УДК 519.652:519.254 (045)

П.О. Приставка, д-р техн. наук, проф.

НЕБІНАРНЕ ПОПОВНЕННЯ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ВІДЛІКІВ ГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ ЛІНІЙНИМИ ОПЕРАТОРАМИ НА ОСНОВІ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ СПЛАЙНІВ

Подано дослідження обчислювального аспекту застосування локальних поліноміальних сплайнів однієї змінної на основі B-сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому, в задачі небінарного поповнення послідовностей відліків гладких функцій.

This article is the solution of practical research of the polynomial splines of one variable based on the B-splines that, on average, are related to the interpolar. These splines allow us to get simple calculating schemes which are convenient for the practical application for non-binary subdivisions.

Постановка проблеми

Натепер загально відома можливість подання, наприклад, сигналу у вигляді суми його «грубого» подання з деталізуванням сигналу в його різних місцях. Цей факт можливий за рахунок подання простору сигналів V у вигляді системи вкладених підпросторів V_j, $j \in \mathbf{Z}$, що різняться між собою тільки перемасштабуванням незалежної змінної. Аналіз, що ґрунтується на подібних розкладах, називають кратномасштабним аналізом (КМА), отже, КМА передбачає, що простір сигналів V може бути розбито на ієрархічно вкладені підпростори V_j, $j \in \mathbf{Z}$, які не перетинаються та об'єднання яких надає у межі $L^2(\mathbf{R})$.

Але, практичного розвитку не отримали методи, що призводять до некратного масштабування, зокрема, послідовностей відліків гладких функцій. Передусім це пов'язано з тим, що кратне масштабування (за всяк час бінарне) характеризується найменшою обчислювальною складністю операторів, що здійснюють таку операцію.

Повертаючись до послідовностей відліків гладких функцій зазначимо, що за певних умов (наприклад, функції з малими осциляціями) прикладні процедури КМА містять обчислювальну «надлишковість» за рахунок об'єктивної несуттєвості деталізуючої складової розкладу. Не відкидаючи можливості використання операторів, що забезпечують бінарне масштабування зазначених послідовностей, слід відзначити практичну необхідність в отриманні небінарних проекцій. Останнє актуальне у разі реалізації технологій стиснення інформації із втратами. Поставимо за мету отримати такі оператори, до того ж вимагатимемо максимальної обчислювальної простоти для таких типів властивостей: високих апроксимативних або, навпаки, згладжувальних.

Аналіз досліджень та постановка завдання

Нині загальновизнано, що з точки зору якості неперервних апроксимацій функцій, заданих послідовностями відліків у вузлових точках, з урахуванням вимоги низької обчислювальної складності відповідних процедур, на позиціях лідера існують методи, основані на використанні лінійних комбінацій *B*-сплайнів.

Вагомий внесок в фундаментальну розробку апарату апроксимацій на основі *B*-сплайнів зробили І. Шоенберг, К. Де Бор, М. П. Корнійчук, А. О. Лигун та ін. Серед російськомовних видань, що приділяють увагу практичним питанням застосування *B*-сплайнів, можна відзначити роботи [1; 2]. Питання, пов'язані з обчислювальним аспектом застосування *B*-сплайнів як у задачі апроксимації, так і під час побудови процедур вейвлетаналізу достатньо вичерпно викладено в роботі [3]. Теоретичні та практичні дослідження сплайнів на основі *B*-сплайнів, близьких до інтерполяційних у середньому, подано в роботах [4; 5]. Стосовно останнього типу сплайнів можна відзначити, що вибір операторів, які є близькими до інтерполяційних у середньому, обумовлений більш високою стійкістю оцінки наближення за даними, що є різного роду результатами вимірювань, тобто, за визначенням, такі оператори можуть бути рекомендовані для опрацювання, наприклад, цифрованих зображень та відео.

Поставимо за мету у подальшому викладенні подати процедури небінарного масштабування одновимірних послідовностей відліків гладких функцій на підставі алгоритмізації обчислювальних схем сплайнів на основі *B*-сплайнів, що є близькими до інтерполяційних у середньому. Зазначимо, що за аналогією з роботами з бінарного (або чотирикратного у двовимірному випадку) поповнення послідовностей відліків функцій [6–8] на основі вказаних сплайн-операторів, будемо використовувати часткові випадки сплайнів при різних конкретних значеннях, узятих у межах локального носія.

Виклад основного матеріалу

Нехай з кроком $h>0$ задано розбиття дійсної осі $\Delta_h : t_i = ih$, $i \in \mathbf{Z}$, у кожній точці якого отримано значення деякої функції $p(t)$, визначеної на $R_1(-\infty;\infty)$.

Вважатимемо, що інформація про функцію $p(t)$, яка підлягає відтворенню, задано у вузлах розбиття Δ_h у вигляді інтеграла

$$\overline{p}_i = \frac{1}{h}\int\limits_{(i-0,5)h}^{(i+0,5)h} p(t)\,dt . \qquad (1)$$

При цьому значення функції $p(t)$ у вузлах визначають так: $p_i = \overline{p}_i + \varepsilon_i$, $i \in Z$, де ε_i – похибка.

Для апроксимації функції $p(t)$ за значеннями типу (1) у вузлах розбиття Δ_h застосовують поліноміальні сплайни, близькі до інтерполяційних у середньому на основі *B*-сплайнів другого, третього [4] та четвертого [5] порядків.

Наприклад, сплайн

$$S_{2,1}(p,t) = \sum_{i\in Z}\left(p_i - \frac{1}{6}\Delta^2 p_i\right) B_{2,h}\left(t-(i+0,5)h\right),$$

де $\Delta^2 p_i = p_{i-1} - 2p_i + p_{i+1}$;

$$B_{2,h}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [-3h/2;3h/2]; \\ (3+2t/h)^2/8, & t \in [-3h/2;-h/2]; \\ 3/4-(2t/h)^2/4, & t \in [-h/2;h/2]; \\ (3-2t/h)^2/8, & t \in [h/2;3h/2], \end{cases}$$

має досить високу якість апроксимації.

Зокрема, якщо $h \to 0$ для довільної $p(t) \in C^3$, буде вірно таке:

$$\left\| p(t) - S_{2,1}(\overline{p},t)\right\| = \frac{h^3}{12\sqrt{3}}\left\| p^{(3)}(t)\right\| + o\left(h^3\right).$$

Наприклад, сплайну

$$S_{4,0}(p,t) = \sum_{i\in Z} p_i B_{4,h}\left(t-(i+0,5)h\right),$$

де $B_{4,h}(t)$ – *B*-сплайн четвертого порядку [5], притаманна властивість згладжування:

за $h \to 0$ для $\forall$ $p(t) \in C^2$ виконується

$$\left\| p(t) - S_{4,0}(\overline{p},t)\right\| = \frac{h^2}{4}\left\| p''(t)\right\| + o\left(h^2\right).$$

Отже, застосовуючи різні типи сплайнів [4; 5], можна отримувати або асимптотично точні оцінки, або забезпечувати згладжування локальних осциляцій функції $p(t)$.

Для зручності подальших досліджень подамо сплайн $S_{2,1}(p,t)$ в явному вигляді:

$$S_{2,1}(p,t) = \frac{1}{48}\Big(-(1-x)^2 p_{i-2} + \left(2-16x+10x^2\right)p_{i-1} +$$

$$+\left(46-18x^2\right)p_i + \left(2+16x+10x^2\right)p_{i+1} - (1+x)^2 p_{i+2}\Big),$$

де $x = 2\left(t-(i+0,5)h\right)/h$, $|x| \le 1$.

Неважко отримати значення сплайна $S_{2,1}(p,t)$, відповідно, у точках:
$x = 0,25$, $x = 0,75$, $x = -0,75$, $x = -0,25$:

$$S_{2,1}^{[0,25]} = \frac{1}{768}\left(-9p_{i-2} - 22p_{i-1} + 718p_i + 106p_{i+1} - 25p_{i+2}\right);$$

$$S_{2,1}^{[0,75]} = \frac{1}{768}\left(-p_{i-2} - 70p_{i-1} + 574p_i + 314p_{i+1} - 49p_{i+2}\right);$$

$$S_{2,1}^{[-0,75]} = \frac{1}{768}\left(-49p_{i-2} + 314p_{i-1} + 574p_i - 70p_{i+1} - p_{i+2}\right);$$

$$S_{2,1}^{[-0,25]} = \frac{1}{768}\left(-25p_{i-2} + 106p_{i-1} + 718p_i - 22p_{i+1} - 9p_{i+2}\right).$$

Нехай задано $P = \left\{p_{j,\kappa}\right\}_{j\in\mathbf{Z}}$, $\kappa = 1,2,\ldots$ – послідовність відліків гладкої функції $p(t)$. Під κ будемо розуміти ітераційний крок небінарного масштабування проектування послідовності P. Тоді, якщо $\left\{p_{i,\kappa-1}\right\}_{i\in\mathbf{Z}}$ – початкова послідовність, а $\left\{p_{j,\kappa}\right\}_{j\in\mathbf{Z}}$ - утворена «проектуванням» будь-яких 5 точок в 4, то маємо визначення для $p_{j,\kappa}$, наведене нижче.

Отже, нехай індекс j визначається за правилом $j = 4l$, $l \in \mathbf{Z}$. Тоді для $\forall l$ маємо:

$$p_{j,\kappa} = \frac{1}{768}\Big(-9p_{j+l-2,\kappa-1} - 22p_{j+l-1,\kappa-1} +$$
$$+ 718p_{j+l,\kappa-1} + 106p_{j+l+1,\kappa-1} - 25p_{j+l+2,\kappa-1}\Big); \qquad (2)$$

$$p_{j+1,\kappa} = \frac{1}{768}\Big(-p_{j+l-1,\kappa-1} - 70p_{j+l,\kappa-1} +$$
$$+ 574p_{j+l+1,\kappa-1} + 314p_{j+l+2,\kappa-1} - 49p_{j+l+3,\kappa-1}\Big); \qquad (3)$$

$$p_{j+2,\kappa}=\frac{1}{768}\big(-49p_{j+l+1,\kappa-1}+314p_{j+l+2,\kappa-1}+$$

$$+574p_{j+l+3,\kappa-1}-70p_{j+l+4,\kappa-1}-p_{j+l+5,\kappa-1}\big); \qquad (4)$$

$$p_{j+3,\kappa}=\frac{1}{768}\big(-25p_{j+l+2,\kappa-1}+106p_{j+l+3,\kappa-1}+$$

$$+718p_{j+l+4,\kappa-1}-22p_{j+l+5,\kappa-1}-9p_{j+l+6,\kappa-1}\big). \qquad (5)$$

Якщо маємо відповідність послідовності $\{p_{i,\kappa-1}\}_{i\in\mathbf{Z}}$ – вузлові точки $\{t_{i,\kappa-1}\}_{i\in\mathbf{Z}}$, причому

$t_{i,\kappa-1}=(i+0,5)h$, $i\in\mathbf{Z}$, $h>0$,

то тоді відповідна до $\{p_{j,\kappa}\}_{j\in\mathbf{Z}}$ послідовність вузлів $\{t_{j,\kappa}\}_{j\in\mathbf{Z}}$ визначається так:

$t_{j,\kappa}=5(j+0,5)h/4$, $j\in\mathbf{Z}$.

Вирази (2)–(5) можна подати у більш компактному вигляді таким чином:

$$p_{j,\kappa}=\sum_{jj=j+l-2}^{j+l+2}\gamma_{a,jj-(j+l)}^{(S_{21,(5\to4)})}p_{jj,\kappa-1};$$

$$p_{j+1,\kappa}=\sum_{jj=j+l-1}^{j+l+3}\gamma_{b,jj-(j+l+1)}^{(S_{21,(5\to4)})}p_{jj,\kappa-1};$$

$$p_{j+2,\kappa}=\sum_{jj=j+l+1}^{j+l+5}\gamma_{c,jj-(j+l+3)}^{(S_{21,(5\to4)})}p_{jj,\kappa-1};$$

$$p_{j+3,\kappa}=\sum_{jj=j+l+2}^{j+l+6}\gamma_{d,jj-(j+l+4)}^{(S_{21,(5\to4)})}\cdot p_{jj,\kappa-1};$$

де

$$\gamma_a^{(S_{21,(5\to4)})}=\frac{1}{768}\begin{pmatrix}-9\\-22\\718\\106\\-25\end{pmatrix};\ \gamma_b^{(S_{21,(5\to4)})}=\frac{1}{768}\begin{pmatrix}-1\\-70\\574\\314\\-49\end{pmatrix};$$

$$\gamma_c^{(S_{21,(5\to4)})}=\frac{1}{768}\begin{pmatrix}-49\\314\\574\\-70\\-1\end{pmatrix};\ \gamma_d^{(S_{21,(5\to4)})}=\frac{1}{768}\begin{pmatrix}-25\\106\\718\\-22\\-9\end{pmatrix}.$$

Надалі будемо використовувати позначення в наступному сенсі. Розглянемо $\gamma_a^{(S_{21,(5\to4)})}$. Індекс $(S_{21,(5\to4)})$ означає, що будемо використовувати коефіцієнти, отримані зі сплайна $S_{2,1}(p,t)$, під час проектування 5 точок в 4.

Використовуючи сплайн $S_{4,0}(p,t)$, неважко отримати такі функціонали, аналогічні наведеним вище:

$$p_{j,\kappa}=\sum_{jj=j+l-2}^{j+l+2}\gamma_{a,jj-(j+l)}^{(S_{40,(5\to4)})}p_{jj,\kappa-1}$$

тощо з індексом $(S_{40,(5\to4)})$,

де

$$\gamma_a^{(S_{40,(5\to4)})}=\frac{1}{98304}\begin{pmatrix}81\\18460\\57926\\21212\\625\end{pmatrix};\ \gamma_b^{(S_{40,(5\to4)})}=\frac{1}{98304}\begin{pmatrix}1\\6556\\50726\\38620\\2401\end{pmatrix};$$

$$\gamma_c^{(S_{40,(5\to4)})}=\frac{1}{98304}\begin{pmatrix}2401\\38620\\50726\\6556\\1\end{pmatrix};\ \gamma_d^{(S_{40,(5\to4)})}=\frac{1}{98304}\begin{pmatrix}625\\21212\\57926\\18460\\81\end{pmatrix}.$$

Урахувавши значення сплайнів $S_{2,1}(p,t)$, $S_{4,0}(p,t)$ у точках

$x=-0,2$, $x=-0,6$, $x=1$, $x=0,6$, $x=0,2$,

і якщо $\{p_{i,\kappa-1}\}_{i\in\mathbf{Z}}$ – початкова послідовність, а $\{p_{j,\kappa}\}_{j\in\mathbf{Z}}$ – утворена «проектуванням» 4 точок в 5, то тоді маємо наступне визначення для $p_{j,\kappa}$.

Нехай індекс j визначається за правилом $j=5l$, $l\in\mathbf{Z}$. Для $\forall l$ маємо

$$p_{j,\kappa}=\sum_{jj=j-l-2}^{j-l+2}\gamma_{A,jj-(j-l)}^{(S_{\bullet,(4\to5)})}p_{jj,\kappa-1};$$

$$p_{j+1,\kappa}=\sum_{jj=j-l-1}^{j-l+3}\gamma_{B,jj-(j-l+1)}^{(S_{\bullet,(4\to5)})}p_{jj,\kappa-1};$$

$$p_{j+2,\kappa}=\sum_{jj=j-l-1}^{j-l+3}\gamma_{C,jj-(j-l+1)}^{(S_{\bullet,(4\to5)})}p_{jj,\kappa-1};$$

$$p_{j+3,\kappa}=\sum_{jj=j-l}^{j-l+4}\gamma_{D,jj-(j-l+2)}^{\left(S_{\bullet,(4\to 5)}\right)}p_{jj,\kappa-1};$$

$$p_{j+4,\kappa}=\sum_{jj=j-l+1}^{j-l+5}\gamma_{E,jj-(j-l+3)}^{\left(S_{\bullet,(4\to 5)}\right)}p_{jj,\kappa-1},$$

де

$$S_{\bullet,(4\to 5)}=\left\{S_{21,(4\to 5)},S_{40,(4\to 5)}\right\};$$

$$\gamma_A^{\left(S_{21,(4\to5)}\right)}=\frac{1}{300}\begin{pmatrix}-9\\35\\283\\-5\\-4\end{pmatrix};\ \gamma_B^{\left(S_{21,(4\to5)}\right)}=\frac{1}{300}\begin{pmatrix}-16\\95\\247\\-25\\-1\end{pmatrix};$$

$$\gamma_C^{\left(S_{21,(4\to5)}\right)}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}0\\-1\\7\\7\\-1\end{pmatrix};\ \gamma_D^{\left(S_{21,(4\to5)}\right)}=\frac{1}{300}\begin{pmatrix}-1\\-25\\247\\95\\-16\end{pmatrix};$$

$$\gamma_E^{\left(S_{21,(4\to5)}\right)}=\frac{1}{300}\begin{pmatrix}-4\\-5\\283\\35\\-9\end{pmatrix};\ \gamma_A^{\left(S_{40,(4\to5)}\right)}=\frac{1}{15000}\begin{pmatrix}81\\3691\\8891\\2321\\16\end{pmatrix};$$

$$\gamma_B^{\left(S_{40,(4\to5)}\right)}=\frac{1}{15000}\begin{pmatrix}256\\5281\\8171\\1291\\1\end{pmatrix};\ \gamma_C^{\left(S_{40,(4\to5)}\right)}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}0\\1\\11\\11\\1\end{pmatrix};$$

$$\gamma_D^{\left(S_{40,(4\to5)}\right)}=\frac{1}{15000}\begin{pmatrix}1\\1291\\8171\\5281\\256\end{pmatrix};\ \gamma_E^{\left(S_{40,(4\to5)}\right)}=\frac{1}{15000}\begin{pmatrix}16\\2321\\8891\\2321\\81\end{pmatrix}.$$

Якщо маємо відповідність послідовності $\left\{p_{i,\kappa-1}\right\}_{i\in\mathbf{Z}}$ – вузлові точки $\left\{t_{i,\kappa-1}\right\}_{i\in\mathbf{Z}}$, – причому $t_{i,\kappa-1}=(i+0,5)h$, $i\in\mathbf{Z}$, $h>0$, то тоді відповідна до $\left\{p_{j,\kappa}\right\}_{j\in\mathbf{Z}}$ послідовність вузлів $\left\{t_{j,\kappa}\right\}_{j\in\mathbf{Z}}$ визначається так: $t_{j,\kappa}=4(j+0,5)h/5$, $j\in\mathbf{Z}$.

Аналогічно, з урахуванням значень сплайнів $S_{21}(p,t)$, $S_{4,0}(p,t)$ у точках $x=1/3$, $x=1$, $x=-1/3$ та якщо $\left\{p_{i,\kappa-1}\right\}_{i\in\mathbf{Z}}$ – початкова послідовність, а $\left\{p_{j,\kappa}\right\}_{j\in\mathbf{Z}}$ – утворена «проектуванням» 4 точок в 3, то маємо таке визначення для $p_{j,\kappa}$.

Нехай індекс j визначається за правилом $j=3l$, $l\in\mathbf{Z}$. Тоді для $\forall l$ справджується:

$$p_{j,\kappa}=\sum_{jj=j+l-2}^{j+l+2}\gamma_{a,jj-(j+l)}^{\left(S_{\bullet,(4\to 3)}\right)}p_{jj,\kappa-1};$$

$$p_{j+1,\kappa}=\sum_{jj=j+l-1}^{j+l+3}\gamma_{b,jj-(j+l+1)}^{\left(S_{\bullet,(4\to 3)}\right)}p_{jj,\kappa-1};$$

$$p_{j+2,\kappa}=\sum_{jj=j+l+1}^{j+l+5}\gamma_{c,jj-(j+l+3)}^{\left(S_{\bullet,(4\to 3)}\right)}p_{jj,\kappa-1},$$

де

$$S_{\bullet,(4\to 5)}=\left\{S_{21,(4\to 3)},S_{40,(4\to 3)}\right\};$$

$$\gamma_a^{\left(S_{21,(4\to3)}\right)}=\frac{1}{108}\begin{pmatrix}-1\\-5\\99\\19\\-4\end{pmatrix};\quad \gamma_b^{\left(S_{21,(4\to3)}\right)}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}0\\-1\\7\\7\\-1\end{pmatrix};$$

$$\gamma_c^{\left(S_{21,(4\to3)}\right)}=\frac{1}{108}\begin{pmatrix}-4\\19\\99\\-5\\-1\end{pmatrix};\ \gamma_a^{\left(S_{40,(4\to3)}\right)}=\frac{1}{1944}\begin{pmatrix}1\\251\\1131\\545\\16\end{pmatrix};$$

$$\gamma_b^{\left(S_{40,(4\to3)}\right)}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}0\\1\\11\\11\\1\end{pmatrix};\ \gamma_c^{\left(S_{40,(4\to3)}\right)}=\frac{1}{1944}\begin{pmatrix}16\\545\\1131\\251\\1\end{pmatrix}.$$

Якщо маємо відповідність послідовності $\left\{p_{i,\kappa-1}\right\}_{i\in\mathbf{Z}}$ – вузлові точки $\left\{t_{i,\kappa-1}\right\}_{i\in\mathbf{Z}}$, причому $t_{i,\kappa-1}=(i+0,5)h$, $i\in\mathbf{Z}$, $h>0$, – то тоді відповідна до $\left\{p_{j,\kappa}\right\}_{j\in\mathbf{Z}}$ послідовність вузлів $\left\{t_{j,\kappa}\right\}_{j\in\mathbf{Z}}$ визначається так: $t_{j,\kappa}=4(j+0,5)h/3$, $j\in\mathbf{Z}$.

Висновки

Отримані в роботі лінійні оператори небінарного масштабування послідовностей відліків гладких функцій дозволяють здійснювати вказану операцію як з вимогою згладжування (з використанням результатів, отриманих зі сплайну $S_{4,0}(p,t)$), так і асимптотично точно (використання сплайну $S_{2,1}(p,t)$).

Обчислювальні процедури на основі запропонованих операторів у разі реалізації їх у програмному забезпеченні задовольняють вимоги обробки даних у режимі реального часу. Останнє є можливим завдяки обмеженій кількості простіших арифметичних операцій поданих функціоналів, на зразок (2).

Подальші дослідження мають враховувати можливість модифікацій поданих лінійних функціоналів щодо інших типів не бінарного масштабування, а також поширення подібного підходу на випадок обробки послідовностей відліків функцій двох та більшої кількості змінних.

Література

1. *Де Бор К.* Практическое руководство по сплайнам. – М.: Радио и связь, 1985. – 303 с.
2. *Роджерс Д., Адамс Дж.* Математические основы машинной графики: пер. с англ. – М.: Мир, 2001. – 604 с.
3. *Чуи Ч.* Введение в вэйвлеты: пер. с англ. – М.: Мир, 2001. – 412 с.
4. *Лигун А.А., Шумейко А.А.* Асимптотические методы восстановления кривых. – К.: ІМ НАН України, 1996. – 358 с.
5. *Приставка П.О.* Поліноміальні сплайни при обробці даних. – Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту, 2004. – 236 с.
6. *Лигун А.А., Шумейко А.А.* Исследования линейных операторов, порожденных методами пополнения данных // Математичне моделювання. − Дніпродзержинськ: ДГТУ, – 2000. – №2 (5).– С. 11–19.
7. *Приставка П.О.* Поліноміальні сплайни в задачах бінарного поповнення // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій. – Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту. – 2003. –Т. 7. – С. 39–53.
8. *Приставка П.О.* Поповнення послідовностей відліків функцій двох змінних на основі поліноміальних сплайнів // Вісн. НАУ. – 2007. – №3–4. – С. 36–39.

Стаття надійшла до редакції 12.05.08.