

УДК 519.81:621.372

B 161,611.3

І.А. Жуков, д-р техн. наук
А.А. Засядько, канд. техн. наук

ЗАСТОСУВАННЯ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ПРОЦЕСУ ВІДНОВЛЕННЯ СИГНАЛІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ ПЕРЕТВОРЕННЯМИ

Інститут інформатики НАУ, e-mail: zhukov@csfnau.kiev.ua

Запропоновано неточно задані системи лінійних алгебричних рівнянь, до яких зводиться диференціальна модель задачі відновлення сигналів, розв'язувати за допомогою багатокритеріальної оптимізації. Частинні критерії стійкості і точності утворюють багатокритеріальну цільову функцію, що являє собою нелінійну схему компромісів. Отриманий розв'язок є оптимальним.

Постановка проблеми і аналіз публікацій

Обчислювальні алгоритми, засновані на диференціальних тейлорівських перетвореннях (ДТ-перетворення) успішно застосовують для розв'язання багатьох прикладних задач, що описуються диференціальними рівняннями, наприклад, для знаходження оптимальних процесів керування [1; 2].

За допомогою ДТ-перетворень диференціальні рівняння зводяться до систем скінченних рівнянь. У праці [3] цей підхід використаний для розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду, якими описується ряд некоректних задач, наприклад, задача відновлення сигналів.

Однак необхідно враховувати, що на практиці ДТ-модель зводиться до неточно заданих систем лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) через використання обмеженої кількості точок розкладання. Тому при розв'язанні таких СЛАР (навіть низкою розмірності) можуть виникнути труднощі обчислювального характеру під час використання традиційних методів розв'язання СЛАР.

Мета даної роботи полягає в дослідженні шляхів розв'язання проблеми зменшення обчислювальної складності на основі методу багатокритеріальної оптимізації, запропонованої в праці [4].

Постановка задачі і моделювання диференціальними перетвореннями

Процес вимірювання сигналу описується математичною моделлю у вигляді інтегрального рівняння Фредгольма першого роду, що дозволяє побудувати на її основі ефективні алгоритми розв'язання задачі відновлення [5; 6]:

$$\int_{\alpha}^{\beta} Q(x,s)y(s)ds = f(x), x \in [\delta, \gamma], s \in [\alpha, \beta]. \quad (1)$$

Вирішити задачу відновлення сигналу для рівняння (1) – знайти вигляд сигналу $y(s)$, спотвореного вимірювальною апаратурою з апаратною функцією $Q(x,s)$ у сигнал $f(x)$.

У праці [3] запропоновано різні апроксимації невідомого сигналу $y(s)$. Від того, наскільки вдало обрана апроксимуюча функція, залежить точність моделювання. Наприклад, розв'язок рівняння (1) можна подати у вигляді степеневого багаточлена

$$y(s) = \sum_{m=0}^{m=n} c_m s^m, \quad (2)$$

де степінь багаточлена n вибирають відповідно до особливості конкретної задачі, c_i – невідомі коефіцієнти.

Розв'язання рівняння (1) у такій постановці зводиться до знаходження коефіцієнтів c_i .

Диференціальними тейлорівськими перетвореннями називаються функціональні перетворення вигляду [1; 2]

$$X(k) = \frac{H^k}{k!} \left[\frac{d^k x(t)}{dt^k} \right]_{t=0} \Xi$$

$$\Xi x(t) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \left(\frac{t}{H} \right)^k X(k), \quad (3)$$

де $X(k)$ – диференціальне зображення оригіналу, що являє собою дискретну (гратчасту) функцію цілочислового аргументу $k = 0, 1, 2, \dots$; H – масштабна стала, що має розмірність аргументу t і часто дорівнює відріzkу $0 \leq t \leq H$, де збігається ряд Тейлора; $x(t)$ – оригінал, що являє собою безупинну й обмежену разом з усіма своїми похідними функцію дійсного аргументу t , який нескінченне число разів диференціюється; Ξ – символ відповідності оригіналу $x(t)$ і його диференціального зображення $X(k) = \bar{X}(k)$.

Переведемо вираз (2) в область ДТ-зображень, тоді шуканий розв'язок має вигляд [1; 2]:

$$Y(k) = \sum_{i=0}^{i=n} C_i H^i v(k-i); \quad (4)$$

$$v(k-i) = \begin{cases} 1, & k = i, \\ 0, & k \neq i. \end{cases}$$

Позначимо підінтегральну функцію в рівнянні (1)

$$z(x, s) = Q(x, s)y(s), \quad (5)$$

розв'язок $y(s)$ – у вигляді аналітичної функції $y(s, c)$, де $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ – вектор вільних коефіцієнтів, наприклад, у вигляді степенного полінома (2).

Для одержання системи рівнянь, що визначають невідомі коефіцієнти $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, застосуємо диференціальні перетворення (3).

Зображення підінтегральної функції (5) визначимо як

$$Z(k, c) = Q(k)Y(k, c)$$

або

$$Z(k, c) = \sum_{l=0}^{l=k} Q(k-l)Y(l, c). \quad (6)$$

Визначений інтеграл у межах від α до β від функції $z(s)$ за її дискретами в області зображень $Z(0), Z(1), Z(2), \dots, Z(\infty)$ знаходимо за формулою [1; 2]:

$$\int_{\alpha_c}^{\beta_c} z(s) ds = \sum_{k=0}^{k=\infty} \left(\frac{\beta_c^{k+1} - \alpha_c^{k+1}}{k+1} \right) \frac{Z(k)}{H^k} = \frac{\beta - \alpha}{1} Z(0) + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2H} Z(1) + \dots, \quad (7)$$

де $\alpha_c = \alpha - s_0$, $\beta_c = \beta - s_0$, s_0 – центр розкладання в ряд Тейлора.

В окремому випадку $s_0 = 0$.

Розглянемо випадок, коли $s_0 \neq 0$. Нехай за рівнянням (2)

$$y(s) = C_0 + C_1 s + C_2 s^2 + C_3 s^3 + C_4 s^4.$$

Позначимо $s = s_0 + \tau$, тоді [4]

$$\bar{C}_0 = C_0 + C_1 s_0 + C_2 s_0^2 + C_3 s_0^3 + C_4 s_0^4;$$

$$\bar{C}_1 = C_1 + 2C_2 s_0 + 3C_3 s_0^2 + 4C_4 s_0^3;$$

$$\bar{C}_2 = C_2 + 3C_3 s_0 + 6C_4 s_0^2; \quad (8)$$

$$\bar{C}_3 = C_3 + 4C_4 s_0;$$

$$\bar{C}_4 = C_4.$$

Аналогічно можна одержати коефіцієнти (8) для будь-якого порядку багаточлена (2). При $s_0 = 0$ у виразах (8) $\bar{C}_i = C_i$.

Послідовно привласнюючи цілочислові значення аргументу $k=1, 2, 3, \dots$ з формули (6), складемо систему рівнянь, кількість яких дорівнює кількості невідомих коефіцієнтів $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$:

$$\int_{\alpha_c}^{\beta_c} Z(k, c_i, x_1) ds = f(x_1);$$

.... (9)

$$\int_{\alpha_c}^{\beta_c} Z(k, c_i, x_k) ds = f(x_k),$$

де x_i – фіксовані значення, що вибираються з діапазону меж вимірювання сигналів.

Розв'язуючи систему скінченних рівнянь (9), знаходимо вектор вільних коефіцієнтів, компоненти якого визначають шуканий розв'язок (6) рівняння Фредгольма першого роду (1).

Розглянемо переваги моделювання процесу відновлення сигналу на основі ДТ-перетворень.

1. Інтеграл визначається грубо, тому що їх розкладання в ряди погано збігаються, а розкладання за власними функціями складне з обчислювального погляду. Використовуючи точний табличний інтеграл, усувають цей недолік, пов'язаний з похибками наближеного інтегрування.

2. Похибка підінтегральної функції слабо позначається на похибку обчислення інтегралів. Тому апроксимація підінтегральної функції може бути грубою, оскільки розв'язок буде стійким через фільтр нульового порядку, яким є інтеграл.

3. Система рівнянь (як правило, з погано обумовленою матрицею) розпадається на систему скінченних рівнянь низької розмірності. Це також підвищує обчислювальну стійкість у порівнянні з розв'язанням систем рівнянь високої розмірності з погано обумовленою матрицею.

Отже, необхідно вирішити СЛАР (9) з невідомими c_i , кількість яких залежить від степеня апроксимуючого полінома і від кількості точок розкладання.

Розглянемо особливості вибору інтервалів розбиття змінної s для найкращої апроксимації підінтегральної функції $F(x, s)$ локальними рядами Тейлора.

На рис. 1 показано апроксимації у точці розкладання $s=0$ чотирма членами ряду Тейлора (видні заходи в негативну область) і шістьма членами.

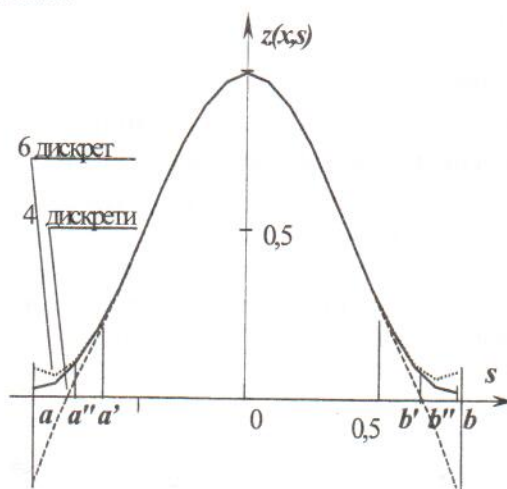


Рис. 1. Вибір інтервалів інтегрування для найкращої апроксимації локальними рядами Тейлора при $x=0$ підінтегральної функції $z(x, s)$ для модельного прикладу

Для найкращої апроксимації має значення правильний вибір інтервалів розбивки підінтегральної функції, тому що, наприклад, інтервал $[a'', b'']$ на відміну від інтервалу $[a', b']$ буде давати значні похибки апроксимації для даного ступеня ряду Тейлора через великі заходи у від'ємну область. При збільшенні ступеня ряду Тейлора можливе ускладнення ДТ-моделі рівняння (1). З рис. 1 видно, що для шостого ступеня ряду Тейлора можна використовувати весь інтервал $[a, b]$.

Хоча СЛАР (9) низької розмірності, на практиці вона задається неточно, тому що права частина задається як $f_i(x) + \delta_i$, де δ_i – похибка зображення ДТ-моделлю інтегрального рівняння (1). Тому для неточно заданих СЛАР необхідно застосовувати спеціальні методи розв'язку [6]. У працях [7–9] запропоновані оптимізаційні методи, що застосовують у даному випадку для розв'язання неточно заданої СЛАР (9).

Застосування багатокритеріальної оптимізації

Перша модель багатокритеріальної цільової функції реалізує модель інтегральної оптимальності, що для частинних критеріїв I_i буде мати вигляд [4]:

$$\min_y I^1(y) = \sum_{i=1}^k \alpha_i I_i \quad (10)$$

за умови

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1.$$

Загальним недоліком цієї схеми є можливість різкої диференціації рівня окремих критеріальних функцій.

У найпростішій постановці багатокритеріальної задачі відновлення сигналів використовують два частинних критерії [8; 9]:

– критерій за точністю

$$I_1 = (Ay - f)^2;$$

– критерій за стійкістю

$$I_2 = \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

Завдяки тому, що ці критерії для некоректних задач конфлікують між собою, для утворення багатокритеріальної цільової функції вибрана нелінійна схема компромісів, яка автоматично знаходить оптимальний компроміс між критеріями, що належать до її складу. Нелінійна схема компромісів, чи згортка за Вороніним відповідає до моделі векторної оптимізації і залежить від характеристик напруженості ситуації [4]:

$$\min_y I^2(y) = \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{1 - \frac{I_i}{I_{im}}} \quad (11)$$

за умови

$$0 < I_i < I_{im}, \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1.$$

Необхідні умови мінімуму функцій I^1 (10), (11) дають систему скінченних рівнянь:

$$\frac{\partial I}{\partial y_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (12)$$

У результаті диференціювання рівняння (12) отримується система нелінійних рівнянь низької розмірності, що зводиться, наприклад, з використанням методу Ньютона до СЛАР.

Числовий експеримент

Модельний приклад вибрано на основі (1), де

$$K(x, s) = 0,12(x-s)^4 - 0,8(x-s)^2 + 1,4;$$

$$y(s) = \begin{cases} (1-s^2)^2, & |s| \leq 1, \\ 0, & |s| > 1; \end{cases} \quad s \in [-1; 1], \quad (13)$$

$$f(x) = 1,378 - 0,744x^2 + 1,128x^4.$$

Зобразимо алгоритм обчислень для прикладу (13) з використанням ДТ-перетворень.

За формулою (4) дискрети шуканого розв'язку будуть визначатися як

$$Y(0) = C_0;$$

$$Y(1) = C_1 H;$$

$$Y(2) = C_2 H^2;$$

$$Y(3) = C_3 H^3, \dots$$

Для зображення точного розв'язку

$$y(s) = (1-s^2)^2$$

знайдемо дискрети для модельного прикладу (13) за формулою (4) для $s_0 = 0$:

$$Y(0) = 1;$$

$$Y(1) = 0;$$

$$Y(2) = -2H^2;$$

$$Y(3) = 0;$$

$$Y(4) = 1H^4,$$

коефіцієнти C_i степеневого багаточлена (2) для $s_0 = 0, H = 1$:

$$C_0 = C_4 = 1;$$

$$C_2 = C_3 = 0;$$

$$C_1 = -2.$$

Інтегральне рівняння (1) будемо розв'язувати при фіксованих значеннях x . Тоді ядро $K(x, s)$ можна зобразити як функцію однієї змінної s . Позначимо $K(x, s)$ як $k(s)$:

$$K(x,s)=0,12s^4-0,48xs^3-0,48x^3s+0,72x^2s^2+0,12x^4-0,8x^2+1,6xs-0,8s^2+1,4;$$

$$K(x,s) \Xi K(k) = 0,12H^4 \mathcal{L}(k-4) - 0,48xH^3 \mathcal{L}(k-3) + H^2(0,72x^2-0,8) \mathcal{L}(k-2) + H(1,6-0,48x^2) \mathcal{L}(k-1) + (0,12x^4-0,8x^2+1,4) \mathcal{L}(k).$$

Тоді дискрети визначаються як

$$K(0)=0,12s^4-0,8x^2+1,4;$$

$$K(1)=Hx(1,6-0,48x^2);$$

$$K(2)=H^2(0,72x^2-0,8);$$

$$K(3)=0,48xH^3;$$

$$K(4)=0,12H^4;$$

$$K(k \geq 5)=0.$$

Окремі дискрети підінтегральної функції (5) обчислюють за формулою (6):

$$Z(0)=K(0)Y(0);$$

$$Z(1)=K(1)Y(0)+K(0)Y(1);$$

$$Z(2)=K(2)Y(0)+K(1)Y(1)+K(0)Y(2), \dots$$

Тепер неважко отримати базову формулу на основі рівняння (7). Коефіцієнти C_i степеневого багаточлена (2) при $s_0 \neq 0$ перераховують за формулою (8).

Оскільки у математичному описі вихідного сигналу $f(x)$ у вигляді (13) $C_1=C_3=0$, то будемо припускати, що в шуканому сигналі $y(s)$ ці коефіцієнти при непарних ступенях полінома (2) також дорівнюють нулю. Тому в критеріях, що відповідають за значення відхилення при різних перетинах x , залишимо тільки ненульові коефіцієнти. Тоді СЛАР буде мати розмірність, що дорівнює трьом:

$$0,735C_0+0,585C_2+1,124C_4=0,689+\delta_1;$$

$$1,529C_0+0,215C_2+0,278C_4=1,370+\delta_2; \quad (14)$$

$$1,467C_0+0,285C_2+0,147C_4=1,004+\delta_3.$$

Оскільки СЛАР (14) має неточно задану праву частину, традиційні методи її розв'язку можуть не забезпечувати прийнятний розв'язок (рис. 2). Тим більше це стосується загального випадку з довільною кількістю точок розкладання і ступенів апроксимуючого полінома.

Наприклад, отримаємо розв'язок СЛАР за допомогою перебування оберненої матриці, розв'язок якого буде істотно відрізнитися від точних значень:

$$C_0=1,007;$$

$$C_2=-2,24;$$

$$C_4=1,12.$$

Застосуємо оптимізаційні методи для розв'язку СЛАР (14) і з кожного рівняння цієї СЛАР складемо частинні критерії:

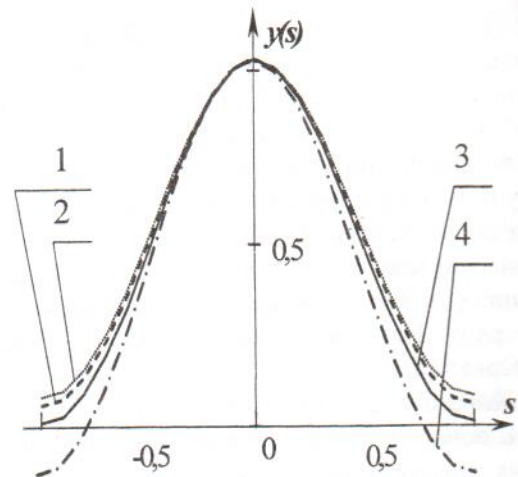


Рис. 2. Розв'язок СЛАР (14):

1 – метод багатокритеріальної оптимізації; 2 – метод однокритеріальної оптимізації; 3 – точне значення $y(s)$; 4 – метод оберненої матриці

$$I_1=(0,735C_0+0,585C_2+1,124C_4-0,689)^2;$$

$$I_{1m}=\delta_1^2;$$

$$I_2=(1,529C_0+0,215C_2+0,278C_4-1,370)^2;$$

$$I_{2m}=\delta_2^2;$$

$$I_3=(1,467C_0+0,285C_2+0,147C_4-1,004)^2;$$

$$I_{3m}=\delta_3^2.$$

В окремому випадку $\delta_1=\delta_2=\delta_3=\delta$. Частинні критерії I_k утворять багатокритеріальну цільову функцію, наприклад, за формулою моделі інтегральної оптимальності (10). Однак у загальному випадку I_k можуть конфліктувати між собою, тому при розв'язанні неточно заданої СЛАР (14) потрібно рекомендувати нелінійну схему компромісів (11).

Тестовий приклад знаходження розв'язку СЛАР (14)

При точних $C_0=1, C_2=-2, C_4=1$

можна знайти точні значення граничних умов на критерії:

$$I_{1m}=5 \cdot 10^{-8}; I_{2m}=7,2 \cdot 10^{-5}; I_{3m}=0,001.$$

Якщо початкове наближення

$$C_0=0, C_2=0, C_4=0,$$

то після оптимізації за формулою (10)

$$C_0=0,989; C_2=-1,925; C_4=0,968,$$

за формулою (11):

$$C_0=1; C_2=-1,993; C_4=0,997.$$

Якщо початкове наближення дорівнює коефіцієнтам поліному для $f(x)$:

$$C_0=1,378; C_2=-0,744; C_4=1,128.$$

Після оптимізації за формулою (10) коефіцієнти мають такі значення:

$$C_0=0,982; C_2=-1,875; C_4=0,947,$$

за формулою (11):

$$C_0=0,992; C_2=-1,944; C_4=0,976.$$

При $I_m=10^{-3}$, якщо початкове наближення
 $C_0=0; C_2=0; C_4=0$,

після оптимізації за формулою (10)

$C_0=0,983; C_2=-1,903; C_4=0,989$,

за формулою (11):

$C_0=0,987; C_2=-1,943; C_4=0,990$.

Для підвищення точності розв'язку СЛАР, в якій неточно задана права частина, необхідно збільшити кількість точок розкладання, що призведе до незначного збільшення розмірності СЛАР. У розглянутому прикладі розмірність СЛАР дорівнює трьом, використана одна точка розкладання. Якщо розглянути двох точок розкладання, то розмірність даної СЛАР зросте до шести.

Висновки

Отримана ДТ-модель інтегрального рівняння Фредгольма першого роду, дозволяє знайти його розв'язок, зображений степеневим багаточленом. Ця модель відрізняється простотою в описі й містить декілька дискрет диференціального спектра. Показано, що використання багаточлених ДТ-перетворень при розглянутій постановці можливо навіть на одній точці розкладання на всьому проміжку існування розв'язку, без його розбивки на кілька точок розкладання, як це показано в праці [3]. Це істотно скорочує розмірність СЛАР, до якої зводиться ДТ-модель. Оскільки отримана СЛАР має неточно задану праву частину, то для знаходження стійких розв'язків використовують оптимізаційні методи, адаптовані до розв'язання таких СЛАР. Як багатокритеріальна цільова функція для багатокритеріальної оптимізації використана нелінійна схема компромісів, що дозволяє одержати розв'язки,

оптимальні за Парето. У цій статті не розглядається випадок, коли початкова постановка задачі відновлення сигналів має похибки. Ці дослідження заслуговують окремого розгляду.

Список літератури

1. Пухов Г.Е. Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – К.: Наук. думка, 1980. – 419 с.
2. Пухов Г.Е. Дифференциальные спектры и модели. – К.: Наук. думка, 1990. – 184 с.
3. Засядько А.А. Метод смещенных дробно-рациональных дифференциальных преобразований для моделирования процесса восстановления сигналов // Вісн. ЧДТУ. – 2002. – № 3 – С.61–65.
4. Воронин А.Н. Многокритериальный синтез динамических систем. – К.: Наук. думка, 1992. – 160 с.
5. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: Справ. пособие. – К.: Наук. думка, 1986. – 544 с.
6. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
7. Засядько А.А. Розв'язання задачі відновлення сигналів за допомогою однокритеріальної оптимізації // Вісн. ЖІТІ. Технічні науки. – 2002. – № 4 (23). – С. 133–136.
8. Жуков І.А., Засядько А.А. Багатокритеріальний метод розв'язання вироджених СЛАР // Вісн. НАУ. – 2002. – № 3. – С. 178–182.
9. Засядько А.А. Сравнение методов Тихонова и многокритериальной оптимизации при решении задачи восстановления сигналов // Проблемы управления и информатики. – 2003. – № 5. – С. 60–67.

Стаття надійшла до редакції 19.01.04.

И.А. Жуков, А.А. Засядько

Использование многокритериальной оптимизации при моделировании процесса восстановления сигналов дифференциальными преобразованиями

Предложено неточно заданные системы линейных алгебраических уравнений, к которым сводится дифференциальная модель задачи восстановления сигналов, решать с помощью многокритериальной оптимизации. Частные критерии устойчивости и точности образуют многокритериальную целевую функцию, которая является нелинейной схемой компромиссов. Полученное решение является оптимальным.

I.A. Zhukov, A.A. Zasyad'ko

Utilization of the multi-criteria optimization for modeling the signal restoring process of differential transforms

The use of differential Taylorian transforms for modeling the signal restoring process of differential transforms is regarded. The differential Taylorian model for the restoring problem is constructed. The numerical algorithm for solving the equations is given and its advantages are described. The system of bad-conditions linear algebraic equations described, is solved by means of multi-criteria optimization. The partial criteria are proposed; on the base of these criteria the vector of effectiveness that is a non-linear compromise schema is constructed. The obtained solution is optimal.