

УДК 629.7.072:62.501

3 965-043-9

Л.М. Блохін, д-р техн. наук  
Н.В. Білак

## ПОРІВНЯННЯ ЕФЕКТИВНОСТЕЙ ОПТИМАЛЬНИХ СИСТЕМ СТАБІЛІЗАЦІЇ З ДОВІЛЬНОЮ І ЗАДАНОЮ СТРУКТУРАМИ

Інститут електроніки та систем управління НАУ, e-mail: fsu@nau.edu.ua

Розглянуто порівняння ефективності визначеної за відомим алгоритмом оптимальної системи стабілізації та системи стабілізації з оптимізованими параметрами регулятора при випадкових впливах. Побудовано графічні залежності оцінок ефективності систем від параметрів, суттєвих для розв'язання задач синтезу.

### Вступ

На сьогодні до багатьох відповідальних систем стабілізації ставляться вкрай високі точнісні вимоги.

Такі системи стабілізації за якістю (точністю) функціонування мають бути конкурентноспроможними з ліпшими аналогічними світовими зразками.

У багатьох випадках інженерно-технічний склад не розрізняє рубежів якості зазначених систем у різних можливих варіантах їх побудови. Виникає необхідність у наглядних порівняльних оцінках досяжних рубежів якості систем стабілізації, які мають оптимальну структуру регулятора, оптимізовані параметри регулятора та неоптимальний регулятор.

Ефективність визначених за відомими алгоритмами систем стохастичної стабілізації з довільною і заданою структурами порівнюються на відносно простому прикладі, але графічно побудовані поверхні максимально досяжної якості стабілізації наочно ілюструють доцільність синтезу систем з довільними структурами.

Ефективність параметричної оптимізації системи, що підлягає подальшому дослідженню, у порівнянні з неоптимальною системою вже була показана в праці [1].

### Постановка задачі

Цілями даної роботи є синтез оптимальної структури регулятора в системі, яка досліджується, оцінка мінімального значення прийнятого на теперішній час функціонала для систем стабілізації, дослідження мінливості досяжних рубежів якості стабілізації від змін деяких конструктивних і експлуатаційних параметрів, а також наочна порівняльна оцінка ефективностей систем стабілізації з довільною і заданою структурами.

Як відомо з праць [2; 3], існує метод та алгоритм синтезу стохастичних систем стабілізації багатовимірних об'єктів з довільною динамікою при випадкових впливах.

Синтез оптимальної структури регулятора для стійкого об'єкта є частковим випадком зазначених процедур синтезу оговореного підходу до синтезу у наступному.

### Синтез системи стабілізації при випадкових впливах

Нехай рух стійкого об'єкта (рис. 1) описується векторним диференціальним рівнянням, перетвореним за Фур'є, з постійними коефіцієнтами:

$$P(s)x(s) = M(s)u(s) + \psi(s),$$

де  $P$ ,  $M$  – поліноміальні аргументу ( $s = j\omega$ ) матриці розмірністю  $n \times n$ ,  $n \times m$  відповідно;  $x$  –  $n$ -вимірний вектор Фур'є-образів вихідних реакцій об'єкта стабілізації;  $u$  –  $m$ -вимірний вектор Фур'є-образів сигналів управління;  $\psi$  –  $n$ -вимірний центрований стаціонарний випадковий процес із збурень з відомою матрицею спектральних щільностей  $S'_{\psi\psi}$ .

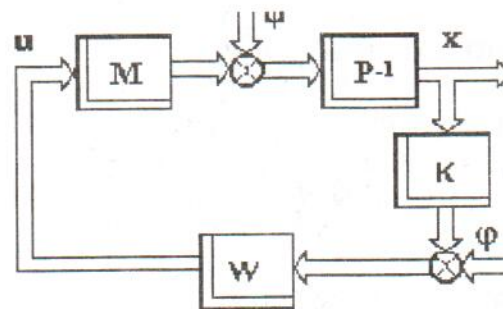


Рис. 1. Структурна схема системи стабілізації

Рівняння регулятора у цій системі має вигляд  $u = W(x + \phi)$ ,

де  $W$  – синтезована передавальна функція регулятора (стабілізуючого пристрою) розмірністю  $m \times n$ ;  $\phi$  –  $n$ -вимірний центрований стаціонарний випадковий процес з відомими матрицями спектральних і взаємоспектральних щільностей  $S'_{\phi\phi}$  та  $S'_{\psi\phi}$  ( $S'_{\phi\psi}$ ).

Система стабілізації має синтезуватися за функціоналом



$$e = \langle \mathbf{x}'(t) \mathbf{R} \mathbf{x}(t) \rangle + \langle \mathbf{u}'(t) \mathbf{C} \mathbf{u}(t) \rangle = \\ = \frac{1}{j} \int_{-j\infty}^{j\infty} tr [\mathbf{S}'_{xx} \mathbf{R} + \mathbf{S}'_{uu} \mathbf{C}] ds, \quad (1)$$

де  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{C}$  – вагові, умовно відомі поліноміальні не-негативно визначені симетричні матриці розмірністю  $n \times n$ ,  $n \times m$ , які одночасно не дорівнюють нулю, використовуються для обліку реальних обмежень у задачі синтезу;  $\mathbf{S}'_{xx}$ ,  $\mathbf{S}'_{uu}$  – матриці спектральних щільностей векторів  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$ ;  $tr$  – слід матриці;  $\langle \rangle$  – символ математичного сподівання; ' – знак транспонування матриці.

Задача складається у тому, щоб шляхом вибору оптимальної структури регулятора  $\mathbf{W}$  на класі дробово-раціональних функцій одержати мінімум функціоналу (1) і одночасно забезпечити стійкість замкненої системи.

Уводячи узагальнений вектор  $\boldsymbol{\psi}_0 = (\boldsymbol{\psi}', \boldsymbol{\phi}')'$ , перепишемо функціонал (1) у вигляді

$$e = \frac{1}{j} tr \int_{-j\infty}^{j\infty} tr \left\{ \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{E}_n \\ \mathbf{P}_* \end{pmatrix} \mathbf{F}_x^\Psi - \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n \\ \mathbf{E}_n \end{pmatrix} \right] \mathbf{R} \times \right. \\ \times \left[ \mathbf{F}_x^\Psi (\mathbf{E}_n, \mathbf{P}) - (\mathbf{0}_n, \mathbf{E}_n) \right] \mathbf{S}'_{\psi_0 \psi_0} + \\ \left. + \mathbf{F}_u^\Psi \mathbf{C} \mathbf{F}_u^\Psi (\mathbf{E}_n, \mathbf{P}) \mathbf{S}'_{\psi_0 \psi_0} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_n \\ \mathbf{P}_* \end{pmatrix} \right\} ds. \quad (2)$$

Умова (алгоритм), що доставляє мінімум функціоналу (2), буде мати вигляд

$$\mathbf{F}_u^\Psi = -\mathbf{\Gamma}^{-1} (\mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_+) \mathbf{D}^{-1}; \quad (3)$$

$$\mathbf{\Gamma}_* \mathbf{\Gamma} = \mathbf{C} + \mathbf{M}_* \mathbf{P}_*^{-1} \mathbf{R} \mathbf{P}_*^{-1} \mathbf{M}; \quad (4)$$

$$\mathbf{D} \mathbf{D}_* = (\mathbf{E}_n, \mathbf{P}) \mathbf{S}'_{\psi_0 \psi_0} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_n \\ \mathbf{P}_* \end{pmatrix}; \quad (5)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_+ + \mathbf{T}_- = \mathbf{\Gamma}_*^{-1} \mathbf{M}_* \mathbf{P}_*^{-1} \mathbf{R} \times \\ \times \mathbf{P}_*^{-1} (\mathbf{E}_n, \mathbf{0}_n) \mathbf{S}'_{\psi_0 \psi_0} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_n \\ \mathbf{P}_* \end{pmatrix} \mathbf{D}_*^{-1}; \quad (6)$$

$$\mathbf{S}'_{\psi_0 \psi_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}'_{\psi\psi} & \mathbf{S}'_{\psi\phi} \\ \mathbf{S}'_{\psi\phi} & \mathbf{S}'_{\phi\phi} \end{bmatrix}; \quad (7)$$

$$\mathbf{F}_x^\Psi = \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{M} \mathbf{F}_u^\Psi + \mathbf{E}_n); \quad (8)$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{F}_u^\Psi (\mathbf{F}_x^\Psi)^{-1}, \quad (9)$$

де  $\mathbf{F}_x^\Psi$  і  $\mathbf{F}_u^\Psi$  – матриці передавальних функцій замкненої системи від збурення  $\Psi$  до виходів  $\mathbf{x}$  і  $\mathbf{u}$ ;  $\mathbf{\Gamma}$ ,  $\mathbf{\Gamma}_*$  – матриці, які є результатом вінерівської факторизації виразу (4);  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{D}_*$  – матриці, що є результатом факторизації виразу (5);  $\mathbf{T}_0$ ,  $\mathbf{T}_+$ ,  $\mathbf{T}_-$  – матриці, що є результатом вінерівської сепарації виразу (6); \* – знак ермітового спряження.

Коли вибрана оптимальна структура  $\mathbf{F}_u^\Psi$ , то через неї визначено структури  $\mathbf{F}_x^\Psi$  і  $\mathbf{W}$  [вирази (8), (9)].

Розглянемо наведений приклад синтезу оптимальної структури регулятора, деякої скалярної системи стабілізації (рис. 1). Нехай правдиві такі вхідні дані задачі:

$$P(s) = Ts + 1;$$

$$M(s) = m;$$

$$\frac{\sigma_\phi}{\sigma_\psi} = \gamma;$$

$$S_{\phi\phi} = \frac{\sigma_\phi^2}{\pi |(\tau s + 1)(\xi s + 1)|^2};$$

$$R = r = 1; \quad (10)$$

$$S_{\psi\psi} = \frac{\sigma_\psi^2}{\pi |\mu s + 1|^2};$$

$$S_{\psi\phi} = S_{\phi\psi} = 0;$$

$$\frac{c}{r} = \lambda^2,$$

де  $T$ ,  $\mu$  та  $c$ ,  $\xi$  – сталі часу ланки, збурення та завади відповідно;  $m$  – коефіцієнт передачі регулятора ( $m=1$ );  $\sigma_\psi$ ,  $\sigma_\phi$  – середньоквадратичне значення сигналів  $\psi$  та  $\phi$ .

Підставивши дані (10) у вирази (3)–(9) і виконавши необхідні операції, отримаємо:

$$\mathbf{\Gamma} = \frac{\lambda Ts + \sqrt{\lambda^2 + m^2}}{Ts + 1}; \quad (11)$$

$$\mathbf{\Gamma}_* = \frac{-\lambda Ts + \sqrt{\lambda^2 + m^2}}{-Ts + 1};$$

$$\mathbf{D} = \frac{\sigma_\psi}{\sqrt{\pi}} \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{(\mu s + 1)(\tau s + 1)(\xi s + 1)};$$

$$\mathbf{D}_* = \frac{\sigma_\psi}{\sqrt{\pi}} \frac{a_2 s^2 - a_1 s + a_0}{(-\mu s + 1)(-\tau s + 1)(-\xi s + 1)}, \quad (12)$$

де коефіцієнти полінома чисельника мають вигляд:

$$a_2 = \sqrt{\tau^2 \xi^2 + \gamma^2 T^2 \mu^2}; \quad a_0 = \sqrt{1 + \gamma^2};$$

$$a_1 = \sqrt{\tau^2 + \xi^2 + \gamma^2 (T^2 + \mu^2)} + 2a_0 a_2;$$

$$T_0 = 0; \quad T_+ = \frac{\sigma_\psi}{\sqrt{\pi}} m \frac{(\mu A + TB)s + (A + B)}{(Ts + 1)(\mu s + 1)} =$$

$$= \frac{\sigma_\psi}{\sqrt{\pi}} m \frac{C_1 s + C_0}{(Ts + 1)(\mu s + 1)}, \quad (13)$$

де

$$A = \frac{T(T+\tau)(T+\zeta)}{(T-\mu)(\lambda+\sqrt{\lambda^2+m^2})(a_2+a_1T+a_0T^2)};$$

$$B = \frac{-\mu^2(\mu+\tau)(\mu+\zeta)}{(T-\mu)(\lambda T+\mu\sqrt{\lambda^2+m^2})(a_2+a_1\mu+a_0\mu^2)};$$

$$C_1 = \frac{\mu T}{(T-\mu)} \left[ \frac{(T+\tau)(T+\zeta)}{(\lambda+\sqrt{\lambda^2+m^2})(a_2+a_1T+a_0T^2)} - \frac{\mu(\mu+\tau)(\mu+\zeta)}{(\lambda T+\mu\sqrt{\lambda^2+m^2})(a_2+a_1\mu+a_0\mu^2)} \right];$$

$$C_0 = \frac{1}{(T-\mu)} \left[ \frac{T(T+\tau)(T+\zeta)}{(\lambda+\sqrt{\lambda^2+m^2})(a_2+a_1T+a_0T^2)} - \frac{\mu^2(\mu+\tau)(\mu+\zeta)}{(\lambda T+\mu\sqrt{\lambda^2+m^2})(a_2+a_1\mu+a_0\mu^2)} \right].$$

Підставивши вирази (11), (12), (13) в алгоритм (3), отримаємо оптимальну структуру  $F_u^\Psi$ :

$$F_u^\Psi = \frac{-m(C_1s+C_0)(\tau s+1)(\zeta s+1)}{(\lambda Ts+\sqrt{\lambda^2+m^2})(a_2s^2+a_1s+a_0)}. \quad (14)$$

Підставивши структуру (14) у рівняння (8), визначимо оптимальну структуру передавальної функції системи  $F_x^\Psi$ :

$$F_x^\Psi = \frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{(\lambda Ts+\sqrt{\lambda^2+m^2})(a_2s^2+a_1s+a_0)}, \quad (15)$$

де

$$b_2 = \frac{(\lambda Ta_2 - m^2 \tau \zeta C_1) s^3}{(Ts+1)};$$

$$b_1 = \frac{[\lambda Ta_1 + \sqrt{\lambda^2+m^2} a_2 - m^2 \tau \zeta C_0 - m^2(\tau+\zeta)C_1] s^2}{(Ts+1)};$$

$$b_0 = \frac{[\lambda Ta_0 + \sqrt{\lambda^2+m^2} a_1 - m^2 C_1 - m^2(\tau+\zeta)C_0] s + (\sqrt{\lambda^2+m^2} a_0 - m^2 C_0)}{(Ts+1)}.$$

Підставивши вирази (14), (15) у формулу (9), визначимо оптимальну структуру синтезованого регулятора як

$$W = -\frac{m(C_1s+C_0)(\tau s+1)(\zeta s+1)}{b_2s^2+b_1s+b_0}, \quad (16)$$

яка суттєво відрізняється від "жорсткого" зворотного зв'язку.

Підставивши вирази (7), (10), (14), (15) у функціонал (2), отримаємо вираз для визначення його відносного мінімального значення:

$$\frac{e_{\min}}{\sigma_\Psi^2} = \frac{1}{\pi j} \int_{-j\omega}^{+j\omega} \left[ \frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{(\lambda Ts+\sqrt{\lambda^2+m^2})} \right]^2 \times \left| \frac{1}{(\mu s+1)(\tau s+1)(\zeta s+1)} \right|^2 - 2\gamma^2 \left| \frac{l_3s^3+l_2s^2+l_1s+l_0}{(d_3s^3+d_2s^2+d_1s+d_0)} \right|^2 \times \left| \frac{1}{(\tau s+1)(\zeta s+1)} \right|^2 + \frac{\gamma^2}{|(\tau s+1)(\zeta s+1)|^2} + \lambda^2 m^2 \left| \frac{C_1s+C_0}{(\lambda Ts+\sqrt{\lambda^2+m^2})(\mu s+1)} \right|^2 ds; \quad (17)$$

$$d_3 = \lambda Ta_2;$$

$$d_2 = \lambda Ta_1 + \sqrt{\lambda^2+m^2} a_2;$$

$$d_1 = \lambda Ta_0 + \sqrt{\lambda^2+m^2} a_1;$$

$$d_0 = \sqrt{\lambda^2+m^2} a_0,$$

де  $l_3, l_2, l_1, l_0$  – коефіцієнти полінома першого доданка функціонала (2) після визначення подвійної дійсної частини.

Обчисливши функціонал (17) за відповідними таблицями праці [4], отримаємо відносне мінімальне значення інтеграла (17) як функцію параметрів  $\lambda, \gamma, m, T, \mu, \tau, \zeta$ .

Метою розв'язання цього прикладу було визначення оптимальних структур системи:

– передавальних функцій замкненої системи  $F_u^\Psi, F_x^\Psi$  та синтезованого регулятора  $W$  за формулами (14), (15), (16);

– мінімальних значень відносного показника якості (17)  $e/\sigma_\Psi^2$ ;

– окремо його складових (дисперсій помилки стабілізації  $\langle x^2 \rangle$  та дисперсії управління  $\langle u^2 \rangle$ ).

Під час побудови графічних залежностей можливо визначити ефективність системи стабілізації.

У зв'язку з достатньою складністю математичних розрахунків оптимальних структур системи стабілізації за алгоритмом (3)–(9) їх не наведено, а подано лише графічні залежності, які характеризують зведену оптимальну систему. Розрахунки системи стабілізації з оптимізованими параметрами регулятора об'єкта стабілізації [1] (при тих самих вхідних даних і структурі системи) також подано лише у вигляді графіків.



Графічні залежності для оцінки ефективності оптимальної й оптимізованої систем будують при зміні в розрахунках таких параметрів, як ваговий множник  $\lambda$  (діапазон значень  $10^{-4} \div 10^0$ ), співвідношення "шум-сигнал"  $\gamma$  ( $10^{-6} \div 10^0$ ) і сталої  $\mu$  часу збурення  $\psi$  ( $10^{-1} \div 10^{-9}$ ) з використанням можливостей програми MatLab 5.3.

Інші поверхні показано на рис. 2 при зміні сталої часу збурення  $\mu = 10^{-1} \div 10^{-9}$ .

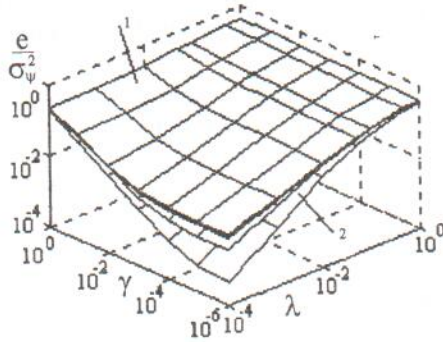


Рис. 2. Залежності  $e/\sigma_{\psi}^2$  від  $\lambda$ ,  $\gamma$  при  $\mu = 10^{-1} \div 10^{-9}$ :

1 – поверхня мінімального відносного показника якості системи при  $\mu = 10^{-9}$ ; 2 – поверхня мінімального показника якості системи при  $\mu = 10^{-1}$

Побудовані графічні залежності дають також можливість визначити вплив параметрів моделей динаміки системи на якість них самих.

Поверхні, показані на рис. 3, являють собою складові частини мінімального відносного показника якості замкненої системи: відносну дисперсію помилки стабілізації (рис. 3, а) і відносну дисперсію управління (рис. 3, б).

Проміжні поверхні на рис. 3 характеризують оптимальну систему при зміні  $\mu = 10^{-1} \div 10^{-9}$ .

Наочно показано, що зменшення співвідношення "шум-сигнал"  $\gamma$  та вагового множника  $\lambda$  призводить до суттєвого поліпшення якості системи (рис. 2; 3, а), у той час як збільшення  $\lambda$  (рис. 3, б) викликає зріст управляючого впливу на систему, що, в свою чергу, поліпшує її якість.

Вплив сталої часу збурення  $\mu$  також є помітним і вагомим для рівня якості системи.

Зменшення  $\mu$  викликає розширення смуги пропускання збурення  $\psi$ , що призводить до погіршення якості замкненої системи.

Порівняльну ефективність системи стабілізації з оптимальною структурою регулятора та при оптимізованих параметрах цього регулятора, неважко визначити з рис. 4 при різних значеннях сталої часу збурення.

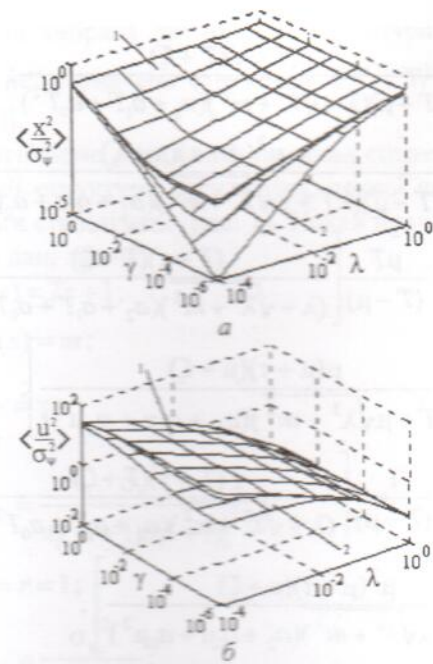


Рис. 3. Залежності складових відносного показника якості від параметрів системи  $\lambda$ ,  $\gamma$ ,  $\mu$ : а – відносна дисперсія помилки стабілізації; 1 – поверхня відносної дисперсії помилки стабілізації системи при  $\mu = 10^{-9}$ ; 2 – поверхня відносної дисперсії помилки стабілізації системи при  $\mu = 10^{-1}$ ; б – відносна дисперсія управління; 1 – поверхня відносної дисперсії управління оптимальної системи при  $\mu = 10^{-9}$ ; 2 – поверхня відносної дисперсії управління оптимальної системи при  $\mu = 10^{-1}$

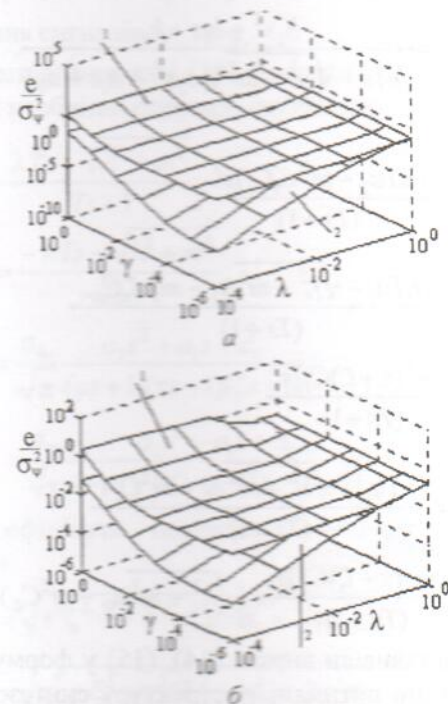


Рис. 4. Порівняльна ефективність оптимізованої та оптимальної систем: а –  $\mu = 10^{-1}$ : 1 – поверхня якості системи стабілізації з оптимізованими параметрами регулятора; 2 – поверхня мінімального відносного показника якості оптимальної системи; б –  $\mu = 10^{-9}$ : 1 – поверхня якості оптимізованої системи стабілізації; 2 – поверхня якості оптимальної системи стабілізації



## Висновки

Регулятор системи, вибраний за допомогою оптимального алгоритму (3)–(9), дозволяє значно поліпшити якість системи стабілізації порівняно з оптимізованою системою, де регулятор вибраний шляхом оптимізації його параметрів. Отже, по-перше, для відшукування оптимальних структур  $F_u^\psi$ ,  $F_x^\psi$ ,  $W$  за зазначеним алгоритмом необхідно знати динамічні характеристики об'єкта, збурення та завади. По-друге, визначена оптимальна структура регулятора замкненої системи стабілізації, як показує розглянутий приклад, може підвищувати якість (точність) стабілізації в декілька порядків порівняно з системою, де регулятор вибраний шляхом оптимізації його параметрів. По-третє, конкретні величини окремих визначальних параметрів моделей динаміки заданої частини системи (об'єкта, впливів) можуть також суттєво впливати на якість стабілізації.

## Список літератури

1. Блохін Л.М., Держак С.В., Білак Н.В. Порівняння ефективності неоптимальної системи та системи стабілізації з оптимізованими параметрами регулятора // Вісн. НАУ. – № 4, 2002. – С. 132–136.
2. Блохин Л.Н. Оптимальные системы стабилизации. – К.: Техніка, 1982. – 144 с.
3. Блохин Л.Н., Кадышев И.К., Трифонов-Богданов П.И. Основы навигации и пилотажно-навигационные комплексы: Учеб. для вузов ГА / Под ред. Л.Н. Блохина. – М.: Воздуш. трансп., 1993. – 244 с.
4. Ньютон Дж.К., Гулд Л.А., Кайзер Дж.Ф. Теория линейных следящих систем. – М.: Физматгиз, 1961. – 407 с.

Стаття надійшла до редакції 11.04.03.

Л.Н. Блохин, Н.В. Білак

Сравнение эффективностей оптимальных систем стабилизации с произвольной и заданной структурами

Рассмотрено сравнение эффективностей определенной по известному алгоритму оптимальной системы стабилизации и системы стабилизации с оптимизированными параметрами регулятора при случайных воздействиях. Построены графические зависимости оценок эффективности систем от параметров, существенных для решения задач синтеза.

L.M. Blokhin, N.V. Bilack

Comparison of the efficiency of optimum stabilization systems with arbitrary and intended structures

Comparison of the efficiency defined by known algorithm of optimum stabilization system and stabilization system with the optimization parameters of the regulator in casual circumstances is examined. The graphic dependencies of estimations of efficiency systems from parameters, which are important for doing synthesis sums, are constructed.