

УДК 629.735.33.015.3.024 + 629.735.33.042

В 253.330.44

В.Д. Доник, канд. техн. наук

УЗАГАЛЬНЕНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВИТІКАННЯ ПОВІТРЯ З ВІДСІКУ

Інститут транспортних технологій НАУ, e-mail: info@donik.com

Розроблено узагальнену математичну модель витікання повітря з відсіку, яка описує з достатньою для практики точністю процес зміни тиску повітря у відсіку. Досліджено окремі випадки й області застосування запропонованої математичної моделі. Зіставлено результати розрахунків за моделлю й експериментом.

Вступ

Основні математичні моделі процесів витікання повітря з відсіку викладені в працях [1–5]. Розроблені моделі описують процеси при ізотермічному, адіабатичному і політропічному станах повітря у відсіках. Незважаючи на те, що ці моделі набули широкого застосування, є певні обмеження щодо їх використання.

Практично відсутні критерії можливих областей застосування таких моделей, недостатньо вивчений вплив прийнятих допущень на результати моделювання.

У розроблених моделях деякі параметри не розглянуто, що викликає необхідність додаткового уточнення структури моделі. Так, недостатньо вивчено і не враховано в моделях зміну параметрів об'єму, підведення і відведення енергії, багато залежностей отримано з припущенням про сталість повного тиску для розглянутого процесу. На практиці ця умова найчастіше не виконується.

У праці [3] запропоновано одну з моделей для політропного процесу зі змінним показником політропи в процесі витікання повітря з відсіку. Ця модель виявилася складною, а її області практичного застосування авторами не досліджені. Усе це послужило мотивом до необхідності досліджувати процеси витікання повітря з відсіку і розробити математичну модель для більш широкого класу задач.

Модель

Припустимо, що процес витікання повітря з відсіку підлягає рівнянню стану $P = \rho RT$. Зміна тиску повітря у відсіку супроводжується підведенням енергії dQ і відведенням енергії dL . Помножимо рівняння стану на об'єм відсіку V , а потім диференціюємо рівняння стану за часом τ і на підставі рівняння збереження енергії запишемо

$$\frac{d(V\rho)}{d\tau} - \frac{d(V\rho RT)}{d\tau} = \frac{dQ}{d\tau} - \frac{dL}{d\tau},$$

де P – тиск; ρ – густина; T – температура.

Перетворимо рівняння до такого вигляду

$$P \frac{dV}{d\tau} + V \frac{dP}{d\tau} - R \left[T \frac{d(V\rho)}{d\tau} + V\rho \frac{dT}{d\tau} \right] = \frac{dQ}{d\tau} - \frac{dL}{d\tau}. \quad (1)$$

Запишемо рівняння нерозривності:

$$\frac{d(V\rho)}{d\tau} = G_1 - G_2, \quad (2)$$

де G_1, G_2 – сумарні витрата вхідного і вихідного з відсіку повітря відповідно.

Підставивши рівняння (2) у формулу (1), одержуємо

$$P \frac{dV}{d\tau} + V \frac{dP}{d\tau} - (G_1 - G_2)RT - RV \frac{P}{RT} \frac{dT}{d\tau} = \frac{dQ}{d\tau} - \frac{dL}{d\tau}. \quad (3)$$

Використовуємо рівняння політропи:

$$\frac{P}{\rho^n} = \frac{P}{\left(\frac{P}{RT}\right)^n} = \text{const.}$$

Після перетворень рівняння політропи маємо

$$\frac{T}{P^{\frac{n-1}{n}}} = \text{const.} \quad (4)$$

Диференціюємо рівняння (4) і після перетворень одержуємо рівняння зміни тиску повітря при зміні температури:

$$\frac{dT}{T} = \frac{dP}{P} \frac{n-1}{n}. \quad (5)$$

Підставимо рівняння (5) у формулу (3):

$$P \frac{dV}{d\tau} + V \frac{dP}{d\tau} - (G_1 - G_2)RT - VP \frac{n-1}{nP} \frac{dP}{d\tau} = \frac{dQ}{d\tau} - \frac{dL}{d\tau}. \quad (6)$$

Після скорочень рівняння (6) одержуємо

$$P \frac{dV}{d\tau} + \frac{V}{n} \frac{dP}{d\tau} - (G_1 - G_2)RT = \frac{dQ}{d\tau} - \frac{dL}{d\tau}. \quad (7)$$

З рівняння (7) визначимо

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{RTn}{V} (G_1 - G_2) - \frac{Pn}{V} \frac{dV}{d\tau} + n \left(\frac{dQ}{d\tau} - \frac{dL}{d\tau} \right). \quad (8)$$

На підставі рівняння (8) можна визначити зміну тиску повітря у відсіку при підведенні dQ і відведенні dL енергії, зміні об'єму dV відсіку, підведення G_1 і відведення G_2 повітря з відсіку. Рівняння (8) отримано відповідно до закону збереження енергії на підставі рівнянь стану, нерозривності і політропи. Отже, рівняння (8) являє собою модель витікання повітря з відсіку для політропного процесу.

Розглянемо окремі випадки, що впливають з рівняння (8). Для режиму витікання повітря з відсіку, коли площа вихідного отвору має значні розміри в порівнянні з геометричними розмірами об'єму і відсутні гідравлічні втрати повітря, рівняння (8) буде мати вигляд

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{RTn}{V}(G_1 - G_2) - \frac{Pn}{V} \frac{dV}{d\tau} + \frac{n}{V} \frac{dQ}{d\tau}.$$

У разі відсутності підведення і відведення енергії рівняння (8) перетвориться до рівняння

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{RTn}{V}(G_1 - G_2) - \frac{Pn}{V} \frac{dV}{d\tau}. \quad (9)$$

За заданою функцією зміни $\frac{dV}{d\tau}$ і рівнянням (9) можна визначити зміну тиску повітря у відсіку. Для випадку, коли

$$\frac{dV}{d\tau} = 0 \quad (V = \text{const}),$$

зміна тиску повітря у відсіку визначається за формулою

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{RTn}{V}(G_1 - G_2). \quad (10)$$

Припустимо, що витікання повітря з відсіку відбувається при $dP_0 = 0$. Використовуємо рівняння політропи, на підставі якого визначимо температуру повітря у відсіку через параметри гальмування:

$$T = T_0 \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Підставимо значення T у формулу (10) і одержимо рівняння зміни тиску повітря у відсіку відповідно до роботи [2]:

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{RT_0 n}{V} \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{n-1}{n}} (G_1 - G_2).$$

Для визначення тиску повітря у відсіку згідно з рівнянням (8) необхідно обчислити зміну температури повітря за часом у процесі витікання.

Залежність $\frac{dT}{d\tau}$ визначимо з рівняння (5).

Остаточно маємо

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{RTn}{V}(G_1 - G_2) - \frac{Pn}{V} \frac{dV}{d\tau} + \frac{n}{V} \left(\frac{dQ}{d\tau} - \frac{dL}{d\tau} \right); \quad (11)$$

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{dP}{d\tau} \frac{T}{P} \frac{n-1}{n}.$$

Значення $\frac{dT}{d\tau}$ може бути визначене так само

від параметрів поданого повітря G_1, T_1 у відсік при $V = \text{const}$ відповідно до праці [6]. Система диференціальних рівнянь (11) являє собою узагальнену модель для визначення тиску і температури повітря при витіканні повітря з відсіку і враховує параметри повітря P, ρ, T, C_p, C_v усередині відсіку, зміни об'єму dV , витрати G_1 поданого повітря, підведення dQ і відведення dL енергії. Показник політропи n є постійною величиною і може бути визначений на підставі статистичних даних досліджуваних процесів чи за допомогою застосування перешкодозахисних методів [7; 8].

Для розв'язання багатьох практичних задач у разі витікання повітря з відсіку становить інтерес умова підтримки постійної температури повітря у відсіку. Проведемо аналіз зміни температури повітря у відсіку $\frac{dT}{d\tau}$ відповідно до рівняння

(11). Підтримка постійної температури повітря у відсіку $T = \text{const}$ може бути досягнута за умови

$$n = 1 \text{ чи (i) } \frac{dP}{d\tau} = 0 \quad (P = \text{const}).$$

За умови $n = 1$ зміну тиску повітря у відсіку описують рівнянням

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{RT}{V}(G_1 - G_2) - \frac{P}{V} \frac{dV}{d\tau} + \frac{1}{V} \left(\frac{dQ}{d\tau} - \frac{dL}{d\tau} \right).$$

При $P = \text{const}$ рівняння (11) запишемо в такому вигляді

$$\frac{Pn}{V} \frac{dV}{d\tau} - \frac{n}{V} \left(\frac{dQ}{d\tau} - \frac{dL}{d\tau} \right) = \frac{Rn}{V} T (G_1 - G_2). \quad (12)$$

З рівняння (12) визначаємо температуру повітря у відсіку:

$$T = \frac{\frac{Pn}{V} \frac{dV}{d\tau} - \frac{n}{V} \left(\frac{dQ}{d\tau} - \frac{dL}{d\tau} \right)}{\frac{Rn}{V} (G_1 - G_2)}. \quad (13)$$

Умова підтримки постійної температури повітря у відсіку не залежить від показника політропи і може бути прийнятно як для абсолютних, так і для відносних величин об'єму.

На підставі рівняння (13) одержуємо критерій для підтримки постійної температури повітря у відсіку:

$$\frac{PndV}{V dt} - \frac{n(dQ - dL)}{V \left(\frac{dQ}{dt} - \frac{dL}{dt} \right)} = \frac{P dV}{dt} - \left(\frac{dQ}{dt} - \frac{dL}{dt} \right) = \text{const.} \quad (14)$$

$$\frac{RnT(G_1 - G_2)}{V} = \frac{RT(G_1 - G_2)}{RT(G_1 - G_2)}$$

Оскільки R є постійною величиною, то критерій (14) можна використовувати в такому вигляді

$$\frac{P \frac{dV}{dt} - \left(\frac{dQ}{dt} - \frac{dL}{dt} \right)}{T(G_1 - G_2)} = \text{const.}$$

Умова критерію (14) може бути виконана, якщо підведена і відведена енергія витрачається на зміну об'єму, на підведення і відведення повітря з відсіку. Якщо процес витікання повітря з відсіку відбувається без зміни об'єму $\left(\frac{dV}{dt} = 0, V = \text{const} \right)$ і не підводиться енергія $\left(\frac{dQ}{dt} = 0, Q = 0 \right)$, то процес витікання повітря з відсіку задовольняє критерій

$$\frac{\frac{dL}{dt}}{RT(G_1 - G_2)} = \text{const}$$

і процес підведення і відведення повітря з відсіку супроводжується відводом енергії $\frac{dL}{dt}$. За умови

$$\frac{dV}{dt} = 0, V = \text{const}, \quad \frac{dL}{dt} = 0, L = 0$$

виконання критерію (14) може бути досягнуто тільки при відведенні енергії, коли $G_1 > G_2$, чи при підведенні енергії, коли $G_1 < G_2$, а також при виконанні рівняння

$$G_2 = G_1 + \frac{1}{RT} \frac{dQ}{dt}$$

Якщо підведення dQ і відведення dL енергії немає критерій (14) для підтримки постійної температури повітря у відсіку буде мати вигляд

$$\frac{P \frac{dV}{dt}}{RT(G_1 - G_2)} = \text{const.} \quad (15)$$

З урахуванням рівняння стану критерій (15) набуває вигляду

$$\frac{\rho \frac{dV}{dt}}{(G_1 - G_2)} = \text{const.} \quad (16)$$

Відповідно до критерію (16) зміна об'єму відсіку визначається підведенням і відведенням повітря з відсіку. Збільшення підведення повітря у відсіку може бути досягнуто під час збільшення об'єму відсіку і при незмінному відводі повітря з відсіку.

Якщо процес витікання повітря з відсіку відбувається без зміни об'єму

$$\frac{dV}{dt} = 0, V = \text{const.},$$

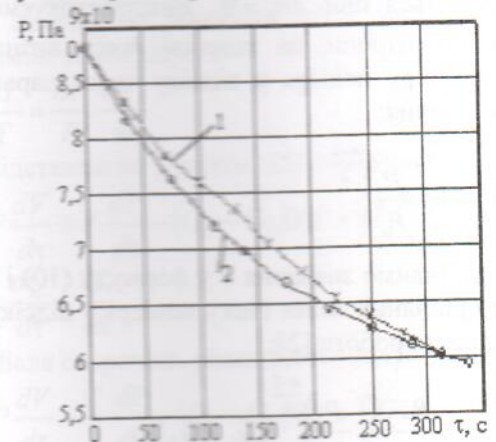
то критерій (15) матиме вигляд

$$T(G_1 - G_2) = \text{const.}$$

За умови розв'язуваної задачі $T = \text{const}$ підтримка постійної температури повітря у відсіку досягається при $G_1 - G_2 = \text{const}$. Ця умова може бути виконана при рівності витрат повітря $G_1 = G_2$.

Відповідно до отриманих критеріїв можна визначити умови протікання процесів у відсіку. Відхилення параметрів повітря у відсіку від критеріальних залежностей призводить до зміни температури повітря у відсіку. За допомогою розроблених критеріїв може застосовуватися такий числовий метод розрахунку параметрів повітря у відсіку. На кожному кроці інтегрування за умови задачі визначається один із критеріїв. При виконанні одного з критеріїв у формулах (14), (15), (16) розраховують тільки тиск повітря у відсіку. У противному разі розраховують параметри повітря у відсіку відповідно до системи диференціальних рівнянь (11). Такий метод розрахунку дозволяє істотно скоротити розрахунки особливо для багатооб'ємних відсіків чи при інтегруванні тиску повітря за об'ємом процесів витікання повітря з відсіку.

Відповідно до системи диференціальних рівнянь (11) проведено розрахунки зміни тиску повітря у відсіку див. рисунок.



Порівняльна оцінка результатів розрахунку і експерименту зміни тиску P повітря у відсіку за часом:

1 – експеримент, 2 – розрахунок

Аналіз експериментальних і розрахункових залежностей зміни тиску повітря у відсіку показує, що розроблені моделі відбивають характер проходження процесу і описують з достатньою для практики точністю процес зміни тиску повітря у відсіку.

Похибка розрахунків не перевищувала 10%.

Значні відхилення розрахунку і експерименту відзначені в середній частині процесу розгерметизації відсіку, що вимагає проведення додаткових досліджень математичної моделі.

Висновки

Розроблена узагальнена математична модель витікання повітря з відсіку являє собою систему диференціальних рівнянь, що описує політропний процес витікання повітря з відсіку.

Отже, розроблені моделі описують більш широкий клас розв'язуваних задач.

Досліджено різні частинні випадки розроблених моделей і визначено області їхнього застосування.

Для оцінки процесу витікання повітря з відсіку розроблено критерії.

На підставі отриманих критеріїв розроблений числовий метод визначення параметрів повітря при витіканні повітря з відсіку.

Проведено зіставлення результатів розрахунку і експериментальних даних. Математична модель описує з достатньою для практики точністю процес витікання повітря з відсіку.

Для поглиблення вивчення процесів витікання повітря з відсіку необхідно продовжити дослід-

ження з вивчення особливостей застосування розроблених моделей і критеріїв з підтримки необхідних параметрів повітря всередині відсіку.

Для вирішення багатьох практичних задач необхідно розробити математичні моделі з урахуванням виділення в моделі параметрів, які контролюються штатним устаткуванням під час проведення експериментів щодо вивчення процесів розгерметизації відсіків фізеляжу.

Список літератури

1. *Абрамович Г.Н.* Прикладная газовая динамика. – М.: Наука, 1969. – 824 с.
2. *Быков Л.Т., Ивлентиев В.С., Кузнецов В.И.* Высотное оборудование пассажирских самолетов. – М.: Машиностроение, 1972. – 332 с.
3. *Быков Л.Т., Егоров М.С., Тарасов П.В.* Высотное оборудование. – М.: Оборонгиз, 1995. – 392 с.
4. *Вукалович М.П., Новиков И.И.* Техническая термодинамика. – М.: Энергия, 1968. – 496 с.
5. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. 5-е изд. – М.: Наука, 1978. – 736 с.
6. *Доник В.Д.* Математическая модель истечения воздуха из объема // Зб. наук. пр. ІПМЕ НАН України. – К., 2001. – С. 38–49.
7. *Касьянов В.А., Доник В.Д.* Помехоустойчивый метод для полиномиальных моделей со свободным коэффициентом. – К., 1987. – Деп. ВИНТИ 01.04.88, № 25303-В88. – 8 с.
8. *Доник В.Д.* Алгоритм сглаживания экспериментальных данных с минимизацией остатков. – К., 1987. – Деп. ВИНТИ 01.04.88, № 2534-В88. – 8 с.

Стаття надійшла до редакції 23.04.03.

В.Д. Доник

Обобщенная математическая модель истечения воздуха из отсека

Разработана обобщенная математическая модель истечения воздуха из отсека, описывающая с достаточной для практики точностью процесс изменения давления воздуха в отсеке. Исследованы частные случаи и области применения этой математической модели. Сопоставлены результаты расчета по модели и эксперименту.

V.D. Donik

Generalized mathematical model of air outflow from compartment

Has been developed the generalized mathematical model of air outflow from compartment, examined the special cases and ranges of application. Have been carried out the comparisons of calculations results for model and experiment. The developed mathematical model describes with adequate for practice accuracy the process of air pressure variation in compartment.