

УДК 533.6.013(045)

В.Г. Жила, канд. техн. наук, доц.

АНАЛІЗ СТРУКТУР МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ НЕСТАЦІОНАРНИХ АЕРОДИНАМІЧНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ

Розглянуто підходи, на яких ґрунтується отримання математичних моделей аеродинамічних коефіцієнтів. Проведено порівняльний аналіз двох найбільш повних моделей нестационарних аеродинамічних коефіцієнтів. Показано перевагу нестационарної інтегральної моделі аеродинамічних коефіцієнтів.

Approaches as the base for obtaining mathematic models of aerodynamic coefficients are considered. Two most complete models of unsteady aerodynamic coefficients comparable analysis is doing. Unsteady integral model of aerodynamic coefficients advantage is demonstrated.

Постановка проблеми

Необхідність ґрунтовних досліджень нестационарних аеродинамічних ефектів та врахування їх впливу на рух літака впливає з суттєвого внеску цих ефектів у формування сил та моментів, що діють на літак і визначають його рух.

Кількісний аналіз впливу нестационарних аеродинамічних ефектів на рух літака ґрунтується на використанні відповідних математичних моделей (ММ). При цьому суттєвою проблемою є вибір структури ММ та способу отримання числових значень її коефіцієнтів.

У цій роботі проводиться порівняльний аналіз двох найбільш повних моделей нестационарних аеродинамічних коефіцієнтів.

Аналіз публікацій

Досить повний аналіз сучасних задач нестационарної аеродинаміки несучих поверхонь проведений у роботі [1].

Аеродинамічні сили та моменти відповідні до аеродинамічних коефіцієнтів, які є носіями кількісних характеристик залежності аеродинамічних сил та моментів від параметрів руху літака та відхилення керуючих аеродинамічних поверхонь.

Аеродинамічних коефіцієнти є функціями вказаних параметрів. Адекватність та точність відтворення кількісних зв'язків між фізичними величинами за допомогою відповідних математичних залежностей значною мірою визначається вдалим вибором самих математичних залежностей.

Можна виділити кілька підходів до отримання функціональних аналітичних залежностей. Один із них – апроксимація експериментальних залежностей за допомогою аналітичних виразів. Його перевага – очевидна адекватність фізичним залежностям та відносна простота реалізації, недолік – штучність та неоднозначність під час вибору апроксимуючого виразу.

Досить часто математичний вираз, що добре апроксимує експериментальні дані, має таку структуру, в якій певні елементи неможливо інтерпретувати з фізичної точки зору.

Вираз є коректним тільки для умов, які точно відповідають умовам експерименту.

Наступний підхід – розкладання шуканої функції у ряд.

Найчастіше використовують розкладання в ряд Тейлора з утриманням лінійних членів.

Виходячи з фізичних міркувань, роблять припущення, що фізична величина a залежить від фізичних величин b, c, d, e , тобто

$$a = f(b, c, d, e).$$

Саму функцію зображають рядом Тейлора в околі певних фіксованих значень величин b_0, c_0, d_0, e_0 .

Коефіцієнт аеродинамічної піднімальної сили c_{ya} виглядає так:

$$c_{ya} = f(\alpha, \bar{\omega}_z, \bar{\alpha}),$$

де α – кут атаки несучої поверхні;

$$\bar{\omega}_z = \frac{\omega_z b_a}{V_\Gamma};$$

$\bar{\omega}_z$ – відносна кутова швидкість тангажа;

$\bar{\alpha}$ – відносна похідна кута атаки за часом;

$$\bar{\alpha} = \frac{\dot{\alpha} b_a}{V_\Gamma};$$

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt};$$

b_a – середня аеродинамічна хорда несучої поверхні;

V_∞ – відносна швидкість незбуреного потоку.

Після розкладання

$$c_{ya} = f(\alpha, \bar{\omega}_z, \bar{\alpha})$$

в ряд Тейлора отримують

$$c_{ya} = c_{ya0} + c_{ya}^{\alpha} \alpha + c_{ya}^{\bar{\omega}Z} \bar{\omega}_Z + c_{ya}^{\bar{\alpha}} \bar{\alpha}.$$

Доданок $c_{ya}^{\bar{\alpha}} \bar{\alpha}$ відображає внесок нестационарних аеродинамічних ефектів у величину коефіцієнта піднімальної сили.

Величина $\bar{\alpha}$ є швидкістю зміни α , що власне і характеризує його нестационарність.

До недоліків такої структури ММ аеродинамічних коефіцієнтів можна віднести її нездатність відображати вплив “передісторії” руху.

Наявність тільки структури ММ ще не є повною моделлю аеродинамічного коефіцієнта. Щоб мати повну ММ аеродинамічного коефіцієнта ще слід визначити числові значення її параметрів.

Для розглянутої моделі коефіцієнта c_{ya} це значення величин c_{ya0} , c_{ya}^{α} , $c_{ya}^{\bar{\omega}Z}$, $c_{ya}^{\bar{\alpha}}$. Визначення числових значень параметрів ММ є окремою задачею.

Ця задача розв’язується з використанням даних або льотних випробувань, або випробувань моделі літака в аеродинамічних трубах, тобто їх ідентифікація [1].

Суттєвий прогрес сучасних числових методів розв’язання задач аеродинаміки та гідродинаміки [2] дозволяє використовувати їх для знаходження числових значень параметрів ММ.

Ще один підхід для отримання ММ аеродинамічних коефіцієнтів ґрунтується на знаходженні аналітичного розв’язання аеродинамічної задачі обтікання літака потоком повітря та відповідних аналітичних виразів для інтегральних характеристик силової взаємодії літака з потоком.

Трансформуючи інтегральні характеристики відповідно до змісту аеродинамічних коефіцієнтів, знаходять для останніх аналітичні вирази. Параметри аналітичних виразів безпосередньо підраховуються як функції параметрів аеродинамічної задачі.

Очевидно, що такий підхід є найбільш природним та бажаним і, одночасно, найбільш складним, оскільки аналітичний розв’язок задач аеродинамічної взаємодії вдається знайти вкрай рідко, навіть якщо як розв’язок розглядати наближені розв’язки.

Іноді для отримання ММ аеродинамічних коефіцієнтів доцільно застосувати комбінацію розглянутих підходів. Так, для отримання нестационарної інтегральної моделі аеродинамічних коефіцієнтів у роботі [3] було застосовано спрощену вихрову модель, яка відображала ефект нестационарної взаємодії вихрової системи несучої поверхні та вихрової пелени.

Було отримано аналітичні вирази нестационарних аеродинамічних коефіцієнтів несучої поверхні. Ці вирази містять параметри, що є функціями параметра вихрової моделі.

Очевидно, що ММ нестационарних аеродинамічних коефіцієнтів повинна задовольняти дві основні вимоги:

- відображати фізичний зміст явища;
 - узгоджуватися з рівняннями динаміки польоту.
- Ці дві вимоги суперечать одна одній. Першій вимозі повніше відповідають моделі, що отримуються як розв’язок газодинамічних задач обтікання тіл, але безпосереднє застосування цих результатів в задачах динаміки польоту літака ускладнене.

Розкладання аеродинамічних коефіцієнтів у ряд за аеродинамічними похідними дозволяє досить просто використовувати їх у рівняннях динаміки польоту, але у той же час не всі члени цього ряду мають фізичний смисл.

Компромісом є використання ММ аеродинамічних коефіцієнтів, що можуть бути отримані зі спрощених фізичних моделей явища. Фізичні спрощення вводяться з метою спрощення математичного описання та знаходження розв’язку відповідної математичної задачі.

Мета дослідження

Виходячи з того, що існують різні способи отримання та використання ММ аеродинамічних коефіцієнтів виникає проблема їх порівняння з метою оцінювання повноти відображення ними фізичної реальності та зручності застосування під час аналізу руху літака.

Проведення вказаного порівняння на прикладі двох найбільш повних моделей нестационарних аеродинамічних коефіцієнтів становить мету дослідження.

Теоретичні дослідження

Проведемо порівняльний аналіз найчастіше вживаної моделі аеродинамічних коефіцієнтів у вигляді ряду розкладання цих коефіцієнтів за аеродинамічними похідними [1] та нестационарної інтегральної моделі аеродинамічних коефіцієнтів.

Порівняння будемо проводити за такими ознаками:

- повнотою відображення фізичного явища;
- узгодженістю з точки зору простоти застосування з рівняннями руху літака;
- придатністю до знаходження коефіцієнтів моделі методами розв’язку обернених задач – задач ідентифікації аеродинамічних характеристик літака.

Модель аеродинамічних коефіцієнтів у вигляді ряду аеродинамічних похідних

$$c = c_0 + c^{\alpha}\alpha + c^{\bar{\alpha}}\bar{\alpha} + c^{\omega Z}\bar{\omega}_Z + c^{\bar{\omega}Z}\bar{\omega}_Z + c^{\delta}\delta + c^{\bar{\delta}}\bar{\delta} \quad (1)$$

відображає вплив аеродинамічної нестационарності за допомогою членів $c^{\bar{\alpha}}\bar{\alpha}$, $c^{\bar{\omega}Z}\bar{\omega}_Z$, $c^{\bar{\delta}}\bar{\delta}$, де c – довільний аеродинамічний коефіцієнт поздовжнього руху літака).

Така структура не містить інформації про передісторію руху. У разі зміни параметрів руху α, ω_Z, δ у часі за гармонічним законом така ММ точно відображає фізичне явище аеродинамічної нестационарності.

Для нестационарної інтегральної моделі аеродинамічних коефіцієнтів структура має вигляд

$$c = c_0 + c^{\alpha}\alpha + c^{\omega Z}\bar{\omega}_Z + c^{\delta}\delta + c_{D\alpha} + c_{D\omega Z} + c_{D\delta}. \quad (2)$$

У цій структурі складові $c_{D\alpha}$, $c_{D\omega Z}$, $c_{D\delta}$ відображають нестационарні аеродинамічні ефекти з урахуванням передісторії руху.

У свою чергу, вказані складові виражаються формулам:

$$c_{D\alpha} = K^{\alpha}\alpha + \bar{V} \sum_{i=1}^2 k_i^{\alpha} e^{\gamma_i \bar{V} t} \int_0^t e^{-\gamma_i \bar{V} \tau} \alpha(\tau) d\tau,$$

$$c_{D\omega Z} = K^{\omega Z}\omega_Z + \bar{V} \sum_{i=1}^2 k_i^{\omega Z} e^{\gamma_i \bar{V} t} \int_0^t e^{-\gamma_i \bar{V} \tau} \omega_Z(\tau) d\tau,$$

$$c_{D\delta} = K^{\delta}\delta + \bar{V} \sum_{i=1}^2 k_i^{\delta} e^{\gamma_i \bar{V} t} \int_0^t e^{-\gamma_i \bar{V} \tau} \delta(\tau) d\tau,$$

де K^{α} , $K^{\omega Z}$, K^{δ} , k_i^{α} , $k_i^{\omega Z}$, k_i^{δ} , γ_i – функції одного формального параметра;

V_{∞} – швидкість незбуреного потоку;

$$\bar{V} = \frac{V_{\infty}}{b_a},$$

b_a – аеродинамічна хорда.

Якщо параметри поздовжнього руху літака змінюються за гармонічним законом, то інтеграли у виразах для $c_{D\alpha}$, $c_{D\omega Z}$, $c_{D\delta}$ вираховуються у явному вигляді, а вирази (1) і (2) стають однаковими. Нестационарна інтегральна модель реалізує модель у вигляді ряду аеродинамічних похідних як поодинокий випадок, тобто вона є більш загальною.

Моделлю поздовжнього руху літака є система диференціальних рівнянь у формі Коші:

$$\dot{\alpha} = \omega_Z + \frac{g}{V} \cos(J - \alpha) - c_y \frac{qS}{mV} + (c_x - c_p) \frac{qS}{mV};$$

$$J = \omega_Z;$$

$$\dot{\omega}_Z = \frac{1}{J_Z} qS b_a m_Z;$$

$$\dot{V} = g \sin(J - \alpha) - (c_x - c_p) \frac{qS}{m} - c_y \frac{qS}{mV}; \quad (3)$$

$$\dot{H} = V \sin(J - \alpha);$$

$$\dot{L} = V \cos(J - \alpha);$$

$$c_y = c_{ya} \cos \alpha + c_{xa} \sin \alpha;$$

$$c_x = c_{xa} \cos \alpha - c_{ya} \sin \alpha.$$

Коефіцієнти аеродинамічних сил підраховуються за виразами відповідно до прийнятої моделі.

Якщо прийняти модель ряду аеродинамічних похідних, то похідні за часом $\dot{\alpha}$, $\dot{\omega}_Z$ будуть в лівих і правих частинах рівнянь.

Ці рівняння можна розглядати як лінійні алгебричні відносно похідних $\dot{\alpha}$, \dot{J} , $\dot{\omega}_Z$, \dot{V} , \dot{H} , \dot{L} .

Розв'язавши рівняння із відносно вказаних похідних, отримаємо трансформовану систему диференціальних рівнянь поздовжнього руху літака.

У цих рівняннях вплив аеродинамічної нестационарності буде відображений зміною інерційних членів руху та стаціонарних аеродинамічних коефіцієнтів у порівнянні з вихідною системою. Розв'язання систем диференціальних рівнянь у формі Коші не є математичною проблемою.

Якщо прийняти нестационарну інтегральну модель аеродинамічних коефіцієнтів, то моделлю поздовжнього руху літака також буде система диференціальних рівнянь у формі Коші. Для отримання вказаної системи інтегральні співвідношення для підрахунку $c_{D\alpha}$, $c_{D\omega Z}$, $c_{D\delta}$ замінюються еквівалентними диференціальними рівняннями шляхом введення формальних змінних. У результаті вказаних перетворень система диференціальних рівнянь (3) поздовжнього руху літака, доповниться такими рівняннями та виразами (диференціальними, алгебричними, тригонометричними):

$$\begin{aligned}
\dot{Z}_1 &= \gamma_1 \bar{V} Z_1 + \alpha; \\
\dot{Z}_2 &= \gamma_2 \bar{V} Z_2 + \alpha; \\
\dot{\zeta}_1 &= \gamma_1 \bar{V} \zeta_1 + \alpha; \\
\dot{\zeta}_2 &= \gamma_2 \bar{V} \zeta_2 + \alpha; \\
\dot{\xi}_1 &= \gamma_1 \bar{V} \xi_1 + \alpha; \\
\dot{\xi}_2 &= \gamma_2 \bar{V} \xi_2 + \alpha; \\
c_{ya} &= c_{y0} + c_y^a \alpha + c_y^{\omega Z} \bar{\omega}_Z + c_y^\delta \delta + \\
&+ c_{yDa} + c_{yD\omega Z} + c_{yD\delta} + \Delta c_y(\varepsilon_{ГО}); \\
c_{xa} &= c_{x0} + c_x^a \alpha^* + c_x^{\alpha^2} (\alpha^*)^2; \\
m_Z &= m_{Z0} + m_Z^a \alpha + m_Z^{\omega Z} \bar{\omega}_Z + m_Z^\delta \delta + \\
&+ m_{ZDa} + m_{ZD\omega Z} + m_{ZD\delta} + \Delta m_Z(\varepsilon_{ГО}); \\
c_{yDa} &= K^a \alpha + \bar{V} (k_1^a Z_1 + k_2^a Z_2); \\
c_{yD\omega Z} &= K^{\omega Z} \omega_Z + \bar{V} (k_1^{\omega Z} \zeta_1 + k_2^{\omega Z} \zeta_2); \\
c_{yD\delta} &= K^\delta \delta + \bar{V} (k_1^\delta \xi_1 + k_2^\delta \xi_2); \\
\Delta c_y(\varepsilon_{ГО}) &= c_{ГО}^a \frac{\|\varepsilon\|}{\|\alpha\|} \alpha^*; \\
m_{ZDa} &= L^a \alpha + \bar{V} (l_1^a Z_1 + l_2^a Z_2); \\
m_{ZD\omega Z} &= L^{\omega Z} \omega_Z + \bar{V} (l_1^{\omega Z} \zeta_1 + l_2^{\omega Z} \zeta_2); \\
m_{ZD\delta} &= L^\delta \delta + \bar{V} (l_1^\delta \xi_1 + l_2^\delta \xi_2); \\
\Delta m_Z(\varepsilon_{ГО}) &= \bar{L}_{ГО} \Delta c_y(\varepsilon_{ГО}); \\
\alpha^* &= \alpha + \frac{c_{yDa}}{c_y^a}; \\
\bar{V} &= \frac{V}{b}.
\end{aligned}
\tag{4}$$

Наведена система диференціальних рівнянь (4) легко розв'язується існуючими стандартними методами.

Визначення параметрів моделі аеродинамічних коефіцієнтів у вигляді ряду аеродинамічних похідних за даними льотних випробувань або випробувань в аеродинамічних трубах проводяться за процедурами статистичного оцінювання параметрів.

Структура моделі узгоджується з цими процедурами.

Нестационарна інтегральна модель аеродинамічних коефіцієнтів нелінійна щодо параметрів. Безпосереднє знаходження параметрів моделі аеродинамічних коефіцієнтів з нестационарними інтегральними членами зводиться до задачі нелінійного оцінювання.

Знаходження оцінок коефіцієнтів моделі з інтегральними членами за методом найменших квадратів трансформується до знаходження мінімуму функціонала.

Розв'язати останню задачу можна будь-яким методом, що мінімізує функціонал.

Висновки

Проведені порівняння вказують на переваги нестационарної інтегральної моделі аеродинамічних коефіцієнтів над моделлю у вигляді ряду аеродинамічних похідних. Єдиним недоліком нестационарної інтегральної моделі є складність оцінювання її параметрів. Але цей недолік можна усунути, створивши спеціалізовану процедуру оцінювання параметрів моделі.

Логічним обґрунтуванням можливості створення процедури оцінювання є сама процедура побудови моделі.

Література

1. Ударцев Е.П., Переверзев А.М., Швець А.В. Нестационарная аэродинамика несущих поверхностей // Аэродинамика: проблемы и перспективы: сб. науч. тр. – Х.: Нац. аэрокосмический ун-т «ХАИ», 2006. – Вып. 2. – С. 306.
2. Приходько А.А. Компьютерные технологии в аэродинамике и теплообмене. – К.: Наук. думка, 2003. – 380 с.
3. Жила В.Г. Интегральная математическая модель для коэффициента подъемной силы // Некоторые вопросы прикладной аэродинамики: сб. науч. тр. – К.: КИИГА, 1985. – С. 56–59.