ПЕДАГОГІКА

УДК 371.32:511045

М.М. Логвин, викл.
Л.І. Нестеренко, викл.
Д.К. Закалашнюк, викл.

ВИВЧЕННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ

Розглянуто приклади поєднання елементів математики шкільного курсу і вищої математики.
The article deals with the examples of combining of elements of higher Mathematics.

Постановка проблеми

Рівень математичної підготовки абітурієнтів в останні роки знизився.

Викладачів турбує питання вимог до знань елементарної математики абітурієнтів, які вступають до вищого навчального закладу і навчаються у ньому, питання наступності та неперервності в освіті, її цілісність і демократичність.

У зв'язку зі стрімким розвитком науково-технічної революції у другій половині XX століття в багатьох країнах посилюється увага до проблеми неперервної освіти.

Наприклад, в 50-ті роки розпочалися дослідження, пов'язані із всебічним аналізом неперервної освіти. Учені П. Шукла (Індія), П. Ленгранд (Франція), А. Даринський (Росія), які жили в різних соціокультурних умовах, дійшли висновку, що здобуття освіти не може обмежуватися лише однією будь-якою віковою групою.

Багато уваги приділяє питанню неперервної освіти відомий полтавський психолог В. Моргун. Ряд нововведень, пов'язаних із модернізацією освіти, зокрема, перехід на профільне навчання, породжують брак навчального часу, що змушує вчителів поєднувати теми, укрупнювати одиниці знань, словом інтегрувати зміст освіти, форми і методи навчання [1].

Освіта розглядається як цілісне явище, що вимагає єдності методик, програм і підходів.

Академік І. Зязюн відзначає, що у змістовний аспект неперервності освіти входять багаторівневість, доповнення, маневреність. Учений наголошує, що “вихід” з однієї освітньої програми має стикуватися зі “входом” в іншу [2].

Мета роботи – привернути увагу до низки питань елементарної математики, що містяться в курсі вищої математики, які, не виходячи за межі шкільного курсу, можна розглянути як на уроках, на курсах, так і факультативно.

Учитель надає учням математичну підготовку, яка допомогла б їм успішно навчатися у вищих навчальних закладах, що цілком відповідає ідеї неперервної освіти.

Доцільно поєднати такі питання, як ділення многочлена на многочлен, визначення цілої частини дробу, розкладання многочлена на множники, розкладання раціонального дробу на суму простих дробів із застосуванням методу невизначених коефіцієнтів.

Розкладання раціональних дробів на суму простих дробів

Простими дробами називають дроби вигляду:

$$\frac{A}{x-a};$$

$$\frac{A}{(x-2)^n} \quad (n > 0 \text{ і ціле});$$

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q};$$

$$\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n} \quad (n > 0 \text{ і ціле}),$$

де *A, B, a, p, q* – дійсні числа.

Тричлен x^2+px+q має комплексні корені, тобто не розкладається на дійсні множники першого степеня.

Дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ називається раціональним, якщо його чисельник і знаменник – многочлени (коефіцієнти многочленів – дійсні числа).

Дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ називається правильним, якщо степінь многочлена $P(x)$ менший, ніж степінь многочлена $Q(x)$.

Якщо степінь чисельника дорівнює степені знаменника або більший за нього, то раціональний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ називається неправильним.

Наприклад, правильний дріб:

$$\frac{2x^2-3x+1}{x^3+4x-1},$$

неправильні дроби:

$$\frac{x^3-1}{2x^3-3x^2-7};$$

$$\frac{x^5-3x^4-2x^3+x-1}{3x^2-6x+1}.$$

З неправильного дробу завжди можна виділити цілу частину (многочлен). Для цього поділимо чисельник на знаменник за правилом ділення многочленів. Наприклад, неправильний дріб

$$\frac{x^4-3x^2+5x+4}{x^2-8x+5}$$

можна подати таким чином:

$$\begin{array}{l|l}
-\ x^4-3x^2+5x+4 & x^2-8x+5 \\
\underline{x^4-8x^3-5x^2} & x^2+8x+56 \\
\quad -\ 8x^3-8x^2+5x+4 & \\
\quad\ \ \underline{8x^3-64x^2+40} & \\
\qquad\quad 56x^2-35x+4 & \\
\qquad\quad \underline{56x^2-448x+280} & \\
\qquad\quad 413x-276 &
\end{array}$$

$$\frac{x^4-3x^2+5x+4}{x^2-8x+5}=x^2+8x+56+\frac{413x-276}{x^2-8x+5}.$$

Неправильний раціональний дріб можна записати у вигляді суми многочлена і правильного дробу.

Якщо $x = x_1$, многочлен

$Q(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ перетворюється в нуль, тобто $Q(x_1) = 0$,

то число x_1 називається коренем многочлена.

Нехай $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ – правильний нескоротний раціональний дріб, а його знаменник після розкладання має вигляд:

$$Q(x)=a_0(x-x_1)^{\alpha_1}\cdots a_0(x-x_2)^{\alpha_2}\cdots(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}(x^2+p_2x+q_2)^{k_2}\cdots(x^2+p_ix+q_i)^{k_i},$$

де $x_1, x_2, \ldots$ – дійсні числа, а квадратичні множники не мають дійсних коренів. Тоді дріб $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ можна подати у вигляді суми простих дробів.

У цій сумі кожному множнику вигляду $(x-x_1)^p$ в знаменнику, де x_1 – довільний з дійсних коренів, а p – його кратність, відповідає вираз

$$\frac{A_1}{(x-x_1)^p}+\frac{A_2}{(x-x_1)^{p-1}}+\frac{A_3}{(x-x_1)^{p-2}}+\ldots+\frac{A_p}{x-x_1},$$

а кожному множнику $(x^2+px+q)^r$ знаменника – вираз

$$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^r}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^{r-1}}+\ldots+\frac{B_rx+C_r}{x^2+px+q},$$

де $A_1, A_2, \ldots, A_p$, $B_1, B_2, \ldots, B_r$, $C_1, C_2, \ldots, C_r$ – дійсні числа.

Розглянемо розкладання раціонального дробу на прості дроби.

Приклад 1.

$$\frac{x^2+2x-4}{(x-1)(x-2)(x+3)(x-4)}.$$

Отже,

$$\frac{x^2+2x-4}{(x-1)(x-2)(x+3)(x-4)}=$$

$$=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3}{x+3}+\frac{A_4}{x-4};$$

$$x^2+2x-4=A_1(x-2)(x+3)(x-4)+A_2(x-1)\times(x+3)(x-4)+A_3(x-1)(x-2)(x-4)+A_4(x-1)(x-2)(x+3). \quad (1)$$

Ліва частина рівності (1) має бути тотожно рівною правій, тобто рівність (1) буде виконуватися за довільного значення x. Це існуватиме тільки в тому випадку, коли коефіцієнти за однакових степенів x в обох частинах рівності (1) будуть між собою рівні.

$$x^2+2x-4=A_1(x^3-3x^2-10x+24)+A_2(x^3-2x^2-11x+12)+A_3(x^3-7x^2+14x-8)+A_4(x^3-7x+6);$$

$$x^2+2x-4=(A_1+A_2+A_3+A_4)x^3+(-3A_1-2A_2-7A_3)x^2+(-10A_1-11A_2+14A_3-7A_4)x+(24A_1+12A_2-8A_3+6A_4)$$

Порівняємо коефіцієнти за однакових степенів x зліва і справа. Отримаємо систему

$X^3 \mid A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0;$

$X^2 \mid -3A_1 - 2A_2 - 7A_3 = 1;$

$X \mid -10A_1 - 11A_2 + 14A_3 - 7A_4 = 2;$

$X^0 \mid 24A_1 + 12A_2 - 8A_3 + 6A_4 = -4.$

Розв'язавши систему, маємо:

$$A_1=-\frac{1}{12};\ A_2=-\frac{2}{5};\ A_3=\frac{1}{140};\ A_4=\frac{10}{21}.$$

Тоді

$$\frac{x^2+2x+4}{(x-1)(x-2)(x+3)(x-4)}=$$

$$=-\frac{1}{12(x-1)}-\frac{2}{5(x-2)}+\frac{1}{140(x+3)}+\frac{10}{21(x-4)}.$$

Розглянемо другий спосіб – задання частинних значень.

Оскільки рівність (1) – тотожність, то вона зберігається при довільному значенні x. Будемо надавати x такі значення, щоб у правій частині всі члени, крім одного, перетворювалися в нуль. Такими значеннями є корені знаменника, тобто числа

$x = 1$; $x = 2$; $x = -3$; $x = 4$.

Якщо $x = 1$, у правій частині рівності (1) всі доданки, крім першого, перетворюються в нуль, тобто ліва частина рівності $x^2 + 2x - 4$, якщо $x = 1$, дорівнює -1, отримаємо

$-1 = A_1(1 - 2)(1 + 3)(1 - 4)$;

$-1 = 12 A_1$;

$$A_1 = -\frac{1}{12}.$$

Якщо $x = 2$, ліва частина дорівнює 4, а в правій частині рівності (1) всі доданки, крім другого, будуть дорівнювати нулю:

$4 = A_2(2 - 1)(2 + 3)(2 - 4)$;

$4 = -10 A_2$;

$$A_2 = -\frac{2}{5}.$$

Якщо $x = -3$, у правій частині рівності (1) всі доданки, крім третього, дорівнюють нулю:

$-1 = A_3(-3 - 1)(-3 - 2)(-3 - 4)$;

$-1 = -140 A_3$;

$$A_3 = \frac{1}{140}.$$

Якщо $x = 4$, у правій частині рівності (1) всі доданки, крім четвертого, дорівнюють нулю:

$20 = A_4(4 - 1)(4 - 2)(4 + 3)$;

$20 = 42 A_4$;

$$A_4 = \frac{10}{21}.$$

Яким би способом не обчислювалися невідомі коефіцієнти, отримаємо для них одні й ті ж самі значення, оскільки розкласти раціональний дріб на прості дроби можна тільки єдиним способом.

$$\frac{x^2 + 2x - 4}{(x-1)(x-2)(x+3)(x-4)} =$$
$$= -\frac{1}{12(x-1)} - \frac{2}{5(x-2)} + \frac{1}{140(x+3)} + \frac{10}{21(x-4)}.$$

Приклад 2.

$$\frac{x^2 + 2}{(x+1)^3(x-2)}.$$

Знаменник заданого дробу має корінь $x = -1$ кратності 3 та корінь $x = 2$ кратності 1. Тому заданий дріб можна подати у вигляді

$$\frac{x^2 + 2}{(x+1)^3(x-2)} =$$
$$= \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{(x+1)^3} + \frac{A_4}{x-2}. \qquad (2)$$

Зведемо праву частину рівності (2) до спільного знаменника, що дорівнює знаменнику лівої частини рівності (2). Тоді одержимо рівність чисельників:

$$x^2 + 2 = A_1(x + 1)^2(x - 2) + A_2(x + 1)(x - 2) + $$
$$+ A_3(x - 2) + A_4(x + 1)^3$$

або

$$x^2 + 2 = (A_1 + A_4)x^3 + (A_2 + 3A_4)x^2 + (A_3 - A_2 -$$
$$- 3A_1 + 3A_4)x + A_4 - 2A_3 - 2A_2 - 2A_1.$$

Отримаємо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів розкладу:

$X^3 \mid A_1 + A_4 = 0$;

$X^2 \mid A_2 + 3A_4 = 0$;

$X \mid A_3 - A_2 - 3A_1 + 3A_4 = 0$;

$X^0 \mid A_4 - 2A_3 - 2A_2 - 2A_1 = 2$.

Це лінійна неоднорідна система чотирьох рівнянь з чотирма невідомими.

Розв’язавши цю систему, отримаємо:

$$A_1 = -\frac{2}{9};\ A_2 = \frac{1}{3};\ A_3 = -1;\ A_4 = \frac{2}{9}.$$

Отже, заданий правильний раціональний дріб матиме вигляд

$$\frac{x^2 + 2}{(x+1)^3(x-2)} =$$
$$= -\frac{2}{9(x+1)} + \frac{1}{3(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{2}{9(x-2)}.$$

Приклад інтегрування раціональних дробів з використанням розглянутих способів розкладання раціональних дробів на суму простих дробів [3].

Знайти

$$I = \int \frac{x^3 + x + 2}{(x-3)(x-4)} dx.$$

Спочатку треба визначити вид підінтегральної функції. У заданому інтегралі підінтегральна функція є неправильним раціональним дробом, тому що найвищий показник степеня x в чисельнику 3, а в знаменнику – лише 2.

Щоб подати неправильний дріб у вигляді суми многочлена та правильного раціонального дробу, поділимо чисельник $x^3 + x + 2$ на знаменник $(x - 3)(x - 4) = x^2 - 7x + 12$

$$
\begin{array}{r|l}
\_x^3 + x + 2 & x^2 - 7x + 12 \\
\underline{x^3 - 7x^2 + 12x} & x + 7 \\
\_7x^2 - 11x + 2 & \\
\underline{7x^2 - 49x + 84} & \\
38x - 82. &
\end{array}
$$

Тому

$$I = \int \left(x + 7 + \frac{38x - 82}{(x-3)(x-4)} \right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 7x + \int \frac{38x - 82}{(x-3)(x-4)} dx .$$

Тепер правильний раціональний дріб подамо у вигляді суми найпростіших раціональних дробів:

$$\frac{38x - 82}{(x-3)(x-4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-4} .$$

Зведемо праву частину до спільного знаменника і отримаємо рівність чисельників.

Якщо $x = 3$, маємо:

$38 \cdot 3 - 82 = -A$,

тому $A = 82 - 114 = -32$.

Якщо $x = 4$, маємо:

$38 \cdot 4 - 82 = B$,

тому $B = 152 - 82 = 70$.

Отже,

$$\frac{38x - 82}{(x-3)(x-4)} = \frac{-32}{x-3} + \frac{70}{x-4} .$$

Тому

$$I = \int \frac{38x - 82}{(x-3)(x-4)} dx = \int \left(\frac{-32}{x-3} + \frac{70}{x-4} \right) dx =$$

$= -32\ln|x - 3| + 70\ln|x - 4| + C$.

Після підстановки отримаємо:

$$I = \frac{x^2}{2} + 7x - 32\ln|x - 3| + 70\ln|x - 4| + C.$$

Зведення тригонометричних виразів до вигляду, зручного для інтегрування

Заслуговують на увагу вправи на тотожні перетворення тригонометричних виразів, у яких за допомогою підстановок переходять до раціональних дробів з подальшим розкладанням їх на суму простих дробів. Тут йдеться про універсальну та інші підстановки, які застосовуються при інтегруванні. Наприклад, інтеграли вигляду

$\int R(\sin x, \cos x)dx.$ (3)

Запис $R(\sin x, \cos x)$ означає, що над синусами і косинусами виконуються тільки раціональні дії додавання, віднімання, множення на постійні величини, піднесення до цілого степеня, як додатного, так і до від'ємного, ділення.

Інтеграли вигляду (3) зводяться до інтегралу від раціональної функції підстановкою

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = z \; (-\pi < x < \pi),$$

яка називається універсальною тригонометричною підстановкою.

У тригонометрії доводиться, що всі тригонометричні функції можна виразити раціонально через $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$:

$$\sin x = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} ; \; \cos x = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} ,$$

тому універсальна тригонометрична підстановка приводить до формул, за якими $\sin x$, $\cos x$ *і* dx можна виразити раціонально через нову змінну z:

$$\sin x = \frac{2z}{1 + z^2} ;$$

$$\cos x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2} ;$$

$$dx = \frac{2dz}{1 + z^2} .$$

З $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = z \Rightarrow \frac{x}{2} = \mathrm{arctg}\, z \; (-\pi < x < \pi)$;

$x = 2\,\mathrm{arctg}\, z; \; dx = \frac{2dz}{1 + z^2}$.

Нехай треба знайти

$$I = \int \frac{5 + 6\sin x}{\sin x(4 + 3\cos x)} dx .$$

Розв'язання:

$$I = \int \frac{5 + \frac{12z}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2}\left(4 + \frac{3(1 - z^2)}{1 + z^2}\right)} \frac{2dz}{1 + z^2} =$$

$$= \int \frac{5z^2 + 12z + 5}{z(7 + z^2)} dz .$$

Розкладемо на прості дроби:

$$\frac{5z^2 + 12z + 5}{z(7 + z^2)} = \frac{A}{z} + \frac{Bz + C}{7 + z^2} ,$$

звідки $5z^2 + 12z + 5 = A(7 + z^2) + z(Bz + C)$;

$$A = \frac{5}{7}; B = \frac{30}{7}; C = 12 .$$

Тому

$$I=\int\left(\frac{\frac{5}{7}}{z}+\frac{\frac{30}{7}z+12}{7+z^2}\right)dz=$$

$$=\frac{5}{7}\ln|z|+\frac{15}{7}\ln(7+z^2)+\frac{12}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{7}}+C=$$

$$=\frac{5}{7}\left(\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|+3\ln(7+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)+$$

$$+\frac{12}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}(\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{tg}\frac{x}{2})+C.$$

Перетворення раціонального дробу до вигляду, зручного для обчислення границь

Доцільно розглянути вправи на зведення таких функцій до вигляду, зручного для знаходження їх границь у разі першої і другої "чудових" границь [4]. Наприклад:

$$\left(\frac{2x+5}{2x+1}\right)^{4x+1}=\left(\frac{2x+1+4}{2x+1}\right)^{4x+1}=$$

$$=\left(\left(1+\frac{4}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{4}}\right)^{\frac{4(4x+1)}{2x+1}};$$

$$\left(\frac{3x+4}{3x+5}\right)^{x+3}=\left(\frac{3x+4}{3x+5}\right)^{x}\cdot\left(\frac{3x+4}{3x+5}\right)^{3}.$$

Таке перетворення використовуємо, якщо треба знайти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x+5}\right)^{x+3},$$

отримаємо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x+5}\right)^{3}=1.$$

$$\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2+3}\right)^{x}=\left(1+\frac{2x-1}{x^2+3}\right)^{x}=$$

$$=\left(\left(1+\frac{2x-1}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2+3}{2x-1}}\right)^{\frac{2x-1}{x^2+3}x}.$$

Нехай треба знайти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2+3}\right)^{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2x-1}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2+3}{2x-1}}\right)^{\frac{2x-1}{x^2+3}\cdot x}=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2x-1}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2+3}{2x-1}}\right)\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x^2+3}x}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x^2+3}x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2+3}}=e^2.$$

Висновки

Важливість використання концептуальних положень, пов'язаних з неперервністю і наступністю в освіті, вивчення споріднених тем шкільного і вузівського курсів надає учням можливість надбання первинних навичок і понять та готує до вивчення фундаментальних питань вищої математики. Перспективними тут є такі напрями подальших досліджень, як наступність змісту навчання в навчальних закладах різних типів, а також пошук споріднених тем у курсі шкільної і вищої математики.

Література

1. *Моргун В.Ф.* Інтедифія освіти: курс лекцій. – Полтава: Наук. зміна, 1996. − 150 с.
2. *Зязюн І.А.* Технологізація освіти як історична неперервність // Неперервна професійна освіта. Теорія і практика. − 2001. – Вип. 3. – 185 с.
3. *Каплан И.А.* Практические занятия по высшей математике. − Х.: Харьк. гос. ун-т. им. А.М. Горького, 1971. − 380 с.
4. *Шкіль М.І., Колесник Т.В., Хмара Т.М.* Алгебра і початки аналізу: підруч. – К.: Освіта, 2001. – 311 с.

Стаття надійшла до редакції 17.06.08.