

УДК 620.173(045)

Сафар Ахли оглы Гусейнов, проректор (Азербайджан)

НЕЛИНЕЙНАЯ ПРОЧНОСТЬ ДВУХСЛОЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТОВ ПРИ СМЕШАННОЙ НАГРУЗКЕ

Рассмотрена прочность двухслойных неоднородных прямоугольных пластов под воздействием сил, сжимающих по длине оси и равномерно распределенных по ширине.

Розглянуто міцність двошарових неоднорідних прямокутних пластів під впливом сил, що стиснені за довжиною осі та рівномірно розподілені за шириною.

The article deal with stopping issues from the pressure of regularly distributed diametrical forces and pressing on length of axis of two layered anti-gender right angled board. Analyses of accounts shown that taking into account of anti pedigreed affects to the marks of critical parameters 8–10 %.

двухслойные пласты, неоднородные материалы, прочность

Введение

Гипотеза Кирхова-Лява верна для всей толщины пласта, слои которого изготовлены из различных непрерывных неоднородных изотопических материалов.

Для выражения силы и моментов с учетом таблицы равновесия пласта используют систему уравнений нелинейной прочности.

При динамичности закрепления краев пласта применяют метод Бубнова-Галёркина и формулу определения критической силы.

Во многих областях современной техники для обеспечения стойкости и прочности внедряются такие конструкционные элементы, как тонкостенные кабели, пласты, оболочки.

В последнее время вместо целых конструкций началось использование многослойных конструкций. Физико-механические и геометрические характеристики современных пластов можно выбрать так, чтоб сэкономить дорогие материалы, уменьшить вес конструкций и увеличить характеристики его прочности.

Самые распространенные конструкционные элементы – двухслойные пласты и оболочки. Такие конструкции в большинстве случаев изготавливаются из изотопических неоднородных материалов. Учитывая реальные физико-механические свойства этих конструкций, возникает необходимость их исследования на стойкость и прочность [1–5].

Постановка задачи

Рассмотрим проблему прочности пластов при действии сил, сжимающих по длине оси и равномерно распределенных по ширине. Слои пласта изготовлены из различных непрерывных неоднородных материалов.

В системе координат стрелы OX и OH расположены на плоскости разделения пластов, стрела OZ направлена перпендикулярно этой плоскости.

Связь компонентов напряжения и деформации следующая:

– на верхнем пласту ($0 \leq z \leq h_1$)

$$\sigma'_{11} = \lambda'_{11} \epsilon_{11} + \lambda'_{12} \epsilon_{22};$$

$$\sigma'_{22} = \lambda'_{21} \epsilon_{11} + \lambda'_{22} \epsilon_{22};$$

$$\sigma'_{12} = \lambda'_{33} \epsilon_{22};$$

– на нижнем пласту ($-h_2 \leq z \leq 0$)

$$\sigma^2_{11} = \lambda^2_{11} \epsilon_{11} + \lambda^2_{12} \epsilon_{22};$$

$$\sigma^2_{22} = \lambda^2_{21} \epsilon_{11} + \lambda^2_{22} \epsilon_{22};$$

$$\sigma^2_{12} = \lambda^2_{33} \epsilon_{12},$$

где

$$\lambda^k_{ij} = \bar{\lambda}^k_{ij} \alpha^k(z).$$

Признаем достоверность гипотезы Кирхова-Лява для всей толщины пласта:

$$\epsilon_{11} = e_{11} - z\chi_{11};$$

$$\epsilon_{22} = e_{22} - z\chi_{22};$$

$$\epsilon_{12} = 2(e_{12} - z\chi_{12}),$$

где

e_{11} , e_{22} , e_{12} , χ_{11} , χ_{12} , χ_{22} – бесконечные незначительные деформации и искривления средней плоскости пласта.

Силу и моменты рассчитывают по формулам:

$$T_{ij} = \int_{-h_2}^0 \sigma^2_{ij} dz + \int_0^{h_1} \sigma^1_{ij} dz;$$

$$M_{ij} = \int_{-h_2}^0 \sigma^2_{ij} z dz + \int_0^{h_1} \sigma^1_{ij} z dz.$$

Выражения (1)–(3) запишем в формулы (4), считая для силы и моментов:

$$T_{11} = \bar{\lambda}^2_{11} A^0_{11} e_{11} + \bar{\lambda}^2_{12} A^0_{12} e_{22} - \bar{\lambda}^2_{11} A^1_{11} \chi_{11} - \bar{\lambda}^2_{12} A^1_{12} \chi_{22}; \quad (5)$$

$$T_{22} = \bar{\lambda}^2_{21} A^0_{21} e_{11} + \bar{\lambda}^2_{22} A^0_{22} e_{22} - \bar{\lambda}^2_{21} A^1_{21} \chi_{11} - \bar{\lambda}^2_{22} A^1_{22} \chi_{22}; \quad (6)$$

$$T_{12} = \bar{\lambda}^2_{33} A^0_{33} e_{12} + \bar{\lambda}^2_{33} A^1_{33} \chi_{12}; \quad (7)$$

$$M_{11} = \bar{\lambda}^2_{11} A^1_{11} e_{11} + \bar{\lambda}^2_{12} A^1_{12} e_{22} - \bar{\lambda}^2_{11} A^2_{11} \chi_{11} - \bar{\lambda}^2_{12} A^2_{12} \chi_{22}; \quad (8)$$

$$M_{22} = \bar{\lambda}_{21}^2 A_{21}^1 e_{11} + \bar{\lambda}_{22}^2 A_{22}^1 e_{22} - \bar{\lambda}_{21}^2 A_{21}^2 \chi_{11} - \bar{\lambda}_{22}^2 A_{22}^2 \chi_{22}; \quad (9)$$

$$M_{12} = \bar{\lambda}_{33}^2 A_{33}^1 e_{12} + \bar{\lambda}_{33}^2 A_{33}^2 \chi_{12}. \quad (10)$$

В формулах (5)–(10) выполняется условие:

$$A_{ij}^k = \int_{-h/2}^0 \alpha^2(z) z^k dz + \int_0^{h/2} \alpha^1(z) z^k dz \frac{\bar{\lambda}_{ij}^1}{\bar{\lambda}_{ij}^2};$$

$k = 0, 1, 2; ij = 11, 12, 21, 22, 33.$

Учитываем геометрические неоднородные связи между деформацией, компонентами искривления и изменением месторасположения:

$$e_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2;$$

$$e_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2;$$

$$e_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \cdot \frac{\partial W}{\partial y};$$

$$\chi_{12} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2};$$

$$\chi_{22} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2};$$

$$\chi_{12} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}.$$

Система уравнений рассмотренного пласта состоит из следующих выражений:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{12}}{\partial y} = 0; \quad (11)$$

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial y^2} + T_{11} \chi_{11} + q = 0; \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}. \quad (13)$$

Если ввести функции напряжения в уравнение, то система (11) выполняется как тождественное:

$$T_{11} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2};$$

$$T_{22} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad (14)$$

$$T_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}.$$

Для решения уравнений (12), (13) нужно поменять уравнение e_{ij} из выражений (5), (7) с χ_{ij} и χ :

$$e_{11} = \alpha_{11} T_{11} + \alpha_{12} T_{22} + \beta_{11} \chi_{11} + \beta_{12} \chi_{22};$$

$$e_{22} = \alpha_{12} T_{11} + \alpha_{22} T_{22} + \beta_{12} \chi_{11} + \beta_{11} \chi_{22}; \quad (15)$$

$$e_{12} = \alpha_{33} T_{12} + \beta_{33} \chi_{12}.$$

Учитываем уравнения (15) в формулах (8)–(10):

$$M_{11} = \tau_1 T_{11} + \tau_2 T_{22} + \tau_3 \chi_{11} + \tau_4 \chi_{22};$$

$$M_{22} = \tau_2 T_{11} + \tau_1 T_{22} + \tau_4 \chi_{11} + \tau_2 \chi_{22}; \quad (16)$$

$$M_{12} = \tau_5 T_{12} + \tau_6 \chi_{12}.$$

В формулах (16) коэффициенты $\tau_1 \dots \tau_6$ определяются характеристиками общей обусловленности. Выражения (15), (16) запишем в формулы (12), (13).

С учетом формул (14) получим систему нелинейных уравнений:

$$c_2 \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} \right) + 2(c_1 - c_5) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + c_3 \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) + 2(c_4 + c_6) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + q = 0; \quad (17)$$

$$\alpha_{11} \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} \right) + 2(\alpha_{12} + \alpha_{33}) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} +$$

$$+ \beta_{12} \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) + 2(\beta_{11} - \beta_{33}) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}. \quad (18)$$

Методы решения

Предположим пласт в виде квадрата. При динамичности закрепления краев пласта, учитывая образование полуволны в каждом случае, можем рассмотреть искривление так:

$$W = f \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}. \quad (19)$$

Частное решение уравнения (18) находится так:

$$\Phi_1 = A \cos \frac{2\pi x}{a} + B \cos \frac{2\pi y}{a} + C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}. \quad (20)$$

Записывая уравнение (20) вместо формулы (18), после некоторых вычислений получаем:

$$A = B = \frac{f^2}{32\alpha_{11}};$$

$$C = -f \frac{\beta_{11} + \beta_{12} - \beta_{33}}{\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{33}} = \gamma_0 f.$$

В рассмотренном случае однородное решение уравнения (18) следующее:

$$\Phi_2 = -\frac{Py^2}{2}.$$

В этом случае общее решение уравнения (18) имеет вид:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = A \cos \frac{2\pi x}{a} + B \cos \frac{2\pi y}{a} + C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} - \frac{py^2}{2}. \quad (21)$$

Учитывая выражения (19) и (21), уравнение (17), решаем методом Бубнова-Галёркина:

$$\int_0^a \int_0^a L \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} dx dy = 0,$$

где L указывает на левую сторону уравнения.

После некоторых математических расчетов получаем следующее уравнение

$$2(c_3 + c_4 + c_6) f \frac{\pi^4}{4a^2} + c_2 \frac{\pi^4}{a^2} \left(\frac{c}{2} - 16 \frac{8}{3} \frac{A}{\pi^2} \right) + \frac{C}{2} (c_1 - c_5) \frac{\pi^4}{a^2} - Bf \frac{\pi^4}{2a^2} - Af \frac{\pi^4}{2a^2} + \frac{24}{9} cf \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{4} fp + \frac{4}{\pi^2} q = 0. \quad (22)$$

Как видно, в двухслойных неоднородных прямоугольных пластах при влиянии односторонней сжимающей силы равномерное давление по всей длине q обеспечивает равномерность между силами и искривлением.

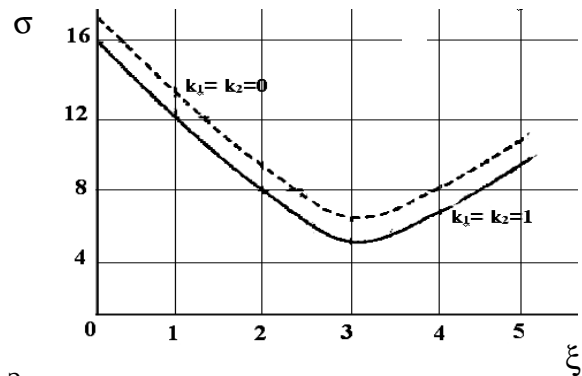
Выводы

Для введения числовых анализов нужно указать на неоднородные функции, характеризующие материал, учитывая выражения для этих функций:

$$\alpha^1(z) = E_{01} \left(1 + \frac{k_1 z}{h_1} \right); \quad (23)$$

$$\alpha^2(z) = E_{02} \left(1 + \frac{k_2 z}{h_2} \right).$$

С помощью формулы (23) вычисляются характеристики общей твердости и после последовательных математических расчетов по формуле (22) определяют зависимость между параметром $\sigma \sim \xi$ напряженности и параметром искривления. Результаты расчетов показаны на рисунке.



Зависимость нагрузки от пролета

Анализ вычислений показывает, что учет неоднородности влияет на сумму критических параметров на 8–10 %. В рассмотренном случае сумма уменьшается.

Литература

1. Вальмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек / А.С. Вальмар. – М.: Наука, 1972.
2. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел / В.А. Ломакин. – М.: МГУ, 1976.
3. Алфутов Н.А. Расчеты многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов / Н.А. Алфутов, П.А. Зиновьев, Б.Г. Попов. – М.: Машиностроение, 1984.
4. Satcesh Buckling of Laminated Composite Rectumgular plates / К.К. Shulka, Y. Nathh, E. Kreuzer, K.V. Kumar // Journal of Aerospace engineering. – 2005. – Vol. 18, № 4. – P. 215–222.
5. Исаев Ф.К. О динамике двухслойных неоднородных пластов с учетом геометрической нелинейности / Ф.К. Исаев, С.А. Гусейнов // Теоретическая и практическая механика. – 2006. – № 4. – С. 9–14.

Стаття надійшла до редакції 28.03.09.