УДК 519.248.043.2

В.В. Нечипорук

СТАЦІОНАРИЗАЦІЯ СПЛАЙН-РОЗПОДІЛІВ МЕТОДОМ МАСШТАБУВАННЯ

Інститут інформаційно-діагностичних систем НАУ, e-mail: iids@ukrpost.net

Розглянуто питання стаціонаризації сплайн-розподілів, що описують кусково-нестаціонарні процеси відмов при розрахунку випробувань на надійність, методом масштабних множників.

Постановка проблеми

Питання надійності продукції є приоритетним при розробці та експлуатації виробів чи систем. У теорії надійності для аналізу поведінки виробів, які працюють у нестаціонарному режимі, найбільш часто використовують експоненційні функції щільності сплайн-розподілу.

На відміну від звичайної показникової функції розподілу сплайн-розподіл описує кусково-нестаціонарні процеси відмов.

Причому характер нестаціонарності змінюється миттєво в моменти часу, які збігаються з вузлами сплайна.

У той же час для застосування класичних методів планування випробувань на надійність теоретичний апарат має найпростіший вигляд, коли процес відмов стаціонарний, тобто інтенсивність відмов λ не змінюється протягом усього часу випробувань.

Запропонований метод “стаціонаризації” процесу відмов для експоненційного сплайн-розподілу з наперед відомою кількістю вузлів та відомим їх розташуванням у часі названий методом масштабних множників.

Постановка задачі

Для визначення сутності методу масштабних множників задамо функцію щільності сплайн-розподілу, її вузли й інтенсивності відмов на ділянках стаціонарності.

Пропонуємо деформувати довжини відрізків часу між вузлами сплайн-розподілу за допомогою масштабних множників, обернено пропорційних інтенсивностям відмов на відповідних інтервалах часу.

При цьому один із масштабних множників має обов’язково дорівнювати одиниці. Його вводять на інтервалі, який пропонується залишити без зміни і до якого зводяться всі інші інтервали. Для зручності подальших викладок перший інтервал часу $\left(0,T_1\right]$ залишаємо без зміни.

Розв’язування задачі

Як відомо, сплайн-розподіли являють собою кусково-неперервні функції розподілу.

Розглянемо деяку випадкову величину $\xi(\omega)$, $\omega\in\Omega$, $\{\Omega,\mathfrak{F},\mathbf{P}\}$ – імовірнісний простір.

У такій постановці зразу припускаємо, що функція розподілу має вигляд:

$$F(x)=\mathrm{P}\{\omega:\xi(\omega)<x\}=\sum_{i=1}^{k}\widetilde{F}_i(x)I_i(x), \tag{1}$$

$x\in(-\infty,\infty)$,

де

$$\widetilde{F}_i(x)=I_i(x)F(x),\quad i=\overline{1,k}\,; \tag{2}$$

$$I_i(x)=\begin{cases}1, & x\in(x_{i-1},x_i]\\ 0, & x\notin(x_{i-1},x_i]\end{cases} \text{ – індикатор;}$$

$\{x_1,x_2,...,x_k\}$ – точки розбиття числової вісі R на частини;

$k=1,2,...,\ -\infty<x_1<x_2<....<x_k<\infty$.

Функція, яка задається з допомогою виразу (1), називається сплайн-розподілом, а точки $x_1,\ldots,x_k$ – вузлами сплайн-розподілу.

У найпростішому випадку, коли $k=1$, x_k – скінченне число, маємо сплайн-розподіл з одним вузлом.

Легко бачити, що розбиття точками $\{x_1,x_2,...,x_k\}$ породжує розбиття простору елементарних подій Ω на відповідні підмножини (події, які полягають у тім, що розглядається i-й інтервал):

$$A_i=\{\omega:x_{i-1}\le\xi(\omega)<x_i\}.$$

Оскільки A_i – елементи розбиття Ω, то

$$\bigcup_{i=1}^{k}A_i=\Omega,\quad A_i\bigcap A_j=\varnothing,\ i\ne j,$$

і тоді

$$I_i(x)=I_i(A_i)=\begin{cases}1, & \omega\in A_i,\\ 0, & \omega\notin A_i.\end{cases}$$

Система $\{A_i\}$ є системою несумісних подій.

Функції (2) можуть бути вибрані довільно, і тому їх треба зразу задавати, але за умови гарантії неперервності $F(x)$.

Наприклад,

$$\widetilde{F}_{i-1}(x_{i-1})=\widetilde{F}_i(x_i),\quad i=\overline{2,k}. \tag{3}$$

Сплайн-розподіл, у якого всі $\widetilde{F}_i(x)$ є абсолютно неперервними функціями та виконується умова (3), будемо називати неперервним сплайн-розподілом або сплайн-розподілом першого роду.

Сплайн-розподіл, у якого всі $\widetilde{F}_i(x)$ є неперервними всередині інтервалів їх визначення $(x_{i-1}, x_i]$, а умова (3) не завжди виконується, будемо називати сплайн-розподілом другого роду.

Функції сплайн-розподілу виразу (1) відповідає сплайн-щільність, яка визначається звичайним способом

$$p(x) = F'(x).$$

Якщо у вузлах сплайн-розподілу функція розподілу має кутову точку – особливу точку плоскої прямої, в якій стикуються дві послідовні гілки кривої, причому кожна з них має в цій точці односторонню дотичну, відмінну від другої, то її щільність у цій точці буде мати розрив. Цей розрив не можна усунути з допомогою вимоги, аналогічної виразу (3), оскільки порушується основна властивість нормування щільності розподілу або функції розподілу. Але цього можна досягти зміною масштабу по осі абсцис для тих x, які перевищують значення T у вузлі.

Метод, який буде розглядатися далі, полягає у виборі масштабних коефіцієнтів такої заміни для різних ділянок стаціонарності.

Детально це питання буде розглядатися для випадку сплайн-експоненційного розподілу з одним вузлом.

Оскільки сплайн-розподіли будуть цікавити нас стосовно задач теорії надійності, то, в першу чергу, розглянемо експоненційні сплайн-розподіли, що з'являються під час дослідження систем, відмови яких описуються процесами Пуассона.

Якщо процес відмов є однорідним (стаціонарним), тобто інтенсивність відмов є величиною постійною, то в цьому випадку відмови описуються однорідним процесом Пуассона з незалежними приростами. Цей випадок детально розглядається в роботах [1–3].

У випадку неоднорідних процесів Пуассона з незалежними приростами задача дуже ускладнюється, але коли відомі вузли для неоднорідного процесу відмов, а сам процес є кусково-неоднорідним, то можна побудувати методику, згідно з якої такий процес можна стаціонаризувати.

Відомо, що експоненційний сплайн описує процес Пуассона з незалежними приростами, тобто безмежно подільний процес Пуассона.

Нехай є два однорідних процеса Пуассона з незалежними приростами:

$$\pi_{\lambda_1}(t) \text{ та } \pi_{\lambda_2}(t),\ t \in [0,\infty),$$

$$\pi_{\lambda_1}(0) = \pi_{\lambda_2}(0) = 0.$$

Це випадок, коли $\Xi_2 = (\pi_{\lambda_1}(t), \pi_{\lambda_2}(t))$.

Відповідно до функції розподілу ймовірностей

$$\mathbf{P}\{\pi_{\lambda_1}(t) = k\} = \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} e^{-\lambda_1 t};$$

$$\mathbf{P}\{\pi_{\lambda_2}(t) = k\} = \frac{(\lambda_2 t)^k}{k!} e^{-\lambda_2 t}.$$

Нехай $t = T$ момент розладу, тоді процес розладу має вигляд

$$\pi_{\lambda_1,\lambda_2}(t) = \pi_{\lambda_1}(t) I_t(0,T] + \pi_{\lambda_2}(t) I_t(T,\infty).$$

Вважаємо, що в момент розладу $\pi_{\lambda_1}(T) = \pi_{\lambda_2}(T)$ з імовірністю 1.

Процес $\pi_{\lambda_1,\lambda_2}(t)$ не можна вважати однорідним, оскільки в нього λ не є сталою на всьому проміжку $t \in R,\ t > 0$.

Позначимо випадковий інтервал часу між подіями для $\pi_{\lambda_1}(t)$ через $\tau_k^{(1)}$, а для $\pi_{\lambda_2}(t)$ через $\tau_k^{(2)}$, $k = 0,1,\ldots$.

Оскільки інтенсивність цих подій різна: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ маємо $\pi_{\lambda_1,\lambda_2}(t) = \pi_\lambda(t)$), то величини інтервалів часу між сусідніми подіями $\tau^{(1)}$ та $\tau^{(2)}$ на відрізках $(0,T]$ і (T,∞) будуть тепер мати різні розподіли.

У цьому випадку маємо сплайн-розподіл з одним вузлом.

Експоненційний сплайн-розподіл з одним вузлом

Позначимо через A відмову (подія, яка полягає в безумовній відмові в роботі), через $A_{(0,T]}$ – подію, яка полягає у відмові приладу на відрізку часу $(0,T]$, а через $A_{(T,\infty)}$ подію, яка полягає у відмові приладу на відрізку часу (T,∞).

Зокрема, при показниковому розподілі інтервалу часу між відмовами $\tau(\omega)$ подія A може відбутися або завдяки тому, що $\tau(\omega) \in (0,T]$, тобто відбулася подія $A_{(0,T]}$, або завдяки тому, що $\tau(\omega) \in (T,\infty)$, тобто відбулася подія $A_{(T,\infty)}$ за умови, що подія $A_{(0,T]}$ не відбулася.

При цьому припускаємо, що на інтервалі $(0,T]$ інтенсивність відмов λ_1, а на інтервалі (T,∞) інтенсивність відмов λ_2. Отже,

$$\begin{aligned} &A = \{\omega : \tau(\omega) < t\}; \\ &A_{(0,T]} = \{\omega : \tau(\omega) < t | t \le T\}; \\ &A_{(T,\infty)} = \{\omega : \tau(\omega) < t | t > T\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Крім того,

$$\begin{aligned} &A = A_{(0,T]} + A_{(T,\infty)}; \\ &A_{(0,T]} \bigcap A_{(T,\infty)} = \varnothing. \end{aligned} \tag{5}$$

Виходячи з виразів (4) та (5) маємо

$\mathbf{P}(A)=\mathbf{P}(A_{(0,T]})+\mathbf{P}(\mathbf{A}_{(T,\infty)})$.

$\mathbf{P}(A_{(0,T]})$ як функція t на відрізку $(0,T]$ є функцією розподілу випадкової величини $\tau(\omega)$ за умови, що на відрізку (T,∞) відмови не може бути, тому при $t<T$

$\mathbf{P}(A_{(0,T]})=\mathbf{P}\{\tau(\omega)<t\}=1-\exp(-\lambda_1 t)$.

Функцією надійності називається функція від t вигляду

$\mathbf{P}\{\tau(\omega)\geq t\}=\exp\{-\lambda t\}$.

$\mathbf{P}(A_{(T,\infty)})$ як функція t є умовною функцією розподілу випадкової величини $\tau(\omega)$ на відрізку (T,∞):

$$\mathbf{P}(A_{(T,\infty)})=\begin{cases}\mathbf{P}\{\tau(\omega)<t-T\} & \text{при } \tau(\omega)\geq T,\\ 0 & \text{при } (\omega)<T\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\mathbf{P}\{\tau(\omega)<t-T\}\mathbf{P}\{\tau(\omega)\geq T\} & \text{при } \tau(\omega)\geq T,\\ 0 & \text{при } \tau(\omega)<T.\end{cases}$$

Оскільки

$\mathbf{P}\{\tau(\omega)\geq T\}=\exp(-\lambda_1 T)$,

то $\mathbf{P}(A_{(T,\infty)})=[1-\exp(-\lambda_2(t-T))]\exp(-\lambda_1 T)$

при $\tau(\omega)\geq T$;

$\mathrm{P}(A_{(T,\infty)})=0$ при $\tau(\omega)<T$.

Виходячи з зазначених викладок функцію розподілу випадкової величини $\tau(\omega)$ при всіх t, що належать інтервалу $(0,T)$, у загальному випадку можна записати так:

$$F_\tau(t;\lambda_1,\lambda_2,T)=[1-\exp(-\lambda_1 t)]I_t(0,T]+ \\ +[1-\exp(-\lambda_2(t-T)]\exp(-\lambda_1 T)I_t(T,\infty), \quad (6)$$

а це значить, що $\mathbf{P}(A)$ як функція t є функцією розподілу випадкової величини $\tau(\omega)$, для якої

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}(A)=p_\tau(t;\lambda_1,\lambda_2,T)= \\ =\lambda_1\exp\{-\lambda_1 t\}I(0,T]+ \\ +\lambda_2\exp\{-\lambda_2 t-(\lambda_1-\lambda_2)T\}I(T,\infty) \text{ при } t>0,$$

де $p_\tau(t;\lambda_1,\lambda_2,T)$ – щільність розподілу $\tau(\omega)$.

Позначимо

$$\widetilde{F}_1(t)\big|_{t\in(0,T]}=[1-\exp\{-\lambda_1 t\}]I_t(0,T]; \quad (7)$$

$$\widetilde{F}_2(t)\big|_{t>T}=[1-\exp\{-\lambda_2(t-T)\}]\times \\ \times\exp\{-\lambda_1 T\}I_t(T,\infty). \quad (8)$$

Функції (7) і (8) неперервні, крім точки T, де, як видно з виразу (6), неперервність порушується і виникає стрибок.

Тобто в точці T умова (3) не виконується, бо $\widetilde{F}_1(T)\neq\widetilde{F}_2(T)$.

Графік функцій (7) та (8) має вигляд, показаний на рис. 1. Для того, щоб усунути стрибок функції у вузлі, необхідно у вираз (8) увести доданок $(1-\exp\{-\lambda_1 T\})I_t(T,\infty)$.

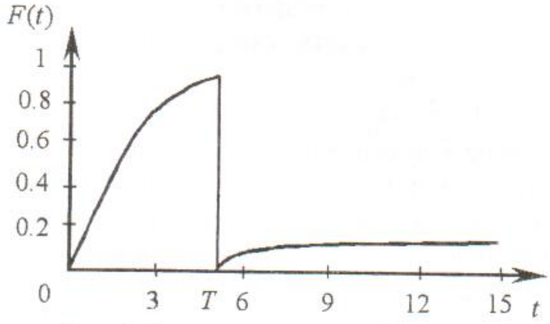

Рис. 1. Сплайн-розподіл другого роду

Отримуємо формулу функції сплайн-розподілу:

$$F_\tau(t;\lambda_1,\lambda_2,T)=[1-\exp(-\lambda_1 t)]I_t(0,T]+ \\ +[1-\exp(-\lambda_2(t-T)]\exp(-\lambda_1 T)+ \\ +(1-\exp\{-\lambda_1 T\})]I_t(T,\infty). \quad (9)$$

Отже, шляхом введення доданку $(1-\exp\{-\lambda_1 T\})I_t(T,\infty)$ у функцію розподілу (6) вдалося уникнути стрибка у вузлі T, тобто в цьому вузлі досягнуто виконання умови (3), але в цьому вузлі залишається кутова точка (рис. 2).

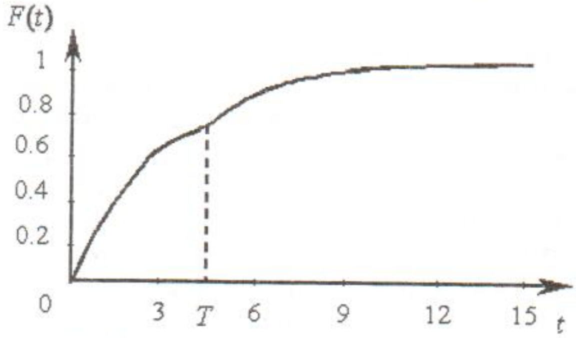

Рис. 2. Функція сплайн-розподілу, в якої не виконується умова $F_1(T)\neq F_2(T)$

Після введення позначень:

$t_1(w)=k_1 w$ і $t_2(w)=k_2 w$,

де $k_1=1$, $k_2=\lambda_1/\lambda_2$ – масштабні коефіцієнти першого і другого інтервалу відповідно, час являє собою функцію деякої змінної $t=t(w)$.

У формулі (9) замінимо час t відповідними функціями $t_1(w)$ і $t_2(w)$, що характеризують зміну часу на відповідних інтервалах.

У результаті отримуємо функцію сплайн-розподілу, в якій немає кутової точки (рис. 3, крива *1*), тобто вирівняну функцію сплайн-розподілу:

$$F_\tau(t;\lambda_1,\lambda_2,T)=[1-\exp\{-\lambda_1 t_1(t)\}]I_t(0,T]+$$
$$[1-\exp\{-\lambda_2(t_2(t-T)\}]\exp\{-\lambda_1 T\}+ \qquad (10)$$
$$+\left(1-\exp\{-\lambda_1 T\}\right)]I_t(T,\infty).$$

Функції (10) відповідає щільність розподілу:

$$p_\tau(t;\lambda_1,\lambda_2,T)=\lambda_1\exp\{-\lambda_1 t_1(t)\}I_t(0,T]+$$
$$+\lambda_1\exp\{-\lambda_2 t_2(t-T)-\lambda_1 T\}I_t(T,\infty).$$

Графіки функції розподілу та щільності розподілу інтервалу часу між відмовами показані на рис. 3, де по осі t_1 відкладено час без зміни масштабу, а по осі t_2 уведено масштабний коефіцієнт з моменту T.

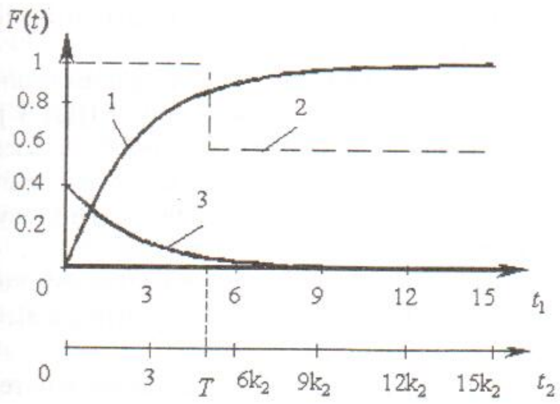

Рис. 3. Вирівняні функції сплайн-розподілу та щільності розподілу:
1 – функція розподілу; *2* – значення масштабного коефіцієнта k на відповідних інтервалах; *3* – щільність розподілу

Висновки

Як видно із графіків, шляхом масштабування отримуємо однотипний показниковий розподіл на всьому досліджуваному інтервалі часу. При цьому для показникового сплайн-розподілу з одним вузлом маємо дві можливості введення масштабних коефіцієнтів: або на першому відрізку часу вводимо коефіцієнт k_1, відмінний від 1, а $k_2=1$, або на першому $k_1=1$, а на другому $k_2\neq 1$.

Відповідно до цього приходимо до випадку, коли інтенсивність протягом усього інтервалу $(0,\infty)$ є сталою і дорівнює або λ_1, або λ_2. Але відповідним чином змінюються часові масштаби.

Цей метод можна поширити і на сплайн-розподіли експоненційного типу з кількома вузлами. У подальшому цей метод доцільно називати методом масштабних коефіцієнтів. Він дозволяє проводити планування випробувань на надійність виробів, які працюють у кусково-нестаціонарних режимах, за відомими методами, тобто звести нестаціонарні задачі до стаціонарних.

Список літератури

1. *Броди С.М., Власенко О.Н., Марченко Б.Г.* Расчет и планирование испытаний на надежность. – К.: Наук. думка, 1970. –192 с.
2. *Вальд А.* Последовательный анализ. – М.: Физматгиз, 1966. – 307 с.
3. *Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д.* Математические методы в теории надежности. – М.: Наука, 1965. – 524 с.

Стаття надійшла до редакції 10.04.03.

В.В. Нечипорук

Стационаризация сплайн-распределений методом масштабирования

Рассмотрен вопрос стационаризации сплайн-распределений, описывающих кусочно-нестационарные процессы отказов при расчете испытаний на надежность, методом масштабных множителей.

V.V. Nechiporuk

Making stationary of splinedistribution with help of scale factors method

Making stationary of splinedistribution is considered, whih deseribe pice-nonstationary processes of faults by calculations of reliability tests with help of scale factors method.