

УДК. 621.396.621 (045)

**С.О. Шматок**, д-р техн. наук, проф.  
**О.С. Шматок**, канд. техн. наук, доц.  
**А.Б. Петренко**, асист.

## ОБЛАСТІ ЗАХОПЛЕННЯ ДИСКРЕТНИХ СТОХАСТИЧНИХ СЛІДКУЮЧИХ ВИМІРЮВАЧІВ НЕЕНЕРГЕТИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ РАДІОСИГНАЛІВ

За методом різницевої площини розраховано області захоплення нелінійного дискретного слідкуючого вимірювача першого порядку залежно від інтенсивності зовнішніх випадкових збуджень.

*Areas of capture of discrete stochastic tracing instruments for measuring the non-energetic parameters of radio signals. In this paper, the areas of capture of a first-order discrete stochastic tracking measuring instrument depending on the intensity of external random excitations are calculated on the basis of the difference area method.*

### Постановка проблеми

Для дослідження режиму захоплення в системах фазового та частотного автоматичного настроювання частоти генераторів, коли немає зовнішніх випадкових збуджень, традиційно використовують метод фазової площини [1; 2]. У цій роботі виконується узагальнення цього методу та використання його для аналізу режиму захоплення стохастичних нелінійних дискретних слідкуючих вимірювачів параметрів радіосигналів.

Для цього розглянуто фазову площину в координатах кінцевої різниці дисперсії випадкової похибки оцінювання параметра та самої цієї дисперсії [3; 4; 5].

### Модель дискретного стохастичного слідкуючого вимірювача

Роботу системи (рис. 1), яка збуджується випадковими збуреннями, будемо описувати рівняннями в кінцевих різницях для моментних функцій [3;4;5], тобто осередненими рівняннями в кінцевих різницях.

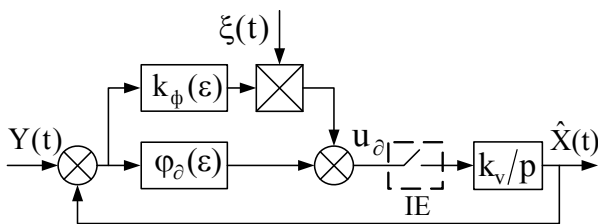


Рис. 1. Схема нелінійного дискретного слідкуючого вимірювача

Статистичний еквівалент дискримінатора, що включає в себе статичну характеристику дискримінатора (математичне сподівання напруги помилки оцінювання), флуктуаційну характеристику дискримінатора, що нормує адитивне збурювання системи, імпульсний елемент (ІЕ), що миттєво фіксує дані та лінійну еквівалентну безперервну частину системи, зображено на рис.1.

Область захоплення будемо визначати в кінцево-різницевому фазовому просторі, координатами якого є математичне сподівання дискретного значення похибки оцінювання  $m_{\epsilon,n} = m_{\epsilon}(nT)$  та дисперсія цієї похибки  $\theta_{\epsilon,n}$ .

Як було показано в праці [4], стохастичне рівняння в кінцевих різницях для системи, яку показано на рис.1, має вигляд

$$\Delta X(nT) - \Delta \epsilon(nT) = \alpha u_{\phi}[\epsilon(nT - T), u_{in}(nT - T), (n-1)T] \quad (1)$$

де  $\Delta X_n = \Delta X(nT)$ ,  $\Delta \epsilon_n = \Delta \epsilon(nT)$  – перші кінцеві різниці вимірюваного параметра та похибки його оцінювання;  $\alpha = k_v T$  – коефіцієнт перетворення системи.

Обчислимо безумовне математичне сподівання напруги на виході дискримінатора, виконавши осереднення за випадковими значеннями  $\epsilon(t)$ :

$$\Delta m_{\epsilon,n} = \Delta m_{x,n} - \alpha m_{\epsilon,(n-1)} k_0(m_{\epsilon,(n-1)}, \theta_{\epsilon,(n-1)}), \quad (2)$$

де  $k_0(m_{\epsilon,(n-1)}, \theta_{\epsilon,(n-1)})$  – коефіцієнт статистичної лінеаризації.

Якщо від рівняння (1) відняти рівняння для математичного сподівання (2), то отримаємо рівняння відносно центрованого випадкового сигналу похибки оцінювання параметра радіосигналу:

$$\Delta \epsilon_n^0 = \Delta X_n^0 - \alpha \epsilon_{n-1}^0 k_1(m_{\epsilon,(n-1)}, \theta_{\epsilon,(n-1)}) - k_2 \alpha \xi_{n-1}^0, \quad (3)$$

де  $k_2 = M_{\epsilon}[k_{\phi}(\epsilon)]$  – коефіцієнт статистичної лінеаризації флуктуаційної характеристики дискримінатора.

Використовуючи рівняння (3), запишемо кінцево-різницеve рівняння для дисперсії похибки оцінювання, підставивши значення  $\varepsilon_n^0$  з рівняння (3):

$$\varepsilon_n^0 = \Delta X_n^0 + \varepsilon_{n-1}^0 - \alpha \varepsilon_{n-1}^0 k_1(m_{\varepsilon,(n-1)}, \theta_{\varepsilon,(n-1)}) - k_2 \alpha \xi_{n-1}. \quad (4)$$

Виконаємо статистичне осереднення результату перемноження рівнянь (3) та (4). Тоді різницеve рівняння відносно дисперсії похибки оцінювання та її математичного сподівання можна розглядати як рівняння фазової площини дискретного слідкуючого вимірювача [3; 4; 5]:

$$\Delta \theta_{\varepsilon,n} = \Delta^2 \theta_{x,n} - \alpha \theta_{\varepsilon,(n-1)} k_1(m_{\varepsilon,(n-1)}, \theta_{\varepsilon,(n-1)}) \times \\ \times [2 - \alpha k_1(m_{\varepsilon,(n-1)}, \theta_{\varepsilon,(n-1)})] + (\alpha k_2)^2 \frac{g_e^2}{2}; \\ \Delta m_{\varepsilon,n} = \Delta m_{x,n} - \alpha m_{\varepsilon,(n-1)} k_0(m_{\varepsilon,(n-1)}, \theta_{\varepsilon,(n-1)}).$$

**Обчислення фазових траєкторій дискретного слідкуючого вимірювача першого порядку**

Спочатку розрахуємо фазовий портрет дискретного слідкуючого вимірювача неенергетичного параметра радіосигналу за нульового математичного сподівання похибки оцінювання, тобто будемо вважати, що  $m_{\varepsilon,n} = 0$  і випадкової складової корисного сигналу немає, тобто  $\Delta \theta_{x,n} = 0$ , тоді кінцево-різницеve рівняння відносно дисперсії набуде вигляду:

$$\Delta \theta_{\varepsilon,n} + \theta_{\varepsilon,(n-1)} \alpha k_1(\theta_{\varepsilon,(n-1)}) \times \\ \times [2 - \alpha k_1(\theta_{\varepsilon,(n-1)})] = (\alpha k_2)^2 \frac{g_e^2}{2}, \quad (5)$$

де  $g_e^2$  – випадкове збурення.

Для обчислення фазових траєкторій за виразом (5) необхідно визначити коефіцієнт статистичної лінеаризації дискримінатора за випадковою складовою  $k_1(\theta_{\varepsilon,n})$  та інтенсивність зовнішніх збуджень, які можна визначати в одиницях виміру дисперсії похибки лінійної моделі системи (рис.1), тобто

$$\theta_n = \alpha \cdot \frac{k_2^2 g_e^2}{2}.$$

Як відомо [3; 4; 5], коефіцієнт статистичної лінеаризації дискримінатора зі статичною характеристикою  $\varphi_\theta(\varepsilon) = \varepsilon e^{-\frac{b\varepsilon^2}{2}}$  та за нормального розподілу випадкової похибки

$$k_1(\theta_{\varepsilon,(n-1)}) = (1 + b\theta_{\varepsilon,(n-1)})^{\frac{3}{2}}. \quad (6)$$

Після підставлення виразу (6) у рівняння (5) отримуємо першу кінцеву різницю дисперсії похибки оцінювання:

$$(\Delta b\theta_{\varepsilon,n}/\alpha) = -b\theta_{\varepsilon,(n-1)} (1 + b\theta_{\varepsilon,(n-1)})^{\frac{3}{2}} \times \\ \times \left[ 2 - \alpha (1 + b\theta_{\varepsilon,(n-1)})^{\frac{3}{2}} \right]. \quad (7)$$

За допомогою пакета прикладних програм MatLab розраховано й побудовано графіки фазових траєкторій для значень  $\alpha = 1, 2, 4, 6, 10$  відповідно до рівняння (7). Результати обчислень подано на рис. 2.

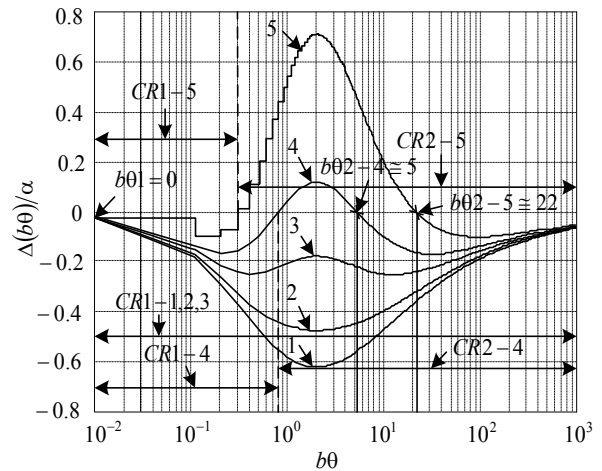


Рис. 2. Области захоплення системи:

- 1 –  $\alpha = 1$ ;
- 2 –  $\alpha = 2$ ;
- 3 –  $\alpha = 4$ ;
- 4 –  $\alpha = 6$ ;
- 5 –  $\alpha = 10$

Із рис. 2 видно, що якщо  $g_e^2 = 0$ , різницеve фазові траєкторії починаються з початку координат, де для всіх кривих ( $\alpha = 1, 2, 4, 6, 10$ ) розміщено точку стійкої рівноваги дискретного слідкуючого вимірювача. Криві 4 та 5 ( $\alpha = 6$  та  $\alpha = 10$ ) мають додаткові точки нестійкої та стійкої рівноваг, координати точок стійкої рівноваги відповідно дорівнюють  $b\theta_{\varepsilon} 2 - 4 \cong 5$  та  $b\theta_{\varepsilon} 2 - 5 \cong 22$ .

У зв'язку з цим, досліджувальний слідкуючий вимірювач має декілька різновеликих областей захоплення, що позначені на рис. 2.

1. Відповідно до кривих 1, 2, 3 можна виокремити по одній (першій) області захоплення (CR1 – 1, 2, 3), точка стійкої рівноваги визначається координатами  $(\Delta b\theta_{\varepsilon} = 0, b\theta_{\varepsilon} 1 = 0)$ .

2. Крива 4 має дві області захоплення слідкуючого вимірювача:

– перша область захоплення (CR1 – 4) має аттрактором точку стійкої рівноваги з координатами: ( $\Delta b\theta_\varepsilon = 0$ ,  $b\theta_\varepsilon 1 = 0$ );

– друга область захоплення (CR2 – 4) має точку стійкої рівноваги з координатами:

$$\Delta b\theta_\varepsilon = 0, \quad b\theta_\varepsilon 2 - 4 \cong 5.$$

3. Крива 5 також має дві області захоплення:

– перша область (CR1 - 5) має точку стійкої рівноваги з координатами ( $\Delta b\theta_\varepsilon = 0$ ,  $b\theta_\varepsilon 1 = 0$ );

– друга область захоплення (CR2 – 5) має точку стійкої рівноваги з координатами:

$$b\theta_\varepsilon 1 = 0, \quad b\theta_\varepsilon 2 - 5 \cong 22.$$

З рис. 2 видно, що області захоплення являють собою відрізки ліній різної довжини: найдовша лінія – це область захоплення CR1 – 1, 2, 3, що визначається для кривих 1, 2, 3, її розміри визначаються величинами дисперсій похибок оцінювання від 0 до  $b\theta_\varepsilon > 10^3$ . Форма фазових траєкторій визначається добутком  $\theta_\varepsilon k_1(\theta_\varepsilon) \cdot [2 - \alpha k_1(\theta_\varepsilon)]$ , а цей добуток зі збільшенням дисперсії похибки оцінювання асимптотично наближується до нуля, тобто  $\lim_{\theta_\varepsilon \rightarrow \infty} \theta_\varepsilon k_1(\theta_\varepsilon) \cdot [2 - \alpha k_1(\theta_\varepsilon)] = 0$ ,

де необхідно врахувати властивість взаємної дисперсії  $\theta_\varepsilon k_1(\theta_\varepsilon) > 0$ .

Зі збільшенням добротності системи  $\alpha > 6$  точки стійкої рівноваги для кривих 4 та 5 переміщуються в положення, які на рис. 2 позначено: для кривої 4 – ( $b\theta 2 - 4$ ) координата  $b\theta_{\varepsilon, \text{уст}} = 5$ ; для кривої 5 – ( $b\theta 2 - 5$ ) відповідно  $b\theta_{\varepsilon, \text{уст}} = 22$ .

Якщо значення дисперсії похибки оцінювання  $b\theta_0 = 2$ , різницеві фазові траєкторії 1 та 2 мають мінімум, який приблизно дорівнює величинам кінцевих різниць; для кривої 1 –  $\frac{\Delta b\theta_\varepsilon}{\alpha} \cong -0,61$ , а

$$\text{для кривої 2 – } \frac{\Delta b\theta_\varepsilon}{\alpha} \cong -0,47.$$

Збільшення добротності системи  $\alpha > 2$  (у лінійній моделі слідкуючого вимірювача першого порядку це значення відповідає умові стійкості замкнутого контуру, тобто умові, що  $\alpha \leq 2$ ) призводить до появи на фазовій кривій значення  $b\theta_0 = 2$  максимуму, який при  $\alpha = 6$  (крива 4) перевищує вісь абсцис і дорівнює

$$\left( \frac{\Delta \theta_\varepsilon}{\alpha} \right)_{\max} \cong +0,12, \quad \text{а якщо } \alpha = 10, \quad \text{то}$$

$$\left( \frac{\Delta \theta_\varepsilon}{\alpha} \right)_{\max} \cong +0,73.$$

Подано графіки (розв'язання осередненого рівняння в кінцевих різницях (7), являють собою обвідні, які проходять через точки з координатами, що обчислюються таким чином. Нехай початкова умова дорівнює  $b\theta_{\varepsilon, 0}$ . Тоді стан системи при  $n=1$  можна охарактеризувати точкою з координатами  $b\theta_{\varepsilon, 0}$  та  $\Delta b\theta_{\varepsilon, 1}$ . Оскільки  $\Delta b\theta_{\varepsilon, n} = b\theta_{\varepsilon, n} - b\theta_{\varepsilon, (n-1)}$ , то точка, яка відповідає стану системи при  $n=2$ , має абсцису  $b\theta_{\varepsilon, 1} = b\theta_{\varepsilon, 0} + \Delta b\theta_{\varepsilon, 1}$ .

За цим значенням абсциси визначаємо ординату

$$\Delta b\theta_{\varepsilon, 2} = (\alpha k_2)^2 \frac{g_\varepsilon^2}{2} - f(b\theta_{\varepsilon, 1}),$$

де до складу функції  $f$  входить права частина формули (7).

#### Розрахунок граничного значення області захоплення системи

Якщо  $g_\varepsilon^2 \geq 0$ , фазові траєкторії будуть переміщатись уздовж осі ординат на величину дисперсії похибки оцінювання в лінійній моделі дискретної системи

$$\alpha \cdot \frac{(k_2 g_\varepsilon)^2}{2} = \theta_{\text{л}}.$$

Наприклад,  $b\theta_{\text{л}} = 0,2$ .

За допомогою пакета MatLab побудуємо графіки різницевих фазових траєкторій (рис. 3).

Різницеві фазові траєкторії 3, 4, 5 розміщено вище від осі абсцис і не мають точок рівноваги системи, тому визначають тільки інфінітний рух точки зображення, що відповідає нестійкості досліджуваної системи. У такій системі захоплення та автоматичне супроводження радіосигналу неможливе.

Крива 1 перетинає вісь абсцис в двох точках  $b\theta_\varepsilon^1 \cong 0,13$  та  $b\theta_\varepsilon^2 \cong 78$ .

Перша точка визначає точку стійкої рівноваги, оскільки для початкових значень дисперсії похибки оцінювання, менших від 0,13, перша кінцева різниця додатна, дисперсія буде зростати, наближуючись до точки стійкої рівноваги.

За початкових значень дисперсії похибки, які перевищують значення  $b\theta_{\varepsilon, \text{поч}} = 0,13$ , перша кінцева різниця дисперсії буде від'ємною, отже, дисперсія зменшуватиметься, наближаючись знизу до точки стійкої рівноваги.

Для режиму роботи слідкуючого вимірювача, що відповідає різницевій фазовій траєкторії 1, область захоплення системи визначається відрізком лінії, яка визначається значенням дисперсії похибки, що дорівнює  $(b\theta_\varepsilon = 78) - (CR1 - 1)$ .

Різницева фазова траєкторія 2, як видно з рис. 3, має чотири точки рівноваги системи: з них дві точки стійкої рівноваги з координатами  $b\theta_\varepsilon \cong 0,17$  та  $b\theta_\varepsilon \cong 3,7$  та дві точки нестійкої рівноваги.

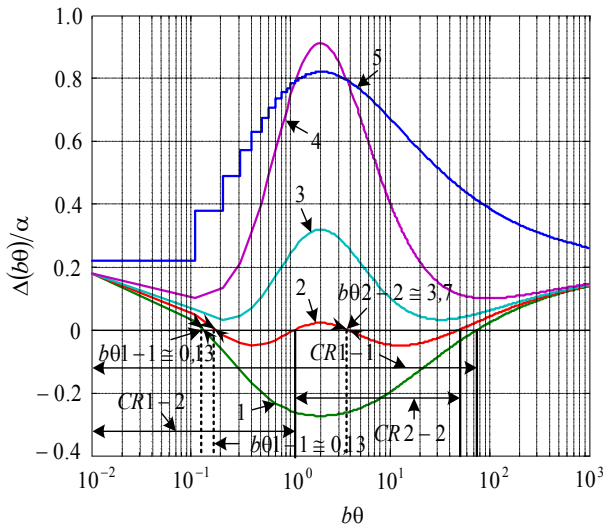


Рис. 3. Граничні значення областей захоплення:

- 1 – α = 1;
- 2 – α = 2;
- 3 – α = 4;
- 4 – α = 6;
- 5 – α = 10

У зв'язку з цим у системі будуть існувати дві області захоплення: CR1-2 – атрактор в точці стійкої рівноваги  $b\theta_\varepsilon 1 \cong 0,17$ . Розмір цієї області захоплення –  $b\theta_\varepsilon = 11$ .

Друга область захоплення CR2-2 з точкою стійкої рівноваги  $b\theta_\varepsilon 2 - 2 \cong 3,7$  має розмір –  $b\theta_\varepsilon = 48,9 - 11 = 47,8$ .

Подальше збільшення інтенсивності адитивних випадкових збурень  $b\theta_n \geq 0,2$  зумовлює переміщення фазових траєкторій вгору вздовж осі ординат. При цьому зникнуть точки стійкої рівноваги для кривої 2 ( $\alpha = 2$ ), а залишаться тільки для кривої 1.

У граничному випадку ( $b\theta_n^{nop} \cong 0,696$ ) на фазовій кривій 1 залишаться тільки одна точка стійкої рівноваги з координатами  $(0, b\theta_0^{nop} = 2)$ , саме

вона є граничним значенням області захоплення системи, її розмір дорівнює нулю.

Цьому випадку відповідає умова:

$$\text{extr}_{\theta_{\varepsilon,n}} \{ 2\theta_{\varepsilon,n} k_1(\theta_{\varepsilon,n}) - \alpha \theta_{\varepsilon,n} k_1^2(\theta_{\varepsilon,n}) \} \cong \theta_n^{nop}. \quad (8)$$

Після визначення часткової похідної отримуємо неявне рівняння для координат екстремуму (8), яке для спрощення записано відносно коефіцієнта перетворення системи:

$$\alpha = \frac{2(1 + \theta_{\varepsilon,n} k_1^{-1} k'_{1\theta_{\varepsilon,n}})}{k_1 + 2\theta_{\varepsilon,n} k'_{1\theta_{\varepsilon,n}}}, \quad (9)$$

де  $k'_{1\theta_{\varepsilon,n}} = \frac{\partial k_1(\theta_{\varepsilon,n})}{\partial \theta_{\varepsilon,n}}$  – часткова похідна від статистичного коефіцієнта лінеаризації за випадковою складовою за дисперсією похибки оцінювання параметра прийнятого радіосигналу.

Увівши до формули (9) статистичний коефіцієнт лінеаризації за випадковою складовою вихідної напруги дискримінатора

отримаємо залежність величини координати екстремального значення різницевої фазової траєкторії від добротності розімкненого контуру слідкуючого вимірювача:

$$k_1(\theta_\varepsilon) = (1 + b\theta_\varepsilon)^{\frac{3}{2}},$$

отримаємо залежність величини координати екстремального значення різницевої фазової траєкторії від добротності розімкненого контуру слідкуючого вимірювача:

$$\alpha = \frac{2 - b\theta_0}{1 - 2b\theta_0} (1 + b\theta_0)^{\frac{3}{2}}.$$

Аналізуючи рис. 3, бачимо, наприклад, що для  $\alpha = 1$  величина мінімуму фазової траєкторії при цьому має значення 0,696. Це означає, що граничне значення інтенсивності випадкового збурення, яке зводить до нуля область захоплення, оцінюється дисперсією похибки оцінювання вектора стану лінійної моделі слідкуючого вимірювача, що дорівнює  $b\theta_n^{nop} = 0,696$ . Це граничне значення дисперсії похибки оцінювання, яке вимірюється в одиницях дисперсії похибки оцінювання в лінійній моделі слідкуючого вимірювача, можна співвіднести до напіврозкриття статичної характеристики дискримінатора. Для цього достатньо використати співвідношення (2), тоді:

$$\frac{9}{9^2} \cdot \theta_\varepsilon^{nop} = 0,696 \text{ або } \frac{\theta_\varepsilon^{nop}}{9^2} = \frac{0,696}{9} \cong 0,0773. \quad (10)$$

Якщо в формулі (10) перейти до середньоквадратичного значення похибки оцінювання, отримаємо

$$\frac{\theta_n^{nop}}{9} \cong 0,278.$$

Виконавши аналогічні розрахунки для кривих 2, 3, 4, 5, отримаємо граничні значення дисперсії випадкової похибки оцінювання параметрів радіосигналів в лінійній моделі слідкуючого вимірювача, за яких зникає область захоплення, тобто виникає зрив стеження (див. таблицю).

#### Результати розрахунків

$\alpha$	$\Delta b\theta_{\min}/\alpha$	$b\theta_{\text{л}}^{\text{пор}}/\alpha$	$\theta_{\text{л}}^{\text{пор}}/\vartheta^2$	$\sigma_{\text{л}}^{\text{пор}}/\vartheta$
1	-0,696	0,696	0,077	0,278
2	-0,623	0,623	0,138	0,372
4	-1,00	1,00	0,11	0,333
6	-0,90	0,90	0,10	0,32
10	-1,00	1,00	0,11	0,333

Аналіз наведених в таблиці даних показує, що збільшення коефіцієнта перетворення  $\alpha$  в діапазоні 1...10 майже не впливає на умови приведення до нуля області захоплення дискретного вимірювача, хоча розміри та положення областей захоплення змінюються суттєво (рис. 1, 2).

#### Висновки

Зменшення параметра  $b$ , який характеризує розмір лінійної ділянки статичної характеристики дискримінатора, призводить до погіршення завадостійкості системи.

Збільшення апертури дискримінатора зумовлює погіршення роздільної здатності системи щодо суміші декількох сигналів, за якими ведеться стеження [6].

#### Література

1. Шахгидьян В.В., Ляховкин А.А. Системы фазовой автоподстройки частоты. – Изд.2-е, доп. – М.: Связь, 1972. – 448 с.
2. Ван Трис Г. Теория нелинейной модуляции. Т. 2 / пер. с англ.: под ред. В.Т. Горяйнова. – М.: Сов. радио, 1975. – 344 с.
3. Сигалов Г.Г., Мадорский Л.С. Основы теории дискретных систем управления / под ред. Г.Г. Сигалова. – Минск, Вышэйшая школа, 1973.
4. Шматок С.О., Шматок О.С., Петренко А.Б. Математична модель дискретної стохастичної нелінійної системи вимірювання частоти // Зб. наук. пр. – Житомир.: ЖВІ НАУ ім. С.П. Корольова. – 2007. – № 6. – С. 91–99.
5. Шматок С.О., Шматок О.С., Петренко А.Б. Область захоплення дискретної стохастичної радіоелектронної слідкуючої системи // Заг. унів. наук.-техн. конф. молодих учених, аспірантів і студентів «Сучасні проблеми електроенергетехніки та автоматики»: тез. доп. – К.: Політехніка, 2007. – С. 44–48.
6. Баранов О.А., Лісовий І.П., Шматок С.О. Нелінійна стохастична динаміка фільтрів оцінювання: захоплення та розподіл сигналів. – К.: Радіоаматор, 2000. – 217 с.

Стаття надійшла до редакції 20.03.08.