ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

УДК 519.65+681.518.2

В.П. Денисюк, д-р фіз.-мат. наук, проф.
А.І. Бабко, старш. викл.
О.О. Гурнік, асист.

СИСТЕМИ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Розглянуто системи фундаментальних поліноміальних функцій нульового, першого та другого рівнів, наведено графіки цих функцій.

The systems of fundamental polinomial functions of the order zero, first and second are considered. The graphs of these functions are constructed.

Постановка проблеми

Існує клас числових методів, у разі застосування яких наближений розв'язок задач для лінійних диференціальних операторів типу

$\mathrm{Lu} = f$

шукають у вигляді

$$u(x) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \varphi_j(x),$$

де α_j – невизначені параметри.

У багатьох випадках ці параметри не мають очевидного фізичного змісту. Проте є такий варіант цих методів, коли в ролі невизначених параметрів вибирають значення u_j функції u у вузлах певних сіток. Ці значення мають прямий фізичний зміст.

Побудова розв'язку в термінах вузлових значень має певні переваги.

Перш за все, остаточний розв'язок приносить безпосередню користь. Наприклад, якщо розглядається обтікання крилового профілю, то в багатьох випадках достатньо знати тиск у сукупності точок, відокремлених дискретними інтервалами, і отримання наближеного розв'язку зводиться до визначення його значень на поверхні. Отже, знайшовши вузлові значення, фактично одержимо розподіл тиску на поверхні.

Другою важливою перевагою такого підходу є те, що формулювання задачі в термінах вузлових значень дозволяє ототожнювати функції $\varphi_j(x)$ певного виду з конкретними вузловими точками. Якщо ці функції визначені в обмежених просторових межах, то відповідні рівняння, отримані після застосування, наприклад, методу Гальоркіна, також будуть пов'язані з обмеженими просторовими областями, що оточують вузлові точки.

Можливість ототожнення вузлових точок з просторовими областями є дуже корисною для розв'язання нелінійних рівнянь, оскільки вивчення розв'язку такого рівняння дозволяє визначити ті ділянки області, де збіжність розв'язку погана або, навпаки, добра.

Мета роботи – побудова систем фундаментальних нормованих поліноміальних функцій $\varphi_j(x)$ нульового, першого та другого рівнів (рис. 1–14).

Зауваження. Графіки функцій наводяться при значеннях параметрів $a = 1$, $b = 7$, $N = 7$, $j = 5$.

Ідея інтерполяції функції узагальненим многочленом за деякою системою функцій $\varphi_j(x)$ ($j \in Z$), коефіцієнтами якого є значення інтерпольованої функції у вузлах деякої сітки, тобто многочленом вигляду

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} f(x_j)\varphi_j(x), \qquad (1)$$

і натепер не втратила своєї актуальності. Оскільки під час реалізації цієї ідеї головним є вибір систем функцій $\varphi_j(x)$, розглянемо умови, яким повинні задовольняти функції таких систем, більш детально.

Нехай інтерпольована функція $f(x)$ розглядається на відрізку [a; $в$]. Припустимо також, що на цьому відрізку задано деяку еквідистантну сітку

$\Delta_N = \{x\}_{j=1}^{N}$;

$x_j = a + h(j-1)$;

$h = \dfrac{b-a}{N-1}$.

Позначимо через $f_j^{(k)}$ $(k = 0,1,2)$ значення самої функції та її похідних відповідно k-го порядку.

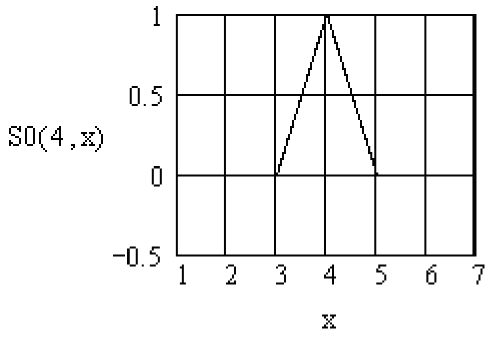

Рис. 1. Функція $S_j^{(0)}(x)$ нульового рівня

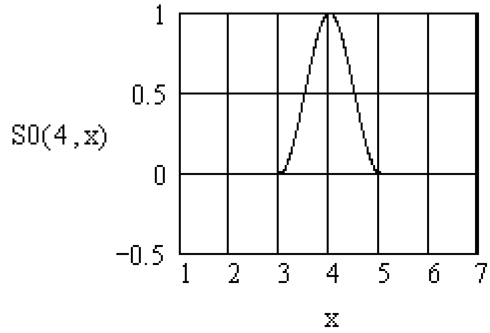

Рис. 2. Функція $S_j^{(0)}(x)$ першого рівня

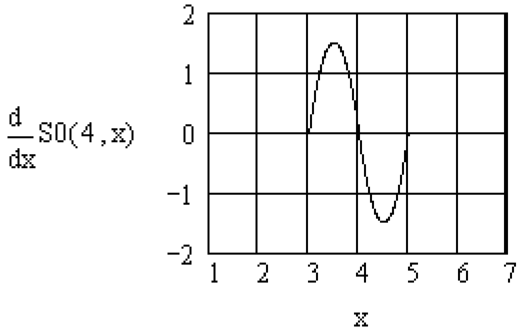

Рис. 3. Похідна функції $S_j^{(0)}(x)$ першого рівня

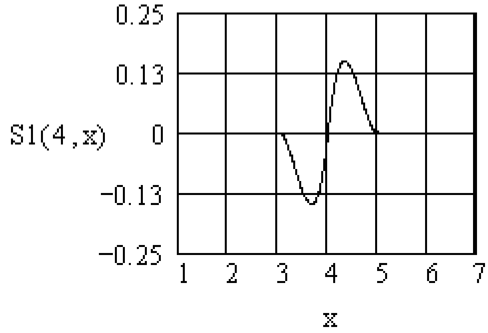

Рис. 4. Функція $S_j^{(1)}(x)$ першого рівня

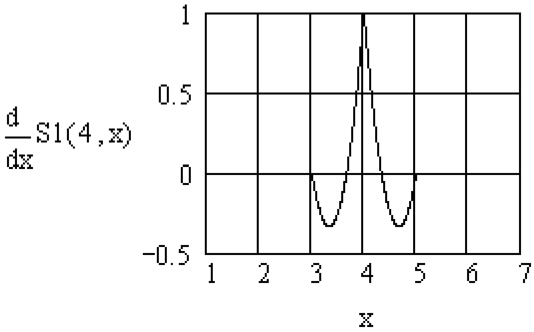

Рис. 5. Похідна функції $S_j^{(1)}(x)$ першого рівня

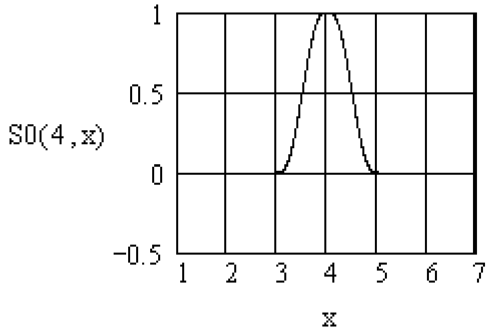

Рис. 6. Функція $S_j^{(0)}(x)$ другого рівня

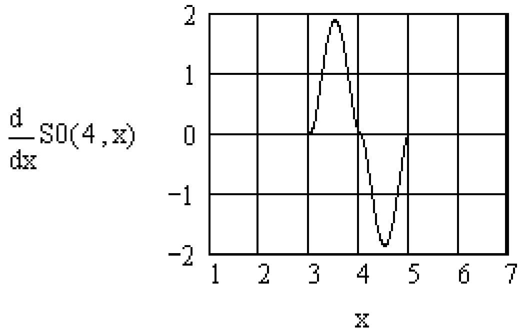

Рис. 7. Похідна функції $S_j^{(0)}(x)$ другого рівня

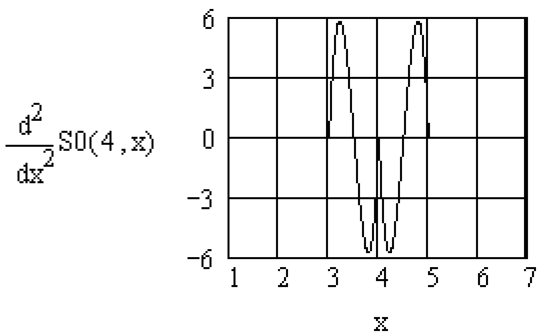

Рис. 8. Друга похідна функції $S_j^{(0)}(x)$

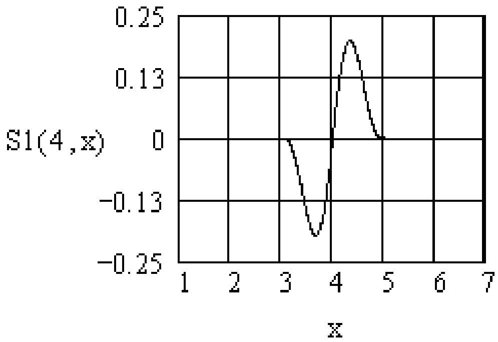

Рис. 9. Функція $S_j^{(1)}(x)$ другого рівня

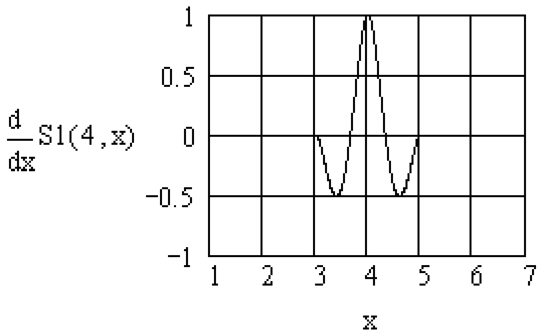

Рис. 10. Похідна функції $S_j^{(1)}(x)$ другого рівня

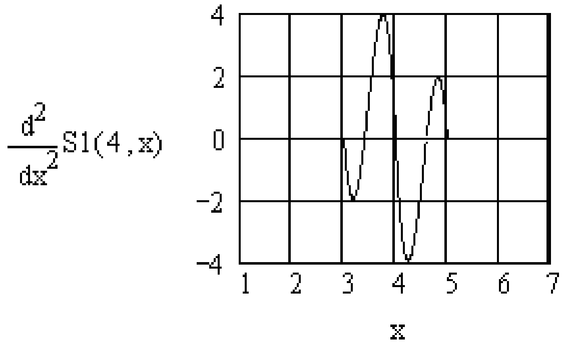

Рис. 11. Друга похідна функції $S_j^{(1)}(x)$

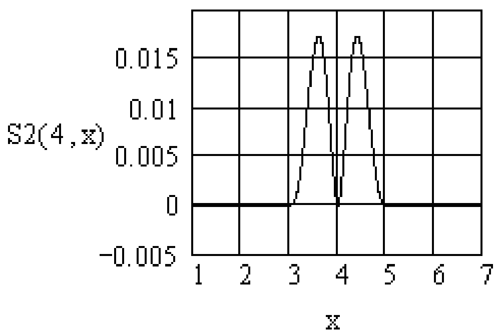

Рис. 12. Функція $S_j^{(2)}(x)$

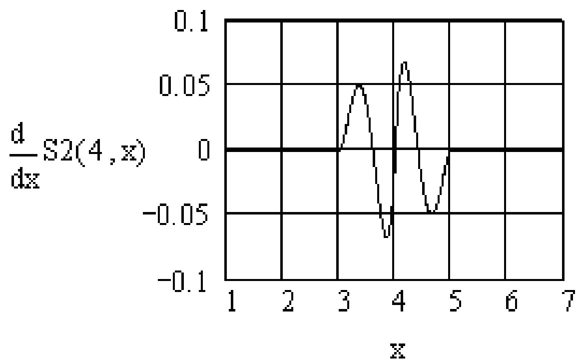

Рис. 13. Похідна функції $S_j^{(2)}(x)$

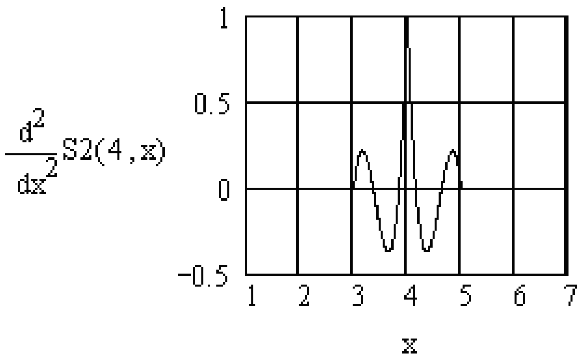

Рис.14. Друга похідна функції $S_j^{(2)}(x)$

Системи функцій $\varphi_j(x)$, які можуть застосовуватися для подання (1), на сітках Δ_N мають задовольняти співвідношення

$$\varphi_j(x_j)=\begin{cases}1, & j=i;\\ 0, & j\neq i.\end{cases} \qquad (2)$$

Такі системи функцій називають фундаментальними [1].

У роботі [2] уведено узагальнення означення фундаментальності (2).

Системи функцій $\varphi_j(x)$, $\varphi_j(x)\in C^m$ називають фундаментальними рівня k, якщо вони задовольняють умови

$$\varphi_j^{(k)}(x_j)=\begin{cases}\alpha_j^{(k)}, & j=i;\\ 0, & j\neq i;\end{cases}$$

$$k=0,1,\ldots,m;\quad m=0,1,\ldots\ . \qquad (3)$$

Якщо $\alpha_j^{(k)}=1$ за всіх значень параметрів j,k, то фундаментальні системи функцій рівня k називатимемо нормованими.

У світлі означення (3) системи фундаментальних функцій, що задовольняють умови (2), є системами фундаментальних нормованих функцій нульового рівня.

До фундаментальних систем нормованих функцій нульового рівня, найвідоміших натепер, належать системи функцій Шеннона та інтерполяційних многочленів Лагранжа.

У цій роботі розглядаються системи фундаментальних нормованих поліноміальних функцій нульового, першого та другого рівнів, які складаються відповідно з поліномів першого, третього та п'ятого порядків.

Фундаментальні функції нульового рівня

Фундаментальні функції нульового рівня задаються рівнянням вигляду (рис. 1)

$$S_j^{(0)}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}, x_{j-1}\le x\le x_j;\\ \dfrac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j}, x_j\le x\le x_{j+1};\\ 0 \quad , x<x_{j-1}, x>x_{j+1};\end{cases}$$

Ураховуючи введені позначення, функцію $f_N^*(x)$, що інтерполює функцію $f(x)$ у вузлах сітки $\varDelta_N$, можна подати у вигляді

$$f_N^*(x)=\sum_{j=1}^{N} f_j^{(0)} S_j^{(0)}(x).$$

Функція $f_N^*(x)$ неперервна, тобто $f_N^*(x)\in C^0$.

Фундаментальні функції першого рівня

Функції першого рівня визначаються так:

$$S_j^{(0)}(x)=\begin{cases}C(j,x), \quad x_{j-1}\le x\le x_j;\\ (1-C(j+1,x)),\ x_j\le x\le x_{j+1};\\ 0, \quad x<x_{j-1},\ x>x_{j+1};\end{cases}$$

$$S_j^{(1)}(x)=\begin{cases}-h\cdot V(j,x)\cdot R^2(j,x),\ x_{j-1}\le x\le x_j;\\ h\cdot V^2(j+1,x)\cdot R(j+1,x), x_j\le x\le x_{j+1};\\ 0, \quad x<x_{j-1},\ x>x_{j+1};\end{cases}$$

де $R(j,x)=\dfrac{x-x_{j-1}}{h}$ (4)

$V(j,x)=1-R(j,x);$ (5)

$C(j,x)=3R^2(j,x)-2R^3(j,x).$ (6)

Графіки функцій $S_j^{(0)}(x)$, $S_j^{(1)}(x)$ та їх перших похідних зображено на рис. 2–5.

Ураховуючи введені позначення, функцію $f_N^*(x)$, що інтерполює функцію $f(x)$ та її першу похідну у вузлах сітки $\varDelta_N$ можна подати у вигляді

$$f_N^*(x)=\sum_{j=1}^{N} f_j^{(0)} S_j^{(0)}(x)+\sum_{j=1}^{N} f_j^{(1)} S_j^{(1)}(x).$$

Функція $f_N^*(x)$ та її перша похідна є неперервними функціями, тобто $f_N^*(x)\in C^1$.

Фундаментальні функції другого рівня

Фундаментальні функції другого рівня визначаються так:

$$S_j^{(0)}(x)=\begin{cases}R^3(j,x)\cdot(1+3\cdot V(j,x)+\\ +6\cdot V^2(j,x)), \qquad x_{j-1}\le x\le x_j;\\ V^3(j+1,x)\cdot(1+3\cdot R(j+1,x)+\\ +6\cdot R^2(j+1,x)), \qquad x_j\le x\le x_{j+1};\\ 0, \qquad x<x_{j-1},\ x>x_{j+1}\end{cases}$$

$$S_j^{(1)}(x)=\begin{cases}-h\cdot V(j,x)\cdot R^3(j,x)\times\\ \times(1+3\cdot V(j,x)), x_{j-1}\le x\le x_j;\\ h\cdot V^3(j+1,x)\cdot R(j+1,x)\times\\ \times(1+3\cdot R(j+1,x)), x_j\le x\le x_{j+1};\\ 0, \qquad x<x_{j-1},\quad x>x_{j+1};\end{cases}$$

$$S_j^{(2)}(x)=\begin{cases}0.5\cdot h^2\cdot V^2(j,x)\times\\ \times R^3(j,x), x_{j-1}\le x\le x_j;\\ 0.5\cdot h^2\cdot V^3(j+1,x)\times\\ \times R^2(j+1,x), x_j\le x\le x_{j+1};\\ 0, \quad x<x_{j-1},\ x>x_{j+1};\end{cases}$$

де $R(j,x)$,, $V(j,x)$, $C(j,x)$ визначають за формулами (4), (5), (6) відповідно.

Графіки функцій $S_j^{(0)}(x)$, $S_j^{(1)}(x)$, $S_j^{(2)}(x)$ та їх першої та другої похідних зображено на рис. 6–14.

Ураховуючи введені раніше позначення, функцію $f_N^*(x)$, що інтерполює функцію $f(x)$ та її першу та другу похідні у вузлах сітки Δ_N, можна подати у вигляді

$$f_N^*(x) = \sum_{j=1}^{N} f_j^{(0)} S_j^{(0)}(x) + \sum_{j=1}^{N} f_j^{(1)} S_j^{(1)}(x) + \sum_{j=1}^{N} f_j^{(2)} S_j^{(2)}(x).$$

Функція $f_N^*(x)$ та її перша та друга похідні є неперервними функціями, тобто $f_N^*(x) \in C^2$.

Висновки

Фундаментальні функції нульового, першого та другого рівнів можуть застосовуватися в задачах моделювання та оброблення вимірювальних сигналів.

Література

1. *Элементы* теории функций / Р.С. Гутер и др. – М.: Физматгиз, 1963. – 244 с.

2. *Denysiuk V.P.* Fundamental function and their application // The World Congress "Aviation in the XXI st Century". – Kyiv, 2003. – P. 8.88–8.91.

Стаття надійшла до редакції 17.12.07.