

УДК 919.24

3942.206031.8

Ю.В. Куц, канд. техн. наук  
Л.М. Щербак, д-р. техн. наукСТАТИСТИЧНА ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ  
КУТОВИХ ВИМІРЮВАНЬ СИГНАЛІВ

Інститут інформаційно-діагностичних систем НАУ, e-mail: iidsu@ukrpost.net

*Розглянуто ймовірнісну модель кутових вимірювань сигналів, які описуються періодичними функціями. Наведено геометричну інтерпретацію кутових вимірювань. Запропоновану модель можна використовувати для статистичної обробки результатів фазових вимірювань сигналів.*

## Вступ

Для визначення характеристик широкого кола різних фізичних явищ, процесів і сигналів використовуються методи кутових вимірювань [1-6]. До них належать не тільки методи вимірювань плоских та просторових кутів, що введені як додаткові одиниці вимірювань системи СІ, а й параметри та характеристики циклічних фізичних процесів. Математичними моделями таких процесів є:

- детерміновані періодичні функції;
- періодичні випадкові процеси;
- сигнальні поля з характеристиками, які мають періоди за просторовим і часовим аргументами.

Прикладами кутових вимірювань можуть бути дослідження характеристик періодичної просторової орієнтації геологічних пластів земної кори, закономірності динаміки коливальних процесів різних фізичних і технічних систем. Крім того, досліджуються нециклічні процеси, характер зміни яких вивчається за певними циклами. Наприклад, у метрології – це розподіл опадів за днями місяця чи року, у медицині – розподіл захворювань із циклом один місяць року.

З метою розробки єдиного підходу до постановки задач кутових вимірювань пропонується всі скінченні значення періодів та інтервалів досліджень як за часом, так і в просторі відображати на інтервалі  $[0, 2\pi)$ . Далі всі значення кутів подаються в радіанах без додаткових позначень одиниць вимірювання.

До кутових вимірювань також належать і фазові вимірювання, але вони мають певну специфіку.

Значна кількість радіотехнічних задач полягає у визначенні характеристик випадкового процесу [7]:

$$\xi(\omega, t) = A(\omega, t) \cos[\varphi(\omega, t)], \quad \omega \in \Omega, t \in [-\infty, \infty], \quad (1)$$

де  $\omega$  – елементарна подія з простору подій  $\Omega$ ;  $A(\omega, t)$  – обвідна процесу;  $\varphi(\omega, t)$  – фазова характеристика процесу.

Випадковий процес  $\xi(\omega, t)$  належить до класу процесів зі скінченною потужністю.

Для процесу (1) існує стохастичне перетворення Гільберта [7]:

$$\hat{\xi}(\omega, t) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\omega, \tau)}{\pi(\tau - t)} d\tau,$$

де  $\frac{1}{\pi(\tau - t)}$  – ядро перетворення Гільберта.

Саме перетворення існує в середньоквадратичному сенсі з урахуванням головного значення інтеграла за Коші. Таке перетворення дає можливість однозначно визначити обвідну і фазу процесу (1):

$$A(\omega, t) = \sqrt{\xi^2(\omega, t) + \hat{\xi}^2(\omega, t)}; \quad (2)$$

$$\varphi(\omega, t) = \arctg \frac{\hat{\xi}(\omega, t)}{\xi(\omega, t)} + \frac{\pi}{2} \{2 - \text{sign} \hat{\xi}(\omega, t) \times$$

$$\times (1 + \text{sign} \xi(\omega, t))\} + 2\pi L(\omega, t), \quad \varphi(\omega, t = 0) < 2\pi,$$

де  $\text{sign}(\cdot)$  – знакова функція;  $L(\omega, t)$  – числова функція, яка дозволяє зобразити фазову характеристику в околі точок, кратних  $2\pi$ , без стрибків.

У частинному детермінованому випадку визначають різницю фазового зсуву

$$\varphi = (\varphi_1 - \varphi_2) \in [0, 2\pi)$$

для двох когерентних моногармонічних сигналів:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= U_1 \cos(2\pi f t + \varphi_1), \quad f \neq 0; \\ u_2(t) &= U_2 \cos(2\pi f t + \varphi_2), \quad t \in [0, T_c], \end{aligned} \quad (3)$$

де  $U_1, U_2$  – амплітуди відповідно вимірювального та опорного сигналів ( $U_1, U_2 > 0$ );  $f$  – циклічна частота сигналів;  $T_c$  – час спостереження сигналів ( $T_c \gg T$ );  $T = f^{-1}$  – період коливальності.

Фазовий зсув  $\varphi$  залишається незмінним при фіксованому часі спостереження  $T_c$ . Усі зазначені параметри – дійсні числа. У більшості випадків  $\varphi_2 = 0$ , тоді  $\varphi = \varphi_1$ .

Фазовий зсув, як вимірювана величина, належить до класу розподілених на колі величин. До цього ж класу величин належить і плоский кут, визначення якого досліджувалося в роботі [5]. Але фазові вимірювання мають певні особливості.

У першу чергу, це залежність фазових вимірювань від частоти, що дозволяє виконувати багаточастотні фазові вимірювання.

Крім того, кутові вимірювання за характером належать до прямих вимірювань, а фазові – до непрямих, оскільки оцінка фазового зсуву, як правило, виконують на підставі вимірювань амплітуди сигналу, які супроводжуються виникненням та впливом на результат певних додаткових похибок вимірювання.

Фазовий зсув і кут мають багато спільних властивостей. По-перше, обидві ці величини однозначно визначаються в межах інтервалу  $[0, 2\pi)$ . По-друге, для однозначної оцінки кутів необхідно визначити початковий напрям, а для однозначної оцінки різниці фазових зсувів – опорне коливання з нульовим початковим фазовим зсувом. По-третє, ці величини вимірюються однаковими одиницями – радіанами, градусами або частками фазового циклу. По-четверте, міра фазового зсуву і плоского кута  $2\pi$  рад, природно відтворюється відповідно під час завершення одного повного циклу гармонічного процесу або як центральний кут на площині кола. Ці особливості вказують на єдину природу фазових і кутових вимірювань. Тому розглядаючи статистичну обробку результатів кутових вимірювань сигналів, використаємо положення теорії статистичного аналізу результатів кутових спостережень [5].

Для розв'язання задачі вимірювання фазових зсувів із застосуванням сучасного апарату теорії ймовірності та математичної статистики важливим питанням є розробка ймовірнісних моделей фазових зсувів сигналів. Особливої актуальності це питання набуває при аналізі роботи фазовимірювальної апаратури у разі низького співвідношення сигнал/завада. Ймовірнісна модель дає можливість використовувати широке коло алгоритмів статистичної обробки результатів фазових вимірювань.

**Мета** статті полягає в розробці та дослідженні ймовірнісної моделі фазових зсувів, застосування якої дозволить оцінювати фазові зсуви періодичних процесів з урахуванням особливостей їх випадкової природи.

Розвиток цифрових засобів обробки інформації сприяв тому, що сучасні цифрові методи обробки стали домінуючими у вимірювальній техніці. Цифрові методи обробки інформації значно розширили сферу використання вимірювань, збільшили частотний і динамічний діапазони характеристик сигналів. Це стосується і техніки вимірювання фазових зсувів. Тому модель розглядається для дискретних сигналів, заданих функціями дискретного аргументу [5].

## Постановка задачі

Нехай на інтервалі спостереження  $[0, T_c]$  задано ґратку

$$S = \{t_1, t_2, \dots, t_N\}, \quad (4)$$

множина елементів якої є впорядкованою і для неї виконується нерівність

$$0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots < t_N \leq T_c.$$

У більшості випадків елементи ґратки  $S$  розташовані рівномірно й утворюють арифметичну прогресію

$$t_k = t_1 + (k-1)\Delta t, \quad k \in [1, N],$$

де  $\Delta t$  – крок ґратки.

На ґратці  $S$  задано дві функції

$$u_1(t_k) = U_1 \cos(2\pi f t_k + \varphi), \quad t_k \in S, \quad \varphi \in [0, 2\pi); \quad (5)$$

$$u_2(t_k) = U_2 \cos(2\pi f t_k),$$

які є зображення сигналів (3) з дискретним аргументом (4). Множина  $S$  є областю визначення функцій (5), а множина всіх значень функцій  $\{u_1(t_k), u_2(t_k), k \in [1, N]\}$  – їх областю значень.

Функції (5) належать до лінійного нормованого функціонального простору  $E_N$ , тобто  $u_1(t_k), u_2(t_k) \in E_N$ , де  $N$  – обсяг ґратки.

Для елементів простору  $E_N$  виконується операція скалярного добутку функцій

$$(u_m, u_l) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_m(t_k) u_l(t_k) j(t_k),$$

де  $m, l$  – номери елементів простору  $E_N$ ,  $j(t_k)$  – вагова функція ( $j(t_k) \geq 0$ ).

Також задається норма кожного елемента простору  $E_N$ :

$$\|u_m\| = \sqrt{(u_m, u_m)}.$$

У просторі  $E_N$  функцій дійсного аргументу існує оператор зсуву:

$$A_{\Delta t} u_m(t_k) = u_m(t_k + \Delta t) = u_m(t_{k+1}). \quad (6)$$

Послідовно застосовуючи оператор зсуву (6)  $q$  разів маємо

$$\begin{aligned} A_{\Delta t} \dots A_{\Delta t}^{(q)} u_m(t_k) &= A_{q\Delta t} u_m(t_k) = \\ &= u_m(t_k + q\Delta t) = u_m(t_k + \tau), \end{aligned}$$

де  $\{\tau = q\Delta t, q \in \overline{0, \infty}\}$  – довільний зсув сигналу в часі на заданій дискретній множині.

Для повного опису фазового зсуву  $\varphi(\omega) = \varphi$  як випадкової величини побудуємо ймовірнісну модель фазових зсувів періодичних сигналів і визначимо її основні характеристики.

Задачу почнемо розв'язувати з розгляду моделі кутових спостережень на площині [8].

### Ймовірнісна модель кутових спостережень на площині

Задамо на площині декартову систему координат  $xOy$ . Результати вимірювання кутів  $\Psi$  відображаються в цій системі вектором  $\mathbf{r}$  із початком у точці  $O$  і  $|\mathbf{r}|=1$ . Кінець вектора має координати

$$x = \cos \Psi; \quad y = \sin \Psi.$$

Кути від осі  $Ox$  відраховують, як правило, у оберненому напрямі ходу годинникової стрілки. Отже  $\arg \mathbf{r} = \Psi$ . У разі зміни  $\Psi$  на  $2\pi$  радіан кінець вектора  $\mathbf{r}$  описує на площині  $xOy$  повне коло одиничного радіуса. Можна побудувати і симетричну систему відрахування кутів  $\Psi$  за ходом годинникової стрілки, тобто  $\Psi \in (-\infty, 0]$ .

Величину  $\Psi \in [0, \infty)$  можна трактувати як повний кут повороту вектора  $\mathbf{r}$ . У загальному випадку  $|\Psi| > 2\pi$ . Під час спостережень кутових величин досліджуються напрями вектора  $\mathbf{r}$  у просторі, які характеризуються кутами  $\psi \in [0, 2\pi)$ :

$$\psi = \Psi(\bmod 2\pi) = \Psi - \left[ \frac{\Psi}{2\pi} \right]^+ 2\pi,$$

де  $[\cdot]^+$  – операція вилучення цілої частини числа.

Для випадкового кута  $\Psi(\omega) = \Psi$  його дробова частина  $\psi$  також випадкова величина, тобто  $\psi(\omega) = \psi$ .

Для побудови ймовірнісної моделі випадкових кутів вектор  $\mathbf{r}$  має нескінченне число значень і описує на площині  $xOy$  коло одиничного радіуса (рис.1).

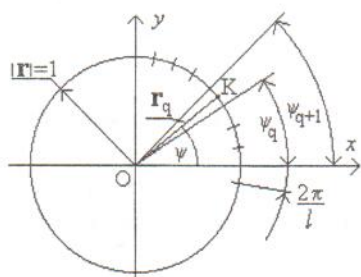


Рис.1

Розділемо коло на скінченне число  $l$  рівних дуг точками кола  $\frac{\pi}{l}(2q+1)$ ,  $q = \overline{0, (l-1)}$ , почавши відлік  $q$  від осі  $Ox$  у напрямку проти ходу годинникової стрілки. Ці точки утворюють скінченне розбиття  $D$  одиничного кола. Наприклад, при  $l=4$  маємо крок  $\frac{\pi}{2}$  і множину точок розбиття  $\left\{ \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi \right\}$ .

З'єднаємо початок координат з указаними точками на колі векторами  $\mathbf{r}_q$ . Побудовані радіус-вектори утворюють із віссю  $Ox$  кути

$$\psi_q = \frac{\pi}{l}(2q+1), \quad q = \overline{0, (l-1)}.$$

Виділимо елементарну подію  $\omega_q$ , яка настає внаслідок реалізації такої сукупності умов: для довільних дійсних  $\psi_q$  і таких  $\psi_{q+1}$ , що  $0 \leq \psi_{q+1} - \psi_q < 2\pi$ , в інтервалі  $[\psi_q, \psi_{q+1})$  знайдеться число  $\theta$ , яке є порівняним за модулем  $2\pi$  зі значенням  $\psi$ , що визначає напрямок  $\mathbf{r}$ . Це твердження можна записати як

$$\omega_q = \{E\psi : \psi \equiv \theta(\bmod 2\pi), \theta \in [\psi_q, \psi_{q+1})\}, \\ q = \overline{1, l-1}.$$

Отже, континууму значень напрямків  $\mathbf{r}$  в інтервалі  $[0, 2\pi)$  поставлено у відповідність скінченну множину елементарних подій  $\Omega = \{\omega_q, q = \overline{0, l-1}\}$ , яку отримано розбиттям  $D$  одиничного кола на скінченне число  $l$  рівних інтервалів. Операції з усіма підмножинами  $\Omega$  утворюють алгебру  $\mathcal{B} = \beta(D)$ .

Для завершення побудови моделі залишилося задати ймовірності  $P_q$  подій  $\omega_q$  з простору  $\Omega$ . З урахуванням циклічної природи кутів визначимо ймовірності:

$$P_q = \begin{cases} P\{\psi_q(\bmod 2\pi) \leq \psi < \psi_{q+1}(\bmod 2\pi)\} \\ \text{при } \left[ \frac{\Psi_{q+1}}{2\pi} \right]^+ = \left[ \frac{\Psi_{q+1}}{2\pi} \right]^+ \\ + P\{\psi_q(\bmod 2\pi) \leq \psi < 2\pi\} \\ \text{при } \left[ \frac{\Psi_{q+1}}{2\pi} \right]^+ = \left[ \frac{\Psi_{q+1}}{2\pi} \right]^+ + 1. \end{cases} \quad (7)$$

Ймовірність довільної події  $B \in \mathcal{B}$  у загальному вигляді визначається як

$$P(B) = \sum_{\{\omega_q \in B\}} P(\omega_q).$$

Для обчислення ймовірностей (7) необхідно ввести функцію, яка породжує ймовірнісну міру. На відміну від функції розподілу ймовірностей на прямій, функції розподілу  $F(x)$  випадкових кутів  $\Psi$  мають складніший вигляд:

$$F_\Psi(x) = P\left\{ \omega \in \Omega : \left[ G\left( \Psi(\omega) - \left[ \frac{\Psi(\omega)}{2\pi} \right]^+ 2\pi \right) + \left[ \frac{\Psi(\omega)}{2\pi} \right]^+ + c \right] < x \right\}, \quad x \in (0, \infty), \quad (8)$$

де  $\{G(x), x \in [0, 2\pi)\}$  – головне значення функції розподілу випадкового кута  $\psi = \Psi \bmod(2\pi)$ .

На кінцях інтервалу  $[0, 2\pi)$  функція  $G(x)$  набуває значення  $G(0) = 0, \lim_{\psi \rightarrow 2\pi} G(\psi) = 1$ .

У формулі (8) константу  $c$  вибирають з умови  $F(0) = c$ . Функція розподілу (8) має такі властивості:

$$1) F(x + 2\pi) - F(x) \equiv 1;$$

2) неперервна зліва, монотонно неспадна і на відміну від функції розподілу ймовірностей на прямій не виключається випадок, коли  $F(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow \infty$ .

Функція розподілу (8) повністю задається головним значенням  $G(\psi)$  і константою  $c$ .

Функція  $F(x)$  пов'язана з відповідною щільністю розподілу імовірності  $p(x)$  співвідношенням

$$F(\Psi_{q+1}) - F(\Psi_q) = \int_{\Psi_q}^{\Psi_{q+1}} p(x) dx, \quad (9)$$

де  $\Psi_q, \Psi_{q+1}$  – фіксовані кути, що відповідають розбиттю  $D$ .

Щільність  $p(x)$  має такі властивості:

$$p(x) \geq 0;$$

$$p(x + 2\pi) \equiv p(x);$$

$$\int_0^{2\pi} p(x) dx = 1.$$

Використовуючи співвідношення (9), імовірність (7) визначають як

$$P(\Psi_q \leq \Psi(\omega) < \Psi_{q+1}) = \begin{cases} 0 & \text{для } \Psi_{q+1} < \Psi_q; \\ F(\Psi_{q+1}) - F(\Psi_q), & \Psi_q \leq \Psi_{q+1} < \Psi_q + 2\pi; \\ 1 & \text{для } \Psi_{q+1} > \Psi_q + 2\pi. \end{cases} \quad (10)$$

Імовірнісний простір  $\{\Omega, \mathcal{B}, P\}$ , де  $P = P(B), B \in \mathcal{B}$  – імовірність події  $B$ , визначає ймовірнісну модель кутових спостережень під час статистичного вимірювального експерименту.

На множині  $\Omega$  побудуємо стохастичну чи ймовірнісну міру  $\varphi(\omega_q)$ , яка дорівнює довжині дуг, що містяться між піввіссю  $Ox$  та векторами  $r_q, q = \overline{0, (l-1)}$ .

Отже,

$$\varphi(\omega_q) = \frac{2\pi}{l} q, \quad q = \overline{0, (l-1)}$$

є випадковою функцією від інтервалу розбиття  $D$ .

Множина подій  $\Omega$  відображається на множині числової осі

$$x = \{\varphi(\omega_q), q = \overline{0, (l-1)}\}, \quad x \in R.$$

На осі  $R$  будується алгебра  $\mathcal{F}$ .

### Приклад розподілу Мізеса

Розглянемо ймовірності  $P(A \in \mathcal{F})$  довільних подій  $A$  для розподілу Мізеса [8], який використовується для багатьох практичних застосувань. Щільність ймовірності цього розподілу задається виразом

$$p(x/\mu, k) = \frac{1}{2\pi I_0(k)} \exp\{k \cos[x - \mu]\}, \quad (11)$$

$$\mu < \infty, \quad k > 0$$

де  $\mu$  – середній напрям випадкового кута  $\varphi$  на колі (його математичне сподівання);  $k$  – параметр концентрації  $\varphi$  в околі значення  $\mu$ ;  $I_0(k)$  – модифікована функція Бесселя першого роду нульового порядку.

Функції  $p(x/\mu, k)$  для різних  $k$  у діапазоні значень  $\varphi \in (0, 2\pi)$  показано на рис. 2.

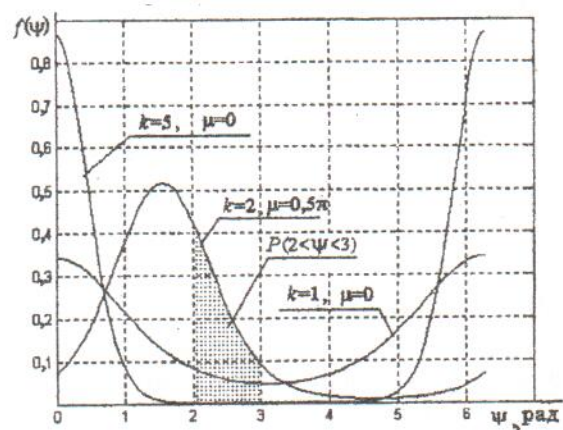


Рис.2

У випадку дослідження розподілених на колі величин закон (11) має таке саме фундаментальне значення, як і розподіл Гаусса в статистичному аналізі розподілених на прямій випадкових величин. Цей розподіл – одновершинний, симетричний відносно точки  $\varphi = \pi$  і має дві точки перегину. З ростом  $k$  розподіл Мізеса концентрується навколо моди  $\mu$ . При  $k=2$  та  $\mu = 0,5\pi$ , то розподіл майже повністю зосереджений на дузі від 0 до 3 рад, а якщо  $k \rightarrow 0$  перетворюється у рівномірний.

Використовуючи вирази (9), (10), неважко знайти ймовірності  $P(A \in \mathcal{F})$  для закону (11). Наприклад, для розподілу Мізеса з параметрами  $k=2, \mu = 0,5\pi$  ймовірності  $P(2 < \Psi < 3)$  на рис.2 відповідає площа заштрихованої частини рисунка. Отже, отриманий імовірнісний простір

$\{X, \mathcal{F}, P_\varphi\}$ , де  $P_\varphi = \{P(A), A \in \mathcal{F}\}$ , визначає ймовірнісну модель випадкового кута  $\Psi$ .

### Імовірнісна модель початкових фазових зсувів сигналів

Нехай на інтервалі  $T$  розміщується ціле число відліків сигналів (5):  $\frac{T}{\Delta t} = 4s$ , де  $s = 1, 2, 3, \dots$ ,

що дозволяє сформувати квадратурні компоненти. У цьому разі синусоїдальні послідовності  $u_1(t_k)$ ,  $u_2(t_k)$  є періодичними з періодом  $4s\Delta t$  при всіх  $t_k \in I$ , наприклад, при  $s=1$   $u_{1,2}(t_k) = u_{1,2}(t_k + 4\Delta t)$  при  $s=1$ .

Розглянемо нормований скалярний добуток сигналів (5) із ваговою функцією

$$j(t_k) = g(t_k - a)g(b - t_k) = \begin{cases} 1, & t_k \in [a, b], \quad a < b, \quad a \in [0, T_c - b + a]; \\ 0, & t_k \notin [a, b], \quad b \in (b - a, T_c] \end{cases}$$

де  $g(t_k)$  – одинична східчаста функція:

$$g(t_k) = \begin{cases} 0, & t_k < 0; \\ 1, & t_k \geq 0. \end{cases} \quad (12)$$

У випадку неперервного аргументу функції (12) відповідає функція Хевісайда. Маємо:

$$C = \frac{(u_1(t_k), u_2(t_k))}{\|u_1(t_k)\| \|u_2(t_k)\|} = \frac{U_1 U_2}{\|u_1(t_k)\| \|u_2(t_k)\|} \times \sum_{k=1}^n \cos(2\pi f_k t_k + \varphi) \cos 2\pi f_k g(t_k - a)g(b - t_k) = \cos \varphi, \quad (13)$$

де норми функцій  $u_1(t_k), u_2(t_k)$  визначаються як

$$\|u_1(t_k)\| = \sqrt{\frac{\Delta t}{b-a}} (u_1(t_k), u_1(t_k)) = \frac{U_1}{\sqrt{2}};$$

$$\|u_2(t_k)\| = \sqrt{\frac{\Delta t}{b-a}} (u_2(t_k), u_2(t_k)) = \frac{U_2}{\sqrt{2}}.$$

Застосуємо до функції  $u_2(t_k)$  оператор зсуву  $A_{3s\Delta t}$  і розглянемо нормований скалярний добуток цієї функції з  $u_1(t_k)$ :

$$S = \frac{(u_1(t_k), u_2(t_k + 3g\Delta t))}{\|u_1(t_k)\| \|u_2(t_k)\|} = \frac{U_1 U_2}{\|u_1(t_k)\| \|u_2(t_k)\|} \times$$

$$\sum_{k=1}^n \cos(2\pi f_k t_k + \varphi) \sin 2\pi f_k g(t_k - a)g(b - t_k) = \sin \varphi$$

Пару чисел  $C$  (13) і  $S$  (14) можна розглядати як координати одиничного вектора  $Z$ , що починається в точці  $O$  і описує коло в декартовій системі координат  $xOy$ . Отже, встановлено однозначну відповідність між положенням у просторі вектора  $Z$  і фазовим зсувом  $\varphi$  між сигналами (5), що для зазначеного випадку формально доз-

воляє використовувати математичний апарат теорії кутових спостережень. Параметри сигналу  $u_1(t_k)$  розраховуються за такими алгоритмами:

$$\hat{\varphi} = \arctg \frac{S}{C} + \frac{\pi}{2} [2 - \text{sign} S (1 + \text{sign} C)], \quad \varphi \in [0, 2\pi),$$

$$U_1 = \sqrt{2} \|u_1(t_k)\|.$$

За наявності шумів, завад, які відбуваються під час проходження сигналів (5) через канали обробки (аналого-цифровий перетворювач, фільтри тощо), отримані за алгоритмами (13), (14) значення  $S_{\text{ш}}, C_{\text{ш}}$  відрізняються від дійсних значень  $S, C$ , а побудовані на площині  $xOy$  такими координатами точки в загальному випадку не належать одиничному колу. Нормування таких величин для зведення результатів обчислень до одиничного кола виконаємо з формулами:

$$\hat{C} = \frac{C_{\text{ш}}}{\sqrt{C_{\text{ш}}^2 + S_{\text{ш}}^2}};$$

$$\hat{S} = \frac{S_{\text{ш}}}{\sqrt{C_{\text{ш}}^2 + S_{\text{ш}}^2}}.$$

Статистично обробляючи результати вимірювань закони розподілу фазових зсувів вибирають на основі гістограмного аналізу. Зокрема, у разі рівномірного на інтервалі  $[0, 2\pi)$  розподілу початкового фазового зсуву маємо щільність ймовірності  $p_\varphi = 1/2\pi$ .

У випадку формування фазоманіпульованих сигналів у системах передачі інформації фазові зсуви підпорядковуються гратчастому розподілу. Ймовірність фазових зсувів  $l$ -позиційного фазоманіпульованого сигналу визначають так:

$$P \left\{ \psi \equiv \left( v + \frac{2\pi r}{l} \right) \pmod{2\pi} \right\} = P_r,$$

$$r = 0, (l-1), \quad v \in [0, 2\pi),$$

де  $P_r \geq 0$ ;  $\sum_{r=0}^{l-1} P_r = 1$ .

Цей розподіл по суті є зосередженим у вершинах вписаного в одиничне коло правильного  $l$ -кутника. У випадку дискретного рівномірного розподілу маємо

$$P_0 = P_1 = \dots = P_{l-1} = l^{-1}.$$

Під час виконання фазових вимірювань часто реалізується перетворення лінійної величини  $x \in (-\infty, \infty)$  у фазовий зсув:

$$\varphi = Kx \pmod{2\pi},$$

де  $K$  – коефіцієнт перетворення.

Тому для ймовірнісного опису випадкових фазових зсувів можна використати специфічні закони розподілу ймовірностей на колі – намотані

закони [8]. Їх функції розподілу описують загальним співвідношенням

$$F_{\omega}(\varphi) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} [F(\varphi + 2\pi s) - F(2\pi s)],$$

де  $F(\varphi)$  – функція розподілу випадкової величини  $\varphi$ .

У багатьох випадках розподіл фазових зсувів задовільно апроксимується нормальним намотаним розподілом із щільністю ймовірності

$$p_{\omega}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\varphi}} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{[\varphi + 2\pi s - M(\varphi)]^2}{2\sigma_{\varphi}^2}\right\}, \quad (15)$$

де  $M(\varphi)$  – математичне сподівання  $\varphi$ ;  $\sigma_{\varphi}^2$  – дисперсія випадкового фазового зсуву  $\varphi$ .

Припущенням (15) можна скористатися в багатьох випадках, оскільки випадковий характер  $\varphi$  обумовлено дією значної кількості незалежних дестабілізуючих факторів.

Згідно з центральною граничною теоремою на колі [8] закон розподілу суми багатьох випадкових незалежних кутів прямує до нормального намотаного розподілу. У разі малих значень  $\sigma_{\varphi}$  нормальний намотаний розподіл задовільно апроксимується розподілом Мізеса.

#### Висновки

Запропонована ймовірнісна модель є подальшим розвитком моделі кутових вимірювань, зокрема моделі вимірювання фазових зсувів періодичних сигналів. У моделях ураховано особливості фазових вимірювань, які пов'язані з циклічним характером зміни фазових зсувів та випадковою природою вимірюваних сигналів, а також

геометричну інтерпретацію кутових та фазових вимірювань.

Отримані результати досліджень можна використовувати у фазометрії для статистичної обробки і дослідження фазових характеристик циклічних процесів. Запропонована модель дозволяє використовувати більший обсяг апріорної інформації про досліджувані процеси, оцінювати фазові зсуви циклічних процесів з урахуванням особливостей їх випадкової природи і, отже, підвищити під час вимірювання точність і достовірність їх оцінок.

#### Список літератури

1. *Вимірювання різниці фаз у радіоелектроніці* / Н.Т. Бова, В.А. Гойжевський, С.М. Маєвський та ін. – К.: Вища шк., 1972. – 231 с.
2. *Галахова О.П., Колтик Е.Д., Кравченко С.А.* Основы фазометрии. – Л.: Энергия, 1976. – 256 с.
3. *Кинкулькин И.Е., Рубцов В.Д., Фабрик М.А.* Фазовый метод определения координат. – М.: Сов. радио, 1979. – 280 с.
4. *Маевский С.М., Баженов В.Г., Батуревич Е.К., Куц Ю.В.* Применение методов фазометрии для прецизионного измерения расстояний. – К.: Вища шк., 1983. – 83 с.
5. *Марченко В.Б.* Ортогональные функции дискретного аргумента и их приложение в геофизике. – К.: Наук. думка, 1992. – 240 с.
6. *Фендриков А.И., Красковский А.П., Богачев И.В.* Фазоизмерительная аппаратура для неразрушающего контроля. – К.: Знание, 1983. – 17 с.
7. *Дёч Р.* Нелинейные преобразования случайных процессов. – М.: Сов. радио, 1965. – 206 с.
8. *Мардиа К.* Статистический анализ угловых наблюдений. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. – 240 с.

Стаття надійшла до редакції 04.09.03.

Ю.В. Куц, Л.Н. Щербак

Статистическая обработка результатов угловых измерений сигналов

Рассмотрена вероятностная модель угловых измерений сигналов, которые описываются периодическими функциями. Приведена геометрическая интерпретация угловых измерений. Предложенная модель может быть использована при статистической обработке результатов фазовых измерений сигналов.

Yu.V. Kuts, L.M. Stcherbak

The statistic processing of angle measurement results

The probability models of the angle measurements for signals, which are described by periodic functions, have been proposed. The geometric interpretation of the angle measurement is considered. Proposed model can be used at the statistic processing of phase measurement results.