ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

УДК 519.61(045)

В.П. Денисюк, д.ф.-м.н., проф.
Г.М. Терещук, асп.

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ СПЛАЙНИ В ЗАДАЧАХ ПОБУДОВИ НАБЛИЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ПЕРШОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Розглянуто методику застосування тригонометричних сплайнів для задач побудови наближених розв'язків першої крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами. Невизначені параметри знайдено методом колокацій.

The method of application of trigonometric splines is considered for the problems of construction of the approximate solution of the first boundary value problem for ordinary differential equations of the second orders with variable coefficients. By the method of collocations indefinite coefficients are determined.

метод колокації, сітка, скінченнорізницевий метод, різницева схема, тригонометричний сплайн

Постановка проблеми

Для кількісного описання фізичного явища інженери та фізики, як правило, використовують математичні моделі цього явища. Такі моделі часто складаються із систем звичайних диференціальних рівнянь чи рівнянь з частинними похідними, на які накладають певні крайові та початкові умови. Для практичного використання знаходять розв'язки цих систем, які задовольняють ці умови. Проте тут виникають певні труднощі, оскільки точному розв'язанню підлягає лише невеликий клас диференціальних рівнянь. Тому виникає необхідність знаходити наближені розв'язки поставлених задач. Методи, що дозволяють знаходити наближені розв'язки, умовно можна поділити на дві групи [1].

При застосуванні методів першої групи наближені розв'язки шукають у вигляді аналітичного виразу, в який входять невідомі параметри. Ці методи називаються аналітичними. До аналітичних методів слід віднести методи, засновані на апроксимації розв'язку, зокрема, методи малого параметра, методи Рітца, методи Гальоркіна тощо.

Методи другої групи дозволяють знаходити наближені значення шуканого розв'язку в певних точках і називаються числовими методами. До числових методів належать методи Рунге-Кути, ітераційні та різницеві методи тощо [2].

Серед різноманітних аналітичних методів є методи, при яких шуканий розв'язок визначають у вигляді поліноміальних сплайнів [3]. Перевагами поліноміальних сплайнів над іншими класами функцій є:

− можливість узгодження диференціальних властивостей точного та наближеного розв'язків;

− екстремальні властивості сплайнів, які полягають у високій швидкості збіжності сплайнів.

Проте поліноміальні сплайни мають ряд недоліків, одним з яких є те, що вони – складові функції.

Останнім часом було запропоновано клас тригонометричних сплайнів [4], структура яких є більш зручною для використання їх у задачах побудови наближених частинних розв'язків лінійних диференціальних рівнянь.

Розв'язок першої крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами визначають у вигляді лінійної комбінації парних тригонометричних фундаментальних сплайнів на рівномірній сітці. Невизначені параметри знаходять методом колокацій.

Наближений розв'язок порівнюємо із розв'язком, який отримано часто використовуваним скінченнорізницевим методом.

Мета роботи – розглянути лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами

$$u'' + p(t)u' + q(t)u = f(t) \qquad (1)$$

та крайовими умовами

$$u(0) = \alpha,$$
$$u(\pi) = \beta. \qquad (2)$$

Розв'яжемо рівняння (1), використовуючи скінченнорізницевий метод і метод, за яким розв'язок апроксимується тригонометричними сплайнами, та порівняємо результати.

Скінченнорізницевий метод

Задамо на проміжку [0,π] сітку $\{x_j\}_{j=0}^{N}$,

де $x_j = jh$, $h = \dfrac{\pi}{N}$, $N \ge 2$ – натуральне;

h – крок сітки.

Значення сіткової функції у вузлах сітки будемо позначати так:

$y_j = y(x_j)$.

Розглянемо диференціальний оператор

$$Lu = u'' + p(x)u' + q(x)u, \tag{3}$$

який задає ліву частину рівняння (1), та введемо єдиний граничний оператор

$$lu = \begin{cases} l_0 u, & x = 0, \\ l_1 u, & x = \pi, \end{cases} \tag{4}$$

де згідно з крайовими умовами (2)

$l_0 u = u(0),$

$l_1 u = u(\pi)$.

За допомогою операторів (3), (4) крайову задачу (1), (2) можна записати у такому вигляді:

$Lu = f$,

$$lu = \begin{cases} \alpha, & x = 0, \\ \beta, & x = \pi. \end{cases}$$

Апроксимуємо диференціальний оператор Lu різницевим оператором

$$(L^h u)_j = \frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{h^2} + p_j \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} + $$
$$+ q_j u_j, \; j = 1, \quad 2, \ldots, \quad N-1, \tag{5}$$

а оператор lu різницевим оператором

$$(l^h y)_j = y_j, \; j = 0, N. \tag{6}$$

Отримали різницеву крайову задачу

$L^h y = f$,

$$l^h y = \begin{cases} \alpha, \\ \beta, \end{cases}$$

яку називають різницевою схемою для диференціальної крайової задачі (1), (2).

З урахуванням виразів (5), (6) різницеву схему можна записати в більш детальному вигляді

$$\frac{y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1}}{h^2} + p_j \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} +$$
$$+ q_j y_j = f_j,$$
$$j = 1, \quad 2, \ldots, \quad N-1, \tag{7}$$
$$y_0 = \alpha, \quad y_1 = \beta.$$

$$\left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_j}{2h}\right) y_{j-1} - \left(\frac{2}{h^2} - q_j\right) y_j +$$
$$+ \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_j}{2h}\right) y_{j+1} = f_j.$$

Позначимо

$A_j = \dfrac{1}{h^2} - \dfrac{p_j}{2h}$,

$B_j = \dfrac{1}{h^2} + \dfrac{p_j}{2h}$,

$C_j = \dfrac{2}{h^2} - q_j$,

$F_j = f_j$.

Тоді вираз (7) можна переписати у вигляді

$A_j y_{j-1} - C_j y_j + B_j y_{j+1} = F_j$,

$j = 1, \quad 2, \ldots, \quad N-1,$

$y_0 = \alpha, \quad y_1 = \beta.$

Отриману систему лінійних алгебричних рівнянь можна розв'язати методом прогонки.

Знаходження наближеного розв'язку у вигляді тригонометричних сплайнів

Рівняння (1), (2) розв'яжемо використовуючи тригонометричні сплайни.

Наближений розв'язок рівнянь (1), (2) шукаємо у вигляді лінійної комбінації лінійно незалежних функцій $S(k,t)$ ($k = \overline{0, N-1}$), кожна з яких має неперервні похідні до другого порядку включно:

$$u = \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k S(k,t),$$

де

γ_k – невідомі коефіцієнти;

$$S(k,t) = \frac{2}{N-1}\left[\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{N-2} \phi(jt)\cos(jx_k) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\phi((N-1)t)\cos((N-1)x_k)\right];$$

$$\phi(j,t) = \frac{\dfrac{\cos(jt)}{j^4}}{\dfrac{1}{j^4} + \sum_{m=1}^{100}\left(\dfrac{1}{(2mN+j)^4} + \dfrac{1}{(2mN-j)^4}\right)} +$$
$$+ \frac{\sum_{m=1}^{100}\left(\dfrac{\cos((2mN+j)t)}{(2mN+j)^4} + \dfrac{\cos((2mN-j)t)}{(2mN-j)^4}\right)}{\dfrac{1}{j^4} + \sum_{m=1}^{100}\left(\dfrac{1}{(2mN+j)^4} + \dfrac{1}{(2mN-j)^4}\right)}.$$

Задовольнимо крайову умову (2)

$$u(0)=\sum_{k=0}^{N+1}\gamma_k S(k,0)=\alpha\,; \tag{8}$$

$$u(\pi)=\sum_{k=0}^{N+1}\gamma_k S(k,\pi)=\beta. \tag{9}$$

Оскільки

$S(k,0)=2$, якщо $k=0$,

та

$S(k,0)=0$, якщо $k\neq 0$,

то рівняння (8) набуде вигляду

$2\gamma_0+0\gamma_1+\ldots+0\gamma_{N+1}=\alpha$,

звідки

$$\gamma_0=\frac{\alpha}{2}.$$

Оскільки

$S(k,\pi)=2$, якщо $k=N-1$,

та

$S(k,\pi)=0$, якщо $k\neq N-1$,

то рівняння (9) набуде вигляду

$$0\gamma_0+0\gamma_1+\ldots++0\gamma_{N-2}+$$

$$+2\gamma_{N-1}+0\gamma_N+0\gamma_{N+1}=\beta,$$

звідки знаходимо

$$\gamma_{N-1}=\frac{\beta}{2}.$$

Тоді

$$u=\frac{\alpha}{2}S(0,t)+\sum_{k=1}^{N-2}\gamma_k S(k,t)+\frac{\beta}{2}S(N-1,t). \tag{10}$$

Знайдемо u' та u''

$$u'=\frac{\alpha}{2}S'(0,t)+\sum_{k=1}^{N-2}\gamma_k S'(k,t)+$$

$$+\frac{\beta}{2}S'(N-1,t)\,; \tag{11}$$

$$u''=\frac{\alpha}{2}S''(0,t)+\sum_{k=1}^{N-2}\gamma_k S''(k,t)+$$

$$+\frac{\beta}{2}S''(N-1,t), \tag{12}$$

де

$$S'(k,t)=\frac{2}{N-1}\left[\sum_{j=1}^{N-2}\phi'(jt)\cos(jx_k)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\phi'((N-1)t)\cos((N-1)x_k)\right];$$

$$S''(k,t)=\frac{2}{N-1}\left[\sum_{j=1}^{N-2}\phi''(jt)\cos(jx_k)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\phi''((N-1)t)\cos((N-1)x_k)\right];$$

$$\phi'(j,t)=\frac{\dfrac{-\sin(jt)}{j^3}}{\dfrac{1}{j^4}+\sum\limits_{m=1}^{100}\left(\dfrac{1}{(2mN+j)^4}+\dfrac{1}{(2mN-j)^4}\right)}-$$

$$-\frac{\sum\limits_{m=1}^{100}\left(\dfrac{\sin((2mN+j)t)}{(2mN+j)^3}+\dfrac{\sin((2mN-j)t)}{(2\cdot m\cdot N-j)^3}\right)}{\dfrac{1}{j^4}+\sum\limits_{m=1}^{100}\left(\dfrac{1}{(2mN+j)^4}+\dfrac{1}{(2mN-j)^4}\right)};$$

$$\phi''(j,t)=\frac{\dfrac{-\cos(j\cdot t)}{j^2}}{\dfrac{1}{j^4}+\sum\limits_{m=1}^{100}\left(\dfrac{1}{(2mN+j)^4}+\dfrac{1}{(2mN-j)^4}\right)}-$$

$$-\frac{\sum\limits_{m=1}^{100}\left(\dfrac{\cos((2mN+j)t)}{(2mN+j)^2}+\dfrac{\cos((2mN-j)t)}{(2mN-j)^2}\right)}{\dfrac{1}{j^4}+\sum\limits_{m=1}^{100}\left(\dfrac{1}{(2mN+j)^4}+\dfrac{1}{(2mN-j)^4}\right)}.$$

Підставимо вирази (10) – (12) у рівняння (1). Отримаємо

$$\sum_{k=0}^{N-1}\gamma_k S''(k,t)+p(t)\sum_{k=0}^{N-1}\gamma_k S'(k,t)+$$

$$+q(t)\sum_{k=0}^{N-1}\gamma_k S(k,t)=f(t);$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}\gamma_k\left[S''(k,t)+p(t)S'(k,t)+q(t)S(k,t)\right]=f(t).$$

Позначимо

$$a(k,t)=S''(k,t)+p(t)S'(k,t)+q(t)S(k,t).$$

Отримаємо рівняння

$$\sum_{k=0}^{N-1}\gamma_k a(k,t)=f(t).$$

Мінімізуємо відхил

$$\varepsilon(t)=\sum_{k=0}^{N-1}\gamma_k a(k,t)-f(t)$$

методом колокацій, тобто відхил

$$\varepsilon(t)=\sum_{k=0}^{N-1}\gamma_k a(k,t)-f(t)$$

у вузлах сітки прирівняємо до нуля. Отримаємо систему рівнянь

$$\sum_{k=0}^{N-1}\gamma_k a(k,x_j)-f(x_j)=0\,,\;\; j=\overline{0,N-1}$$

або

$$\sum_{k=0}^{N-1}\gamma_k a(k,x_j)=f(x_j)\,,\;\; j=\overline{0,N-1}\,. \qquad (13)$$

Розв'язавши систему (13) методом Гауса, знайдемо невідомі коефіцієнти γ_κ. Підставимо їх у вираз (10) та отримаємо розв'язок крайової задачі (1), (2).

Для ілюстрації викладених теоретичних положень наведемо приклад.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$y''+x^2y'-xy=\frac{1}{2}\cos x+\frac{x^2}{2}\sin x-\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\cos x,$$

$$y(0)=0, \qquad (14)$$

$$y(\pi)=1.$$

Розв'язком рівняння (14) є

$$y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos x\,.$$

Порівняємо точний розв'язок рівняння (14) $y(x)$, розв'язок, отриманий скінченнорізницевим методом $w(x)$ та розв'язок, отриманий апроксимацією розв'язку тригонометричними сплайнами $u(x)$ (рис.1).

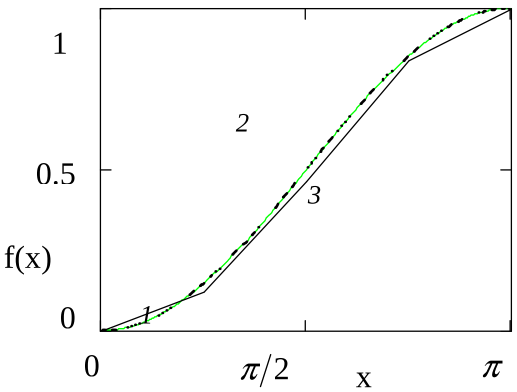

Рис. 1. Порівняння точного та наближених розв'язків:
1 – точний розв'язок;
2 – розв'язок, отриманий апроксимацією розв'язку тригонометричними сплайнами;
3 – розв'язок, отриманий скінченнорізницевим методом

Порівняємо похибки методів (рис. 2).

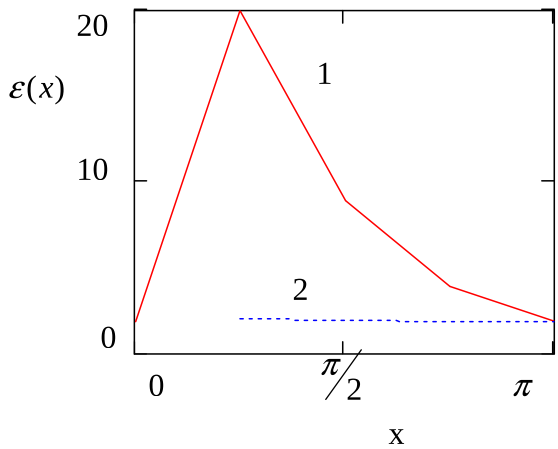

Рис. 2. Порівняння похибок методів:
1 – похибка розв'язку, отриманого скінченнорізницевим методом;
2 – похибка розв'язку, отриманого апроксимацією розв'язку тригонометричними сплайнами

Висновки

Для розглянутої крайової задачі метод, при якому розв'язок апроксимується тригонометричними сплайнами, дає кращий результат ніж скінченнорізницевий метод. Проте збіжність наближених частинних розв'язків лінійних диференціальних рівнянь, побудованих за допомогою апроксимації розв'язку тригонометричними сплайнами, потребує подальшого дослідження.

Література

1. *Березин И.С.* Методы вычислений: в 2 т. / И.С. Березин, Н.П. Жидков. – М.: Физматгиз,1959 – Т. 2. – 1959. – 620 с.
2. *Денисюк В.П.* Сплайни та сигнали / В.П. Денисюк. – К.: ЗАТ «ВІПОЛ», 2007. – 228 с.
3. *Завьялов Ю.С.* Методы сплайн-функций / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
4. *Зенкевич О.* Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган: пер. с англ.– М.: Мир, 1986. – 318 с.

Стаття надійшла до редакції 14.01.09.