного підходу в разі обробки послідовностей відліків функцій трьох та більшої кількості змінних.

Література

1. *Де Бор К.* Практическое руководство по сплайнам / Де Бор К. – М.: Радио и связь, 1985. – 303 с.

2. *Роджерс Д.* Математические основы машинной графики / Д. Роджерс, Дж. Адамс: пер. с англ. – М.: Мир, 2001. – 604 с.

3. *Чуи Ч.* Введение в вэйвлеты / Ч. Чуи: пер. с англ. – М.: Мир, 2001. – 412 с.

4. *Лигун А.А.* Асимптотические методы восстановления кривих / А. А. Лигун, А. А. Шумейко. – К.: ІМ НАН України, 1996. – 358 с.

5. *Приставка П.О.* Поліномаільні сплайни при обробці даних / П.О.Приставка. – Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. – 236 с.

6. *Приставка П.О.* Небінарне поповнення послідовностей відліків гладких функцій лінійними операторами на основі поліноміальних сплайнів / П.О. Приставка // Вісник НАУ. – 2008. – №3. – С. 85–89.

Стаття надійшла до редакції 10.12.09.