ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

УДК 514.763

М.Ф. Гребенюк, д-р техн. наук

АФІННІ ЗВ'ЯЗНОСТІ, АСОЦІЙОВАНІ З ОСНАЩУВАЛЬНИМИ РОЗПОДІЛАМИ ТРИСКЛАДОВОГО РОЗПОДІЛУ АФІННОГО ПРОСТОРУ

Інститут транспортних технологій НАУ, e-mail: ahha@/com.ua

Розглянуто диференціальну геометрію багатоскладових розподілів багатовимірних просторів. Установлено, що при інваріантній нормалізації базисного розподілу внутрішнім чином самим трискладовим розподілом у головному розшарованому багатовиді визначаються афінні зв'язності. Знайдено компоненти тензора кривини і скруту цих зв'язностей.

Геометрія розподілів у проективному, афінному і евклідовому просторах, а також у просторах афінної і проективної зв'язності інтенсивно вивчається з різних боків. Необхідність дослідження пояснюється численними зв'язками цієї теорії з різними розділами геометрії, які безпосереднє застосують у фізиці, механіці, теорії оптимізації. Саму теорію розподілів також використовують у механіці, теоретичній фізиці, варіаційному численні.

У працях Г.Ф. Лаптєва [1], Н.М. Остіану [2; 3], А.В. Столярова [4], Ю.І. Попова [5] розглядалися шляхи узагальнення теорії регулярних і вироджених гіперсмуг і смуг із застосуванням теорії розподілів та їхніх узагальнень в афінних, проективних просторах, а також у просторах із проективною зв'язністю. Дослідження теорії багатоскладових розподілів і випадків їх голономності, а саме теорії трискладових розподілів афінного простору, викликає визначний інтерес.

Багатоскладові розподіли багатовимірних просторів являють собою нові геометричні образи і дозволяють узагальнити теорію гіперсмугових розподілів, регулярних і вироджених гіперсмуг, смуг, поверхонь повного і неповного рангу, дотично-оснащених поверхонь.

Для реалізації мети дослідження багатовидів багатовимірних просторів, які є новими геометричними образами в теорії розподілів, поставлено та вирішено таку задачу: встановити, що інваріантна нормалізація базисного розподілу індукує афінні зв'язності з кривиною і скрутом, які асоційовані з оснащувальними розподілами та визначаються внутрішнім способом самим трискладовим розподілом.

Розглянемо (n+1)-вимірний афінний простір A_{n+1}, віднесений до репера $R = \{A, \vec{e}_I\}$.

Диференціальні рівняння інфінітезимальних переміщень репера *R* мають вигляд:

$$dA = \omega^I \vec{e}_I;$$

$$d\vec{e}_I = \omega_I^K \vec{e}_K,$$

де ω_I^K, ω^I – інваріантні форми афінної групи, що задовольняють рівняння структури:

$$d\omega^I = \omega^K \wedge \omega_K^I;$$

$$d\omega_I^K = \omega_I^J \wedge \omega_J^K.$$

Структурні форми поточної точки

$X = A + x^I \vec{e}_I$ простору A_{n+1} мають вигляд

$$\Delta X^I \overset{\text{def}}{=} dx^J + x^K \omega_K^I + \omega^J.$$

Сполучення поточної точки X із точкою репера A зводить до співвідношення

$$\Delta X^J = \omega^J.$$

Умову нерухомості точки A запишемо як $\omega^J = 0$. Обраний у такий спосіб репер назвемо репером $\widetilde{R}$.

Нехай Π_r – r-вимірна площина A_{n+1}, яка задана так:

$$\Pi_r = \left[A, \vec{L}_p\right];$$

де $\vec{L}_p = \vec{e}_p + \Lambda_p^{\hat{u}} \vec{e}_{\hat{u}}$.

У репері $\widetilde{R}$ структурні форми багатовиду r-вимірних площин Π_r мають вигляд:

$$\Delta\Lambda_p^{\hat{u}} = \nabla\Lambda_p^{\hat{u}} - \Lambda_q^{\hat{u}} \Lambda_p^{\hat{v}} \omega_{\hat{v}}^q + \omega_p^{\hat{u}},$$

де $\nabla\Lambda_p^{\hat{u}} = d\Lambda_p^{\hat{u}} + \Lambda_p^{\hat{v}} \omega_{\hat{v}}^{\hat{u}} - \Lambda_q^{\hat{u}} \omega_p^q$.

Умову стаціонарної площини Π_r визначаємо за рівністю $\Lambda_p^{\hat{u}} = 0$. Нехай m-вимірна площина Π_m задана в такий спосіб:

$$\Pi_m = \left[A, \vec{M}_a\right],$$

де $\vec{M}_a = \vec{e}_a + M_a^{\hat{\alpha}} \vec{e}_{\hat{\alpha}}$.

У репері $\widetilde{R}$ структурні форми багатовиду m-вимірних площин Π_m мають вигляд:

$$\Delta M_a^{\hat\alpha} = \nabla M_a^{\hat\alpha} - M_b^{\hat\alpha} M_a^{\hat\beta} \omega_{\hat\beta}^b + \omega_a^{\hat\alpha};$$

де $\nabla M_a^{\hat\alpha} = dM_a^{\hat\alpha} - M_a^{\hat\beta}\omega_{\hat\beta}^{\hat\alpha} - M_b^{\hat\alpha}\omega_a^b$.

Структурні форми багатовиду гіперплощин

$$\Pi_n = \left[A, \vec{T}_\sigma\right],$$

де $\vec{T}_\sigma = \vec{e}_\sigma + H_\sigma^{n+1}\vec{e}_{n+1}$,

запишемо в репері $\widetilde{R}$ у такий спосіб:

$$\Delta H_\sigma^{n+1} = \nabla H_\sigma^{n+1} - H_\sigma^{n+1} H_\tau^{n+1}\omega_{n+1}^\tau + \omega_\sigma^{n+1} + H_\sigma^{n+1}\omega_{n+1}^{n+1},$$

де $\nabla H_\sigma^{n+1} = dH_\sigma^{n+1} - H_\tau^{n+1}\omega_\sigma^\tau$.

Припустимо, що в деякій області простору A_{n+1} для будь-якого центра A є співвідношення

$$A \in \Pi_r \subset \Pi_m \subset \Pi_n. \qquad (1)$$

Трійку розподілів (Λ-розподіл, M-розподіл, H-розподіл) з співвідношенням інцидентності (1) їхніх відповідних елементів назвемо афінним трискладовим гіперсмуговим розподілом рангу r чи $H(M(\Lambda))$-розподілом афінного простору A_{n+1}, в якому Λ-розподіл назвемо базисним, а M-розподіл і H-розподіл – розподілами, що оснащують.

Вимога до інцидентності рівносильна співвідношенням:

$$\vec{L}_p = y_p^a \vec{M}_a;$$

$$\vec{M}_a = z_a^\sigma \vec{T}_\sigma,$$

які призводять до рівнянь:

$$\begin{aligned} &y_p^q = \delta_p^q;\\ &\Lambda_p^i = y_p^i;\\ &\Lambda_p^{\hat\alpha} = M_p^{\hat\alpha} + \Lambda_p^i M_i^{\hat\alpha};\\ &z_a^b = \delta_a^b;\\ &M_a^\alpha = z_a^\alpha;\\ &M_a^{n+1} = H_a^{n+1} + M_a^\alpha H_\alpha^{n+1}. \end{aligned} \qquad (2)$$

Диференціюючи рівності (2), одержимо:

$$\Lambda_{pK}^{\hat\alpha} = M_{pK}^{\hat\alpha} + \Lambda_{pK}^i M_i^{\hat\alpha} + \Lambda_p^i M_{iK}^{\hat\alpha};$$

$$M_{aK}^{n+1} = H_{aK}^{n+1} + M_{aK}^\alpha H_\alpha^{n+1} + M_a^\alpha H_{\alpha K}^{n+1}.$$

Зробимо таку канонізацію репера: вектори $\overline{e}_p$ помістимо в площину Π_r, вектори $\overline{e}_i$ – у площину Π_m, а вектори $\overline{e}_\sigma$ – у площину Π_n. Такий репер назвемо репером нульового порядку R^0. Його визначення веде за собою такі рівності:

$$\begin{aligned} &\Lambda_p^{\hat u} = 0;\\ &M_a^{\hat\alpha} = 0;\\ &H_\sigma^{n+1} = 0. \end{aligned} \qquad (3)$$

Через рівності (3) канонізовані структурні форми мають вигляд:

$$\Delta\Lambda_p^{\hat u} = \omega_p^{\hat u};$$

$$\Delta M_a^{\hat\alpha} = \omega_a^{\hat\alpha};$$

$$\Delta H_\sigma^{n+1} = \omega_\sigma^{n+1},$$

де зокрема:

$$\Lambda_{pK}^{\hat\alpha} = M_{pK}^{\hat\alpha};$$

$$M_{aK}^{n+1} = H_{aK}^{n+1};$$

$$H_{pK}^{n+1} = M_{pK}^{n+1} = \Lambda_{pK}^{n+1}.$$

У репері R^0 $H(M(\Lambda))$-розподіл задається системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} &\omega_p^{\hat u} = \Lambda_{pK}^{\hat u}\omega^K;\\ &\omega_i^{\hat\alpha} = M_{iK}^{\hat\alpha}\omega^K;\\ &\omega_\alpha^{n+1} = H_{\alpha K}^{n+1}\omega^K. \end{aligned} \qquad (4)$$

Диференціюючи рівняння (4) зовнішнім чином одержимо:

$$\Delta\Lambda_{pK}^{\hat u} = \Lambda_{pKI}^{\hat u}\omega^I;$$

$$\Delta M_{iK}^{\hat\alpha} = M_{iKI}^{\hat\alpha}\omega^I;$$

$$\Delta H_{\alpha K}^{n+1} = H_{\alpha KI}^{n+1}\omega^I,$$

де

$$\Delta\Lambda_{pK}^i = \nabla\Lambda_{pK}^i + \Lambda_{pK}^{\hat\alpha}\omega_{\hat\alpha}^i;$$

$$\Delta\Lambda_{pK}^\alpha = \nabla\Lambda_{pK}^\alpha + \Lambda_{pK}^{n+1}\omega_{n+1}^\alpha;$$

$$\Delta\Lambda_{pK}^{n+1} = \nabla\Lambda_{pK}^{n+1} + \Lambda_{pK}^{n+1}\omega_{n+1}^{n+1};$$

$$\Delta M_{iK}^\alpha = \nabla M_{iK}^\alpha + M_{iK}^{n+1}\omega_{n+1}^\alpha - \Lambda_{pK}^\alpha\omega_i^P;$$

$$\Delta M_{iK}^{n+1} = \nabla M_{iK}^{n+1} + M_{iK}^{n+1}\omega_{n+1}^{n+1} - \Lambda_{pK}^{n+1}\omega_i^P;$$

$$\Delta H_{\alpha K}^{n+1} = \nabla H_{\alpha K}^{n+1} + H_{\alpha K}^{n+1}\omega_{n+1}^{n+1} - \Lambda_{pK}^{n+1}\omega_\alpha^P - M_{iK}^{n+1}\omega_\alpha^i.$$

Величини Λ_{pq}^{n+1} утворюють тензор.

На підставі леми Н.М. Остіану [2] затверджуємо, що репер нульового порядку R^0 можна канонізувати так, щоб компоненти M_{iq}, $H_{\alpha q}$, $H_{\alpha i}$ фундаментального об'єкта

$$\Gamma_1 = \left\{\Lambda_{pK}, \Lambda_{pK}^u, M_{iK}^\alpha, M_{iK}, H_{\alpha K}\right\}$$

першого порядку розподілу $H(M(\Lambda))$ мали нульові значення, тобто покладемо

$M_{iq} = 0$; $H_{\alpha q} = 0$; $H_{\alpha i} = 0$.

Тут і надалі верхній індекс n+1 будемо випускати.

Тоді система рівнянь H(M(Λ))-розподілу в репері R^0, розв'язна щодо форм $\omega_i^p, \omega_\alpha^p, \omega_\alpha^j$, дозволяє одержати: $\omega_u^p = A_{uK}^p \omega^K$, $\omega_\alpha^j = A_{\alpha K}^j \omega^K$, і форми ω_u^p і ω_α^j стають головними. Отриманий репер назвемо репером першого порядку $\overline{R}^1$ розподілу H(M(Λ)). В обраному репері $\overline{R}^1$ розподіл H(M(Λ)) задається системою диференціальних рівнянь:

$$\omega_p^{\hat{u}} = \Lambda_{pK}^{\hat{u}} \omega^K;$$

$$\omega_i^\alpha = M_{iK}^\alpha \omega^K;$$

$$\Lambda_u^p = A_{uK}^p \omega^K;$$

$$\omega_i^{n+1} = M_{i\hat{u}} \omega^{\hat{u}};.$$

$$\omega_\alpha^{n+1} = H_{\alpha\hat{\lambda}} \omega^{\hat{\lambda}};$$

$$\omega_\alpha^j = A_{\alpha K}^j \omega^K.$$

Розглянемо H(M(Λ))-розподіл, на якому маємо поле оснащувального вектора $\vec{v}$:

$$\vec{v} = v^p \vec{e}_\rho + v^i \vec{e}_i + v^\alpha \vec{e}_\alpha + \vec{e}_{n+1},$$

де об'єкт $v^\rho = \{v^p; v^i; v^\alpha\}$ задовольняє диференціальні рівняння:

$$\nabla v^\rho + \omega_{n+1}^\rho = v_{n+1J}^\rho \omega^J. \qquad (5)$$

З рівнянь (5) випливає, що під час вибору поля нормалей першого роду H-розподілу, які визначні полем квазітензора v^ρ, можна канонізувати [2] репер $\overline{R}^1$ так, щоб було: $v^\rho=0$. Форми ω_{n+1}^ρ стають головними:

$$\omega_{n+1}^\rho = v_{n+1J}^\rho \omega^J.$$

Отриманий репер назвемо репером, адаптованим полю нормалей першого роду $[A, \vec{v}]$ H-розподілу. Геометричний сенс цієї канонізації – в поєднанні вектора $\vec{e}_{n+1}$ з нормаллю $\vec{v}$.

На розшарованому багатовиду, базою якого є вихідний афінний простір A_{n+1}, визначено такі зв'язності.

1. Система форм $\{\omega^a, \omega_b^a\}$ визначає афінну зв'язність Γ_4, індуковану полем нормалей першого роду $\vec{v}$ на оснащувальному M-розподілі. Тензори кривини і скруту зв'язності Γ_4 мають вигляд:

$$R_{\alpha\hat{K}}^a, \nabla_\delta R_{\alpha\hat{K}}^a = 0;$$

$$R_{bKL}^a \equiv \{\overline{R}_{qKL}^p, R_{jKL}^p, R_{qKL}^i, \overline{R}_{jKL}^i\};$$

$$\nabla_\delta R_{bKL}^a = 0,$$

де

$$\overline{R}_{qKL}^p = 2\left(\Lambda_{q[K}^\alpha A_{|\alpha|L]}^p + \Lambda_{q[K} v_{|n+1|L]}^p\right);$$

$$R_{iKL}^p = 2\left(M_{i[K}^\alpha A_{|\alpha|L]}^p + M_{i\hat{u}} \delta^{\hat{u}}{}_{[K} v_{|n+1|L]}^p\right)$$

$$R_{pKL}^i = 2\left(\Lambda_{p[K}^\alpha A_{|\alpha|L]}^i + \Lambda_{p[K} v_{|n+1|L]}^i\right);$$

$$\overline{R}_{jKL}^i = 2\left(M_{j[K}^\alpha A_{|\alpha|L]}^i + M_{j\hat{u}} \delta_{[K}^{\hat{u}} v_{|n+1|L]}^i\right).$$

2. Для системи форм $\{\omega^\pi, \omega_\rho^\pi\}$ маємо структурні рівняння:

$$D\omega^\pi = \omega^\rho \wedge \omega_\rho^\pi + R_{n+1K}^\pi \omega^{n+1} \wedge \omega^K;$$

$$D\omega_\rho^\pi = \omega_\rho^\sigma \wedge \omega_\sigma^\pi + \frac{1}{2} R_{\rho KL}^\pi \omega^K \wedge \omega^L.$$

Отже, система форм $\{\omega^\pi, \omega_\rho^\pi\}$ визначає афінну зв'язність Γ_5, індуковану полем нормалей першого роду $\vec{v}$ на оснащувальному H-розподілі.

Тензори кривини і скруту зв'язності Γ_5 мають вигляд:

$$R_{n+1K}^\pi, \nabla_\delta R_{n+1K}^\pi = 0;$$

$$R_{\rho KL}^\pi, \ \nabla_\delta R_{\rho KL}^\pi = 0,$$

де

$$R_{\rho KL}^\pi = 2H_{\rho[K} v_{|n+1|L]}^\pi;$$

$$H_{\rho K} \equiv \left\{\Lambda_{pK}, M_{i\hat{u}} \delta_K^{\hat{u}}, \delta_K^{\hat{\gamma}} H_{\alpha\hat{\gamma}}\right\}.$$

3. Відповідно до роботи [1] на H-розподілі можна визначити будь-яку іншу афінну зв'язність Γ_5 за допомогою нових форм $\widetilde{\omega}_\rho^\pi$, що виходять із форм $\omega^K, \omega_\rho^\pi$ перетворенням:

$$\widetilde{\omega}_\rho^\pi = \omega_\rho^\pi + \gamma_{\rho K}^\pi \omega^K.$$

Для форм $\omega^K, \widetilde{\omega}_\rho^\pi$ маємо такі структурні рівняння:

$$D\omega^K = \omega^J \wedge \omega_J^K;$$

$$D\omega^\rho = \omega^\pi \wedge \widetilde{\omega}_\pi^\rho + \frac{1}{2} \widetilde{R}_{KL}^\rho \omega^K \wedge \omega^L; \qquad (6)$$

$$D\widetilde{\omega}_\rho^\pi = \widetilde{\omega}_\rho^\sigma \wedge \widetilde{\omega}_\sigma^\pi + \Delta\gamma_{\rho K}^\pi \wedge \omega^K,$$

де

$$\widetilde{R}_{KL}^\rho = 2\left(-\delta_{[K}^\pi \gamma_{|\pi|L]}^\rho + \delta_{[K}^{n+1} v_{|n+1|L]}^\rho\right);$$

$$\Delta\gamma_{pK}^\pi = \nabla\gamma_{pK}^\pi + \gamma_{pK}^\sigma \gamma_{\sigma J}^\pi \omega^J + \Lambda_{pJ} v_{n+1K}^\pi \omega^J$$

$$\Delta\gamma_{iK}^\pi = \nabla\gamma_{iK}^\pi + \gamma_{iK}^\sigma \gamma_{\sigma J}^\pi \omega^J + M_{i\hat{u}} \delta_J^{\hat{u}} v_{n+1K}^\pi \omega^J; \qquad (7)$$

$$\Delta\gamma_{\alpha K}^\pi = \nabla\gamma_{\alpha K}^\pi + \gamma_{\alpha K}^\sigma \gamma_{\sigma J}^\pi \omega^J + H_{\alpha\hat{\gamma}} \delta_J^{\hat{\gamma}} v_{n+1K}^\pi \omega^J.$$

З диференціальних рівнянь (6) відповідно до теореми Картана-Лаптєва [3] випливає, що для того, щоб форми $\omega^\rho, \widetilde{\omega}^\pi_\rho$ у головному розшарованому багатовиду, визначеному формами $\omega^K, \widetilde{\omega}^\pi_\rho$, задавали афінну зв'язність, необхідно і достатньо задати поле об'єкта зв'язності:

$$\Delta\gamma^\pi_{\rho K} = \gamma^\pi_{\rho KJ}\omega^J. \qquad (8)$$

При цьому тензором скруту отриманого простору афінної зв'язності буде тензор $\widetilde{R}^\rho_{KL}$, а тензором кривини – тензор

$$\widetilde{R}^\pi_{\rho KL} = 2\gamma^\pi_{\rho[KL]}.$$

Відповідно до формул (7) співвідношення (8) рівносильні тому, що компоненти поля об'єкта афінної зв'язності задовольняють диференціальні рівняння:

$$\begin{aligned} &\Delta\gamma^\pi_{\rho\sigma} = \widetilde{\gamma}^\pi_{\rho\sigma K}\omega^K; \\ &\Delta\gamma^\pi_{\rho n+1} = \widetilde{\gamma}^\pi_{\rho n+1}\omega^{n+1}_{n+1} + \widetilde{\gamma}^\pi_{\rho n+1K}\omega^K. \end{aligned} \qquad (9)$$

Рівнянням вигляду (9) відповідно задовольняють охвати:

$$H^\pi_{\rho\sigma} = \overline{H}^{\pi\tau}\overline{H}_{\tau\rho\sigma};$$

$$H^\pi_{\rho n+1} = \overline{H}^{\pi\tau}\overline{H}_{\tau\rho n+1},$$

де

$$\nabla_\delta H^\pi_{\rho\sigma} = 0;$$

$$\nabla_\delta H^\pi_{\rho n+1} = H^\pi_{\rho n+1}\pi^{n+1}_{n+1}.$$

При даній інваріантній нормалізації Н-розподілу внутрішнім чином самим Н-розподілом визначається афінна зв'язність, яка задається формами:

$$\omega^\rho, \quad \widetilde{\omega}^\pi_\rho = \omega^\pi_\rho + H^\pi_{\rho K}\omega^K. \qquad (10)$$

Система форм $\{\omega^a, \omega^a_b\}$ визначає афінну зв'язність на оснащувальному М-розподілі, а система форм $\{\omega^\pi, \omega^\pi_\rho\}$ афінну зв'язність на оснащувальному гіперрозподілі. При інваріантній нормалізації базисного розподілу внутрішнім чином самим трискладовим розподілом у головному розшарованому багатовиду визначається афінна зв'язність, яка задається формами (10).

Отже, знайдено компоненти тензора кривини і скруту цих зв'язностей.

Отримані результати доповнюють загальну теорію розподілів однорідних просторів. Вони можуть бути використані в подальших дослідженнях у загальній теорії розподілів (розподілів m-вимірних лінійних елементів, гіперсмугових розподілів і двоскладових розподілів) багатовимірних афінних і проективних просторів, а також у теорії нормальних підрозшарувань і підрозшарувань дотичного розшарування багатовидів, асоційованих з даними розподілами, при вивченні геометрії структур різних типів.

Список літератури

1. *Лаптев Г.Ф.* Многообразия, погруженные в обобщенные пространства // Тр. 4-го Всесоюз. мат. съезда. – Л.: Наука, 1964. – Т. 2. – С. 226–233.
2. *Остиану Н.М.* О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et. appl. (RPR). – 1962. – Т.7, №2. – С. 231–240.
3. *Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин П.И.* Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева // Тр. геометрического семинара. – Всесоюз. ин-т науч. и техн. информ. – 1973. – 4. – С. 7–70.
4. *Столяров А.В.* Проективно-дифференциальная геометрия гиперполосного распределения *m*–мерных линейных элементов // Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР: Проблемы геометрии. – 1975. – Т. 7. – С. 117–151.
5. *Попов Ю.И.* Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства. – С.Пб.: Санкт-Петербург. ун-т, 1992. – 172 с.

Стаття надійшла до редакції 17.10.03.

М.Ф. Гребенюк

Аффинные связности, ассоциированные с оснащающими распределениями трехсоставного распределения аффинного пространства

Рассмотрена дифференциальная геометрия многомерных распределений многомерных пространств. Установлено, что при инвариантной нормализации базисного распределения внутренним образом самим трехсоставным распределением в главном расслоенном многообразии определяются аффинные связности. Найдены компоненты тензора кривизны и кручения этих связностей.

M.F. Grebenyuk

Affine connections which are associated with the equipping distributions of the three-component distribution of affine space

The article deals with the differential geometry of the three-component distributions of multi-dimensional spaces. Affine connections for the three-component distribution are defined by an inner way in principal stratified manifold under invariant normalization of the basic distribution for the tree-component distribution. The components of the curvature-torsion tensor have been constructed.