ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

УДК 519.652:519.254 (45)

О.Г. Чолишкіна, асп.

ЗАСТОСУВАННЯ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ СПЛАЙНІВ НА ОСНОВІ *B*-СПЛАЙНІВ П'ЯТОГО ПОРЯДКУ ПІД ЧАС ПОБУДОВИ ФІЛЬТРІВ

Отримано контрастні, низькочастотні та високочастотні фільтри з використанням локальних поліноміальних сплайнів на основі B-сплайнів п'ятого порядку, близьких до інтерполяційних у середньому, однієї та двох змінних.

This article is the solution of practical research of the polynomial splines of one and two variable based on the B-splines of fifth order that, on average, are related to the interpolar. These splines allow us to get simple calculating schemes which are convenient for the practical application for subband-filtering scheme, contrast filtering, low-pass filtering, ets.

Постановка проблеми

Сучасний рівень оброблення цифрованих сигналів (зокрема зображень) ставить за мету вирішити загальну проблему забезпечення швидкодії опрацювання цифрованих послідовностей з одночасним виконанням цільової функції метода, що таке оброблення реалізує.

Вимоги щодо підвищення швидкодії актуальні у контексті постійно зростаючої потреби під час переробки все більшого обсягу даних. При цьому пріоритетним є забезпечення оброблення в режимі реального часу. Окрім суто апаратних рішень, дослідження зосереджено і на математичних методах та обчислювальних процедурах.

Натепер у вирішенні завдання субполосної фільтрації найвищу швидкодію демонструють різного роду лінійні оператори як явне розкриття дискретної згортки дискретного (цифрованого) сигналу та послідовності ваг або (що майже тотожньо) як часткові випадки апроксимацій з використанням фінітних функцій. Характерною рисою таких операторів є їх локальність, що й дає можливість описати локальні особливості сигналу.

Повертаючись до завдання оброблення цифрованих зображень зазначимо, що актуальним є отримання нових лінійних фільтрів з більшою шириною «вікна» та їх обґрунтування до застосування. Наприклад, у найближчій перспективі розрішення цифрованого знімка має стійку тенденцію наближення до розділення аналогового. Саме зростання інформативності локальних дільниць знімка за рахунок збільшення розділення і вимагає збільшення ширини локального носія для використання у згортці.

Аналіз досліджень та постановка завдання

Не відкидаючи можливостей застосування методів оброблення цифрованих сигналів, викладених в інших публікаціях, пропонується розглянути питання про використання операторів, отриманих із залученням часткових випадків локальних поліноміальних сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому на основі *B*-сплайнів п'ятого порядку. Аргументацією до подібного підходу є викладені міркування [1].

Технологія збереження (або передачі) цифрованого зображення припускає, що кожний елемент p двовимірної послідовності можна подати у вигляді такої суми:

$$p = \overline{p} + \varepsilon,$$

де $\overline{p}$ – усереднене значення;

ε – похибка.

Стосовно доречності $\overline{p}$ зазначимо: розрішення кадру по суті є визначальним у питанні скільки інформації можна зосередити на одиниці площі матриці фіксації. Отже, йдеться про інтегральну характеристику, дискретним аналогом якої є саме величина $\overline{p}$.

Існує достатньо вичерпно досліджений математичний апарат оброблення зазначених даних, що відповідає вимозі швидкодії відповідних обчислювальних процедур. Це різноманітні типи локальних сплайнів [2; 3], близьких до інтерполяційних у середньому. У роботах [4–8] подано приклади використання часткових випадків сплайн-операторів однієї та двох змінних у задачах субполосної фільтрації, контрастування та масштабування одно- та двовимірних послідовностей, які можуть бути узагальнені на випадок, коли ширину локального носія збільшено.

Нехай з кроком $h>0$ задано розбиття дійсної осі $\Delta_h : t_i = ih$, $i \in Z$, у кожній точці якого отримано значення деякої неперервної функції $p(t) \in C^r$, $r \ge 2$, визначеної на $R_1(-\infty;\infty)$. Вважають, що інформація про функцію $p(t)$, яка підлягає відтворенню, задана у вузлах розбиття Δ_h у вигляді інтеграла $\bar{p}_i = \frac{1}{h} \int\limits_{(i-0,5)h}^{(i+0,5)h} p(t)\,dt$.

При цьому істинне значення функції $p(t)$ у вузлах визначається так:

$$p_i = \bar{p}_i + \varepsilon_i,\ i \in Z, \qquad (1)$$

де ε_i – похибка.

Для апроксимації функції $p(t)$ за значеннями типу (1) у вузлах розбиття Δ_h, вводиться поліноміальний сплайн на основі *B*-сплайна п'ятого порядку, що є близьким до інтерполяційного у середньому [9]:

$$S_{5,0}(p,t) = \sum_{i \in Z} p_i B_{5,h}(t-ih),$$

де *B*-сплайн $B_{5,h}(t)$ визначається, як у роботі [9].

Подання сплайна у вигляді лінійної комбінації *B*-сплайнів не зовсім зручне для реалізації в обчислювальному середовищі. Для зменшення обчислювальної складності є можливість подати сплайн у явному вигляді. Наприклад, якщо ввести заміну

$$x = 2\left(t-(i+0,5)h\right)/h,\ |x| \le 1,$$

то, сплайн $S_{5,0}(p,t)$ має вигляд

$$\begin{aligned} S_{5,0} = {} & \frac{1}{3840}(-p_{i-2}+5p_{i-1}-10p_i+10p_{i+1}-5p_{i+2}+p_{i+3})x^5 + \\ & +\frac{1}{768}(p_{i-2}-3p_{i-1}+2p_i+2p_{i+1}-3p_{i+2}+p_{i+3})x^4 + \\ & +\frac{1}{384}(-p_{i-2}-3p_{i-1}+14p_i-14p_{i+1}+3p_{i+2}+p_{i+3})x^3 + \\ & +\frac{1}{384}(p_{i-2}+21p_{i-1}-22p_i-22p_{i+1}+21p_{i+2}+p_{i+3})x^2 + \qquad (2) \\ & +\frac{1}{768}(-p_{i-2}-75p_{i-1}-154p_i+154p_{i+1}+75p_{i+2}+p_{i+3})x + \\ & +\frac{1}{3840}(p_{i-2}+237p_{i-1}+1682p_i+1682p_{i+1}+237p_{i+2}+p_{i+3}). \end{aligned}$$

Якщо

$$\|S_{5,0}(p,t)\| = \sup_{|\varepsilon_i|} \max_t |S_{5,0}(\varepsilon,t)|$$

– норма сплайн-оператора $S_{5,0}(p,t)$, то справедливе твердження

$$\|S_{5,0}(p,t)\| = \|p(t)\|.$$

Значення $\|S_{5,0}(p,t)\|$ характеризує у скільки разів може зрости похибка під час відтворення функції за допомогою сплайна, якщо значення p_i задані з похибкою. Отже, норма сплайн-оператора характеризує стійкість відтворення функції $p(t)$.

Про похибку відтворення функції $p(t)$ з використанням сплайна $S_{5,0}(p,t)$ свідчить таке твердження:

$$\|p(t)-S_{5,0}(p,t)\| = \frac{7}{24}h^2\|p''(t)\| + \varepsilon\|p(t)\| + o(h^2).$$

Двовимірний сплайн, близький до інтерполяційного у середньому, визначається так [1]. Зафіксуємо два розбиття Δ_{h_t}, Δ_{h_q} осей T і Q точками $t_i = ih_t$, $i \in Z$, $h_t > 0$, $q_j = jh_q$, $j \in Z$, $h_q > 0$, відповідно до яких задане розбиття Δ_{h_t,h_q} дійсної площини R_2. Нехай у вузлах розбиття Δ_{h_t,h_q} задано значення деякої функції $p(t,q) \in C^{r,r}$, $r_1, r_2 \ge 2$: $p_{i,j}$, $i,j \in Z$, причому вважається, що

$$p_{i,j} = \bar{p}_{i,j} + \varepsilon_{i,j},$$

де $\varepsilon_{i,j}$ – деяка похибка;

$$\bar{p}_{i,j} = \frac{1}{h_t h_q} \int\limits_{(i-1)h_t}^{ih_t} \int\limits_{(j-1)h_q}^{jh_q} p(t,q)\,dt\,dq.$$

Тоді двовимірний поліноміальний сплайн п'ятого порядку, близький до інтерполяційного у середньому, можна визначити таким чином:

$$S_{5,0}(p,t,q) = \sum_{i \in Z} \sum_{j \in Z} p_{i,j} B_{5,h_t}(t-ih_t) B_{5,h_q}(q-jh_q).$$

Якщо

$$\|S_{5,0}(p,t,q)\| = \sup_{|\varepsilon_{i,j}|} \max_{t,q} |S_{5,0}(\varepsilon,t,q)|$$

– норма сплайна $S_{5,0}(p,t,q)$, то

$$\|S_{5,0}(p,t,q)\| = \|p(t,q)\|.$$

Крім того, для $\forall p(t,q) \in C^{5,5}$ і $\forall \varepsilon > 0$ справджується

$$\begin{aligned} \|p(t,q)-S_{5,0}(p,t,q)\| \le {} & 7h_t^2\|p''_{t^2}(t,q)\|/24 + \\ & +7h_q^2\|p''_{q^2}(t,q)\|/24 + 49h_t^2h_q^2\|p^{(4)}_{t^2q^2}(t,q)\|/576 + \\ & +\varepsilon\cdot\|p(t,q)\| + o(h^4), \end{aligned}$$

де $h = \max\{h_t, h_q\}$.

Навівши відомі положення про поліноміальні сплайни, близькі до інтерполяційних у середньому, поставимо за мету у подальшому викладі показати можливість отримання одно- та двовимірних фільтрів на підставі алгоритмізації обчислювальних схем сплайнів відповідної розмірності, тим самим поширюючи властивості останніх на шукані або вже відомі процедури.

Виклад основного матеріалу

Приклад (2), розгорнутого подання сплайну дає змогу чітко простежити, що оператор, який розглядається, справді є поліномом.

Отже, для одновимірного сплайна на основі *B*-сплайна п'ятого порядку, близького до інтерполяційного у середньому, справедливе таке подання:

$$S_{5,0}(p,t)=\sum_i p_i\sum_{c=0}^{r}\gamma_{i,c}^{(5,0)}x^c, \tag{3}$$

де

$x=2(t-ih)/h$, $|x|\le 1$;

$$\gamma^{(5,0)}=\frac{1}{3840}\begin{pmatrix}1&-5&10&-10&5&-1\\237&-375&210&-30&-15&5\\1682&-770&-220&140&10&-10\\1682&-770&-220&-140&10&10\\237&-375&210&30&-15&-5\\1&-5&10&10&5&1\end{pmatrix}, \tag{4}$$

для двовимірного –

$$S_{5,0}(p,t,q)=\sum_{i\in Z}\sum_{j\in Z}p_{i,j}\sum_{c_t=0}^{r}\sum_{c_q=0}^{r}\gamma_{i,c_t}^{(5,0)}\gamma_{j,c_q}^{(5,0)}x^{c_t}y^{c_q}, \tag{5}$$

де $x=2(t-ih_t)/h_t$, $|x|\le 1$; $y=2(q-jh_q)/h_q$, $|y|\le 1$; $\gamma_{a,b}^{(5,0)}$ визначаються із виразу (4).

Ураховуючи наведену в аналізі якість апроксимації сплайнами гладких функцій, для знаходження низькочастотних фільтрів нас передусім буде цікавити значення сплайн-операторів у вузлах розбиття Δ_h та Δ_{h_t,h_q}. У цьому разі за $x=1$ подання (3) набуває вигляду

$$S_{5,0}(p,ih)=\frac{1}{120}\begin{pmatrix}1\\26\\66\\26\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}p_{i-2}&p_{i-1}&p_i&p_{i+1}&p_{i+2}\end{pmatrix}=$$

$$=\sum_{j=i-1}^{i+1}\gamma н_{1,j}^{(S_{5,0})}p_j, \tag{6}$$

де

$$\gamma н_1^{(S_{5,0})}=\frac{1}{120}\begin{pmatrix}1\\26\\66\\26\\1\end{pmatrix},$$

а подання (5) надає функціонали:

$$S_{5,0}(p,ih_t,jh_q)=\sum_{i_t=i-2}^{i+2}\sum_{j_q=j-2}^{j+2}\gamma н_{2,i_t,j_q}^{(S_{5,0})}p_{i_t,j_q}, \tag{7}$$

де

$$\gamma н_2^{(S_{5,0})}=\frac{1}{14400}\begin{pmatrix}1&26&66&26&1\\26&676&1716&676&26\\66&1716&4356&1716&66\\26&676&1716&676&26\\1&26&66&26&1\end{pmatrix}.$$

Для отримання швидкодійних обчислювальних схем достатньо розлого подати вирази (6), (7) з найменшою кількістю арифметичних операцій.

Високочастотні фільтри на основі розглянутих сплайнів неважко отримати з рівності

$p_i=pн_i+pв_i$, $i\in Z$,

де $pн_i$, $pв_i$ – низько- та високочастотні складові.

Якщо за $pн_i$ обрати значення сплайнів у вузлах розбиттів Δ_h та Δ_{h_t,h_q},

$$pн_i=S_{5,0}(p,ih)=pн_i^{(S_{5,0})},$$

$$pн_{i,j}=S_{5,0}(p,ih_t,jh_q)=pн_{i,j}^{(S_{5,0})},$$

то тоді отримують такі співвідношення для високочастотних фільтрів:

$pв_i^{(S_{5,0})}=\sum_{j=i-2}^{i+2}\gamma в_{1,j}^{(S_{5,0})}p_j$ в одновимірному випадку,

де

$$\gamma в_1^{(S_{5,0})}=\frac{1}{120}\begin{pmatrix}-1\\-26\\54\\-26\\-1\end{pmatrix}.$$

У двовимірному випадку, враховуючи вираз $pв_{i,j}=p_{i,j}-pн_{i,j}$, $i,j\in Z$, отримуємо:

$$pв_{i,j}^{(S_{r,0})}=\sum_{i_t=i-2}^{i+2}\sum_{j_q=j-2}^{j+2}\gamma в_{2,i_t,j_q}^{(S_{r,0})}p_{i_t,j_q},$$

де

$$\gamma в_2^{(S_{5,0})} = \frac{1}{14400}\begin{pmatrix} -1 & -26 & -66 & -26 & -1 \\ -26 & -676 & -1716 & -676 & -26 \\ -66 & -1716 & 10044 & -1716 & -66 \\ -26 & -676 & -1716 & -676 & -26 \\ -1 & -26 & -66 & -26 & -1 \end{pmatrix}.$$

Покажемо можливість отримання контрастного фільтра.

Отже, коли низькочастотна фільтрація відбувається із застосуванням лінійного фільтра, можливість отримання зворотного перетворення забезпечується розв’язанням елементарної алгебричної задачі.

Нехай після застосування лінійного фільтра на основі сплайна $S_{5,0}(p,t)$ отримано послідовність

$$Pн^{(S_{5,0})} = \left\{ p_i^{(S_{5,0})} \right\}_{i \in Z}.$$

Тоді вирази для довільних індексів $i-2, \ldots i+2$ послідовності P будуть такими:

$$\begin{aligned}
pн_{i-2}^{(S_{5,0})} &= \frac{1}{120}p_{i-4} + \frac{26}{120}p_{i-3} + \frac{66}{120}p_{i-2} + \frac{26}{120}p_{i-1} + \frac{1}{120}p_i, \\
pн_{i-1}^{(S_{5,0})} &= \frac{1}{120}p_{i-3} + \frac{26}{120}p_{i-2} + \frac{66}{120}p_{i-1} + \frac{26}{120}p_i + \frac{1}{120}p_{i+1}, \\
pн_{i}^{(S_{5,0})} &= \frac{1}{120}p_{i-2} + \frac{26}{120}p_{i-1} + \frac{66}{120}p_i + \frac{26}{120}p_{i+1} + \frac{1}{120}p_{i+2}, \quad (8) \\
pн_{i+1}^{(S_{5,0})} &= \frac{1}{120}p_{i-1} + \frac{26}{120}p_i + \frac{66}{120}p_{i+1} + \frac{26}{120}p_{i+2} + \frac{1}{120}p_{i+3}, \\
pн_{i+2}^{(S_{5,0})} &= \frac{1}{120}p_i + \frac{26}{120}p_{i+1} + \frac{66}{120}p_{i+2} + \frac{26}{120}p_{i+3} + \frac{1}{120}p_{i+4}.
\end{aligned}$$

Віднайдемо коефіцієнти *A, B, C, D, E* зворотного перетворення, що забезпечує отримання послідовності $Pк^{(S_{5,0})} = \left\{ pк_i^{(S_{5,0})} \right\}_{i \in Z}$:

$$pк_i^{(S_{5,0})} = A \cdot pн_{i-2}^{(S_{5,0})} + B \cdot pн_{i-1}^{(S_{5,0})} + C \cdot pн_i^{(S_{5,0})} + $$
$$+ D \cdot pн_i^{(S_{5,0})} + E \cdot pн_i^{(S_{5,0})}, \; i \in Z, \quad (9)$$

так, щоб по можливості

$$pк_i^{(S_{5,0})} = p_i, \; i \in Z.$$

Підставляючи вирази (8) в рівняння (9), отримаємо:

$$p_i = \frac{A}{120}p_{i-4} + \frac{26A+B}{120}p_{i-3} + \frac{66A+26B+C}{120}p_{i-2} +$$
$$+ \frac{26A+66B+26C+D}{120}p_{i-1} + \frac{A+26B+66C+26D+E}{120}p_i +$$
$$+ \frac{B+26C+66D+26E}{120}p_{i+1} + \frac{C+26D+66E}{120}p_{i+2} +$$
$$+ \frac{D+26E}{120}p_{i+3} + \frac{E}{120}p_{i+4}.$$

Припускаючи однозначність зворотної операції, отримаємо таку систему лінійних алгебричних рівнянь:

$$\begin{cases}
A/120 = 0, \\
26A + B/120 = 0, \\
66A + 26B + C/120 = 0, \\
26A + 66B + 26C + D/120 = 0, \\
A + 26B + 66C + 26D + E/120 = 1, \\
B + 26C + 66D + 26E/120 = 0, \\
C + 26D + 66E/120 = 0, \\
D + 26E/120 = 0, \\
E/120 = 0.
\end{cases}$$

Ця система несумісна, на відміну від такої:

$$\begin{cases}
66A + 26B + C = 0, \\
26A + 66B + 26C + D = 0, \\
A + 26B + 66C + 26D + E = 120, \\
B + 26C + 66D + 26E = 0, \\
C + 26D + 66E = 0,
\end{cases}$$

розв’язок якої

$$\begin{cases}
A = \frac{73080}{160574}, \\
B = -\frac{202800}{160574}, \\
C = \frac{449520}{160574}, \\
D = -\frac{202800}{160574}, \\
E = \frac{73080}{160574}.
\end{cases}$$

Отже, вираз (9) набуває вигляду

$$pк_i^{(S_{5,0})} = \frac{73080}{160574} \cdot pн_{i-2}^{(S_{5,0})} - \frac{202800}{160574} \cdot pн_{i-1}^{(S_{5,0})} +$$
$$+ \frac{449520}{160574} \cdot pн_i^{(S_{5,0})} - \frac{202800}{160574} \cdot pн_{i+1}^{(S_{5,0})} +$$
$$+ \frac{73080}{160574} \cdot pн_{i+2}^{(S_{5,0})}, \; i \in Z. \quad (10)$$

Неважко переконатись, що похибка δ_i, $i \in Z$ після операцій низькочастотної фільтрації та зворотного перетворення дорівнює

$$\delta_i = \frac{1}{160574}\left(609p_{i-4} + 14144p_{i-3} + 14144p_{i+3} + 609p_{i+4}\right).$$

Зважаючи, що

$$\left| \frac{1}{160574}\left(609p_{i-4} + 14144p_{i-3} + 14144p_{i+3} + 609p_{i+4}\right) \right| \le \left|\delta_i\right|,$$

вираз (10) можна подати так:

$$pк_i^{(S_{5,0})} = -\frac{609}{160574} \cdot pн_{i-4}^{(S_{5,0})} - \frac{14144}{160574} \cdot pн_{i-3}^{(S_{5,0})} + $$
$$+\frac{73080}{160574} \cdot pн_{i-2}^{(S_{5,0})} - \frac{202800}{160574} \cdot pн_{i-1}^{(S_{5,0})} + $$
$$+\frac{449520}{160574} \cdot pн_{i}^{(S_{5,0})} - \frac{202800}{160574} \cdot pн_{i+1}^{(S_{5,0})} + $$
$$+\frac{73080}{160574} \cdot pн_{i+2}^{(S_{5,0})} - \frac{14144}{160574} \cdot pн_{i+3}^{(S_{5,0})} - \frac{609}{160574} \cdot pн_{i+4}^{(S_{5,0})}.$$

Остаточно його можна записати у вигляді:

$$pк_i^{(S_{r,0})} = \sum_{j=i-4}^{i+4} \gamma к_j^{(S_{r,0})} pн_j^{(S_{r,0})},$$

де

$$\gamma к_1^{(S_{5,0})} = \frac{1}{160574} \begin{pmatrix} -609 \\ -14144 \\ 73080 \\ -202800 \\ 449520 \\ -202800 \\ 73080 \\ -14144 \\ -609 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно отримаємо вираз для двовимірного випадку:

$$pк_{i,j}^{(S_{5,0})} = \sum_{i_t=i-4}^{i+4} \sum_{j_q=j-4}^{j+4} \gamma к_{2,i_t,j_q}^{(S_{5,0})} pн_{i_t,j_q}^{(S_{5,0})},$$

де

$$\gamma к_2^{(S_{5,0})} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0,000014 & 0,000334 & -0,00173 & 0,00479 & -0,01062 & \cdots \\ 0,000334 & 0,007759 & -0,04009 & 0,111247 & -0,246587 & \cdots \\ -0,00173 & -0,04009 & 0,207132 & -0,5748 & 1,274081 & \cdots \\ 0,00479 & 0,111247 & -0,5748 & 1,595091 & -3,53563 & \cdots \\ -0,01062 & -0,246587 & 1,274081 & -3,53563 & 7,836959 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

де задля економії місця для $\gamma к_2^{(S_{5,0})}$ наведено коефіцієнти з індексами

$$\begin{pmatrix} (i-4,j-4) & (i-4,j-3) & (i-4,j-2) & (i-4,j-1) & (i-4,j) & \cdots \\ (i-3,j-4) & (i-3,j-3) & (i-3,j-2) & (i-3,j-1) & (i-3,j) & \cdots \\ (i-2,j-4) & (i-2,j-3) & (i-2,j-2) & (i-2,j-1) & (i-2,j) & \cdots \\ (i-1,j-4) & (i-1,j-3) & (i-1,j-2) & (i-1,j-1) & (i-1,j) & \cdots \\ (i,j-4) & (i,j-3) & (i,j-2) & (i,j-1) & (i,j) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

а інші визначають з урахуванням симетрії матриці $\gamma к_2^{(S_{5,0})}$.

Висновки

У роботі отримано контрастні, низько- та високочастотні фільтри одно- та двовимірних дискретних даних на підставі алгоритмізації обчислювальних схем сплайнів відповідної розмірності на основі *B*-слайнів п'ятого порядку, близьких до інтерполяційних у середньому. Обгрунтуванням уведення до застосування зазначених фільтрів є згладжувальні та апроксимативні властивості розглянутих у роботі сплайн-операторів.

Обчислювальні схеми, що можуть бути побудовані на підставі запропонованих лінійних функціоналів, задовольнятимуть вимогу функціонування програмного забезпечення у режимі реального часу.

Отримані результати можуть бути використані під час вирішення завдань субсмугової двосмугової фільтрації та кратномасштабного аналізу, для цифрової обробки сигналів та зображень. Подальші дослідження можна зосередити на розробленні відповідних інформаційних та обчислювальних технологій з урахуванням отриманих функціоналів, а також створення комбінованих фільтрів на основі отриманих.

Література

1. *Приставка П.О., Чолишкіна О.Г.* Дослідження двовимірного поліноміального сплайна на основі *B*-сплайнів п'ятого порядку // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій : зб. наук. пр. – Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту. – 2008. – Т. 12. – С. 14–27.
2. *Лигун А.А., Шумейко А.А.* Асимптотические методы восстановления кривых. – К.: ІМ НАН України, 1996. – 358 с.
3. *Приставка П.О.* Поліноміальні сплайни при обробці даних. – Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. – 236 с.
4. *Приставка П.О.* Обчислювальні аспекти застосування поліноміальних сплайнів при побудові фільтрів // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій. – Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту. – 2006. – Т. 10. – С. 3–14.
5. *Приставка П.О.* Побудова контрастних фільтрів за використанням поліноміальних сплайнів // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій. – Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту. – 2007. – Т. 11. – С. 15–22.
6. *Приставка П.О.* Поповнення послідовностей відліків функцій двох змінних на основі поліноміальних сплайнів // Вісник НАУ. – 2007. – №3–4. – С. 36–39.
7. *Приставка П.О.* Поповнення зі згладжуванням послідовностей відліків функцій двох змінних на основі сплайнів // Математичне моделювання. – 2008. – № 1 (18). – С. 9–12.
8. *Приставка П.О.* Лінійні оператори на основі поліноміальних сплайнів у задачі фільтрації тривимірних послідовностей // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій : зб. наук. пр. – Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту. – 2008. –Т. 12. – С. 3–13.
9. *Приставка П.О., Чолишкіна О.Г.* Дослідження *B*-сплайна п'ятого порядку та їх лінійної комбінації // Математичне моделювання. – 2007. – №1 (16). – С. 14–17.

Стаття надійшла до редакції 9.12.08