052-047-023

УДК 629.7.072.8:681.3

полет ЛА, система управления полетом, система неоптимальная, система стабилизации, параметр системы, проектирование системы, параметрі регулятора

Л.М. Блохін, д-р. техн. наук, проф.
(Національний авіаційний університет)
С.В. Держак, канд. техн. наук, доц.
(Національний авіаційний університет)
Н.В. Білак, асп.
(Національний авіаційний університет)

ПОРІВНЯННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ НЕОПТИМАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ТА СИСТЕМИ СТАБІЛІЗАЦІЇ З ОПТИМІЗОВАНИМИ ПАРАМЕТРАМИ РЕГУЛЯТОРА

Розглянуто порівняння ефективності неоптимальної системи та системи стабілізації з оптимізованими параметрами регулятора при випадкових впливах на об'єкт управління. Побудовано графічні залежності оцінок ефективності систем від параметрів, суттєвих для вирішення задач синтезу.

У сучасний період під час проектування систем управління польотом літальних апаратів і систем стабілізації бортових вимірювальних комплексів та комплексів, які управляють, параметри систем оптимальним способом не вибираються, а тим більше, не синтезуються оптимальні структури регулятора. Значною мірою це залежить від недостатнього знання можливостей оптимальних систем, відсутності потрібних моделей заданих частин систем та зручних при практичному використанні алгоритмів синтезу оптимальних структур систем стабілізації. Необхідно на простих прикладах наглядно пояснювати порівняльну ефективність оптимальних та неоптимальних систем стабілізації динамічних об'єктів при випадкових впливах.

Порівняльну ефективність використання оптимізації параметрів регулятора замкненої системи стабілізації при вимірах її вихідних координат із завадами і неоптимальної процедури стабілізації системи оцінимо на наочному прикладі. Для визначення оптимальних структур чи параметрів систем стабілізації необхідні моделі динаміки об'єкта, збурень, діючих на нього, вимірювачів та завад виміру. Розглянемо задачу оптимізації параметрів регулятора, в якій структура регулятора вважається заданою, а його параметри можуть бути вибрані оптимальним чи неоптимальним способами. Задача оптимізації параметрів регулятора [1] є природним розвитком задачі аналізу. Нехай рух стійкого об'єкта стабілізації описується системою звичайних диференціальних рівнянь, перетворених за Фур'є, виду (рис. 1):

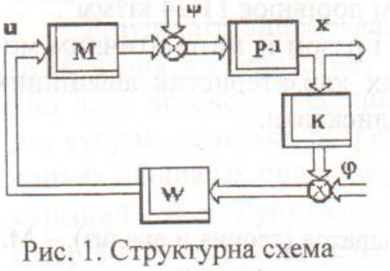


Рис. 1. Структурна схема системи стабілізації

$$\mathrm{P}(\mathbf{x}) \times (s) = \mathrm{M}(s)\mathbf{u}(s) + \psi(s), \tag{1}$$

де P і M – відомі поліноміальні матриці розмірністю $n \times n$ та $n \times m$ відповідно ($s = j\omega$); **x** – *n*-вимірний вектор вихідних координат; **u** – *m*-вимірний вектор координат управління; ψ – *n*-вимірний вектор збурення, що є багатовимірним центрованим стаціонарним випадковим процесом із відомими матрицями спектральних щільностей $\mathrm{S}_{\psi\psi}$.

Задані структура та вихідний сигнал регулятора, в якому існує ν настроювальних параметрів $(i = \overline{1,\nu})$, має вигляд:

$$\mathbf{u} = \mathrm{W}(s, a_1, a_2, \ldots, a_\nu)(x + \varphi), \tag{2}$$

де W – матриця передавальних функцій регулятора, яка залежить від настроювальних параметрів a_i; φ – вектор завад вимірів виходу системи x, який є багатовимірним центрованим стаціонарним випадковим процесом із відомими матрицями спектральних $\mathrm{S}_{\varphi\varphi}$ та взаємно-спектральних щільностей $S_{\psi\varphi}$, $S_{\varphi\psi}$.

Вибором значень цих параметрів необхідно доставити екстремум заданому показнику якості системи виду

$$e = \frac{1}{j} \int_{-j\omega}^{+j\omega} tr\left[RS'_{xx} + CS'_{uu}\right] ds, \tag{3}$$

де tr – слід матриці; R і C – поліноміальні вагові позитивно визначені симетричні матриці для врахування реальних обмежень у задачі синтезу; S_{xx} – матриця спектральних щільностей помилки стабілізації; S_{uu} – матриця спектральних щільностей сигналу управління; $'$ – знак транспонування матриці.

Показник якості також виявляється функцією настроювальних параметрів a_i регулятора. Екстремум показника якості знаходять, як екстремум функції ν змінних регулятора a_i. Для цього спочатку складемо систему в загальному випадку нелінійних алгебричних рівнянь виду

$$\frac{\partial}{\partial a_i} e(a_1, a_2, .., a_\nu) = 0, \quad i = \overline{1, \nu}. \tag{4}$$

Система (4) отримана у разі використання необхідних даних із виразів (1), (2) і показника (3). Розв'язання системи рівнянь (4) щодо ν параметрів a_i дадуть потрібні набори з ν настроювальних оптимальних параметрів. У загальному випадку ця система рівнянь може мати кілька локальних екстремумів та один глобальний. Вибір глобального варіанта розв'язку має бути ясним з умов конкретної задачі. У цьому випадку система досягне максимальної якості, не досяжної при довільному виборі параметрів регулятора.

Як приклад розглянемо задачу аналізу якості й оптимізацію параметрів регулятора скалярної системи стабілізації (рис. 1).

Вимір вектора вихідних реакцій об'єкта x здійснюється системою вимірників із матрицею передавальних функцій K, яка в скалярній системі перетворюється на коефіцієнт k $(k = 1)$. Нехай рух об'єкта стабілізації описується рівнянням виду (1)

$$(Ts + 1)x = mu + \psi, \tag{5}$$

де T – стала часу ланки; x, u – відповідно вихідна координата та координата, яка управляє; $m = 1$ – коефіцієнт передачі регулятора; ψ – збурення зі спектральною щільністю, яка дорівнює

$$S_{\psi\psi} = \frac{\sigma_\psi^{\ 2}}{\pi\left|\mu s + 1\right|^2};$$

σ_ψ – середньоквадратичне значення сигналу ψ; μ – параметр, який характеризує частотну смугу сигналу збурення ψ, при розрахунках варійовний у діапазоні $10^{-1} \div 10^{-9}$.

Рівняння регулятора перепишемо [2]

$$u = -w(x + \varphi), \tag{6}$$

де регулятор W визначений як деякий коефіцієнт передачі w; φ – завада виміру, зі спектральною щільністю, яка дорівнює

$$S_{\varphi\varphi} = \frac{\sigma_\varphi^{\ 2}}{\pi} \frac{1}{\left|(\tau s + 1)(\xi s + 1)\right|^2},$$

де τ і ξ – сталі часу завади, а сигнали збурення ψ і шуму φ – некорельовані ($S_{\psi\varphi} = S_{\varphi\psi} = 0$).

Визначимо передавальні функції замкненої системи та її реакції на вхідні впливи. Для цього підставимо вираз (6) у рівняння (5) і отримаємо

$$(Ts + 1 + w)\mathbf{x} = -w\varphi + \psi. \tag{7}$$

Розв'язавши рівняння (7) відносно вектора $\mathbf{x}$ при заданих вхідних даних, отримаємо

$$x = F_x^{\ \psi}\psi + F_x^{\ \varphi}\varphi = \frac{1}{(Ts + 1 + w)}\psi - \frac{w}{(Ts + 1 + w)}\varphi = F_1\psi_0, \tag{8}$$

де $F_x^{\ \psi}$, $F_x^{\ \varphi}$ – передавальні функції замкненої системи стабілізації до вектора вихідних координат від збурення та завади відповідно; F_1 – узагальнена передавальна функція замкненої системи:

$F_1 = (F_x^{\ \psi}, F_x^{\ \varphi})$; ψ_0 – узагальнений вектор:

$\psi_0 = (\psi', \varphi')'$.

Підставивши рішення (8) у рівняння (6), отримаємо узагальнену передатну функцію системи стабілізації до сигналу управління від сигналів збурення та завади:

$F_2 = (F_u^{\ \psi}, F_u^{\ \varphi})$;

$$u = F_u^{\ \psi}\psi + F_u^{\ \varphi}\varphi = \frac{-w}{(Ts+1+w)}\psi - \frac{w[1+(Ts+1+w)]}{(Ts+1+w)}\varphi = F_2\psi_0 . \qquad (9)$$

Отже, функції F_1, F_2 дорівнюють [1]:

$$F_1 = F_x^{\ \psi}(1,P) - (0,1) = \left(\frac{1}{(Ts+1+w)}, \frac{-w}{(Ts+1+w)}\right);$$

$$F_2 = F_u^{\ \psi}(1,P) = \left(\frac{-w}{(Ts+1+w)}, \frac{-w(Ts+1)}{(Ts+1+w)}\right).$$

Комплексно спряжені значення узагальнених передавальних функцій F_1, F_2 мають вигляд

$$F_{1*} = \left(\frac{1}{(-Ts+1+w)} \frac{-w}{(-Ts+1+w)}\right);$$

$$F_{2*} = \left(\frac{-w}{(-Ts+1+w)} \frac{-w(-Ts+1)}{(-Ts+1+w)}\right),$$

де "$*$" – символ ермітова спряження.

Оскільки на задану систему стабілізації впливають випадкові стаціонарні центровані процеси ψ та φ, то можна скористатися реакціями (8) і (9), щоб на основі теореми Вінера-Хінчена визначити потрібні спектральні щільності системи: помилки стабілізації S_{xx} та сигналу управління S_{uu} для підстановки в показник якості (1), який для наведеного скалярного прикладу має зміст суми визначеним засобом зважених дисперсій помилки стабілізації та сигналу управління:

$$e = \frac{1}{j}\int_{-j\omega}^{+j\omega}[RS_{xx} + CS_{uu}]ds, \qquad (10)$$

де $R = 1$; $C = \lambda$; $\lambda = 10^{-4} \div 10^{0}$.

У цьому прикладі матриця спектральних щільностей узагальненого сигналу ψ_0 дорівнює

$$S_{\psi_0\psi_0} = \begin{bmatrix} S_{\psi\psi} & 0 \\ 0 & S_{\varphi\varphi} \end{bmatrix},$$

а потрібні для підстановки в показник якості (10) матриці спектральних щільностей S_{xx} та S_{uu}, набувають вигляду:

$$S_{xx} = F_1 S_{\psi_0\psi_0} F_{1*} = \left(\frac{1}{(Ts+1+w)}, \frac{-w}{(Ts+1+w)}\right)\begin{bmatrix} \frac{\sigma_\psi^{\ 2}}{\pi|\mu s+1|^2} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_\varphi^{\ 2}}{\pi|(\tau s+1)(\xi s+1)|^2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{(-Ts+1+w)} \\ \frac{-w}{(-Ts+1+w)} \end{pmatrix};$$

$$S_{uu} = F_2 S_{\psi_0\psi_0} F_{2*} = \left(\frac{-w}{(Ts+1+w)}, \frac{-w(Ts+1)}{(Ts+1+w)}\right)\begin{bmatrix} \frac{\sigma_\psi^{\ 2}}{\pi|\mu s+1|^2} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_\varphi^{\ 2}}{\pi|(\tau s+1)(\xi s+1)|^2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \frac{-w}{(-Ts+1+w)} \\ \frac{-w(-Ts+1)}{(-Ts+1+w)} \end{pmatrix}.$$

Після нескладних перетворень запишемо

$$S_{xx}=\frac{\sigma_\psi{}^2}{\pi}\frac{\tau^2\xi^2s^4-(\tau^2+\xi^2+\gamma^2w^2\mu^2)s^2+\gamma^2w^2+1}{\left|(\mu s+1)(\tau s+1)(\xi s+1)(Ts+1+w)\right|^2};\qquad(11)$$

$$S_{шш}=\frac{\sigma_\psi{}^2}{\pi}w^2\frac{(\tau^2\xi^2+\gamma^2T^2\mu^2)s^4-(\tau^2+\xi^2+\gamma^2T^2+\gamma^2\mu^2)s^2+\gamma^2+1}{\left|(\mu s+1)(\tau s+1)(\xi s+1)(Ts+1+w)\right|^2},\qquad(12)$$

де $\gamma=\dfrac{\sigma_\varphi}{\sigma_\psi}$ – співвідношення "шум–сигнал".

Для підстановки виразів S_{xx} та $S_{шш}$ в інтеграл (10) і знаходження значення відносного показника якості за допомогою таблиці інтегралів [2] вирази (11), (12) можливо зобразити у вигляді квадратів модулів

$$S_{xx}=\frac{\sigma_\psi{}^2}{\pi}\left|\frac{a_2s^2+a_1s+a_0}{(\mu s+1)(\tau s+1)(\xi s+1)(Ts+1+w)}\right|^2;$$

$$S_{шш}=\frac{\sigma_\psi{}^2}{\pi}w^2\left|\frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{(\mu s+1)(\tau s+1)(\xi s+1)(Ts+1+w)}\right|^2,$$

причому

$$(a_2s^2+a_1s+a_0)(a_2s^2-a_1s+a_0)=a_2{}^2s^4-(a_1{}^2-2a_2a_0)s^2+a_0{}^2,\qquad(13)$$

$$(b_2s^2+b_1s+b_0)(b_2s^2-b_1s+b_0)=b_2{}^2s^4-(b_1{}^2-2b_2b_0)s^2+b_0{}^2.\qquad(14)$$

Прирівнявши вирази (13), (14) для чисельників виразів (11), (12), одержимо значення коефіцієнтів a_2,a_1,a_0,b_2,b_1,b_0:

$$a_2=\tau\xi;\qquad b_2=\sqrt{\tau^2\xi^2+\mu^2T^2\gamma^2};$$

$$a_0=\sqrt{w^2\gamma^2+1};\qquad b_0=\sqrt{\gamma^2+1};$$

$$a_1=\sqrt{\tau^2+\xi^2+\mu^2w^2\gamma^2+2a_2a_0};\qquad b_1=\sqrt{\tau^2+\xi^2+T^2\gamma^2+\mu^2\gamma^2+2b_2b_0}.$$

Запис виразу для визначення відносного показника якості замкненої системи, враховуючи інтеграл (10), буде виглядати так:

$$\frac{e}{\sigma_\psi{}^2}=\frac{1}{\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty}\left|\frac{(a_2s^2+a_1s+a_0)+\lambda w^2(b_2s^2+b_1s+b_0)}{d_4s^4+d_3s^3+d_2s^2+d_1s+d_0}\right|^2ds=\frac{[a_2{}^2d_0d_1d_4+(a_1{}^2-2a_0a_2)d_0d_3d_4}{d_0d_4(-d_0d_3{}^2-d_1d_4{}^2+d_1d_2d_3)}+$$

$$+\frac{a_0{}^2(-d_1d_4{}^2+d_2d_3d_4)]+\lambda w^2[b_2{}^2d_0d_1d_4+(b_1{}^2-2b_0b_2)d_0d_3d_4+b_0{}^2(-d_1d_4{}^2+d_2d_3d_4)]}{d_0d_4(-d_0d_3{}^2-d_1d_4{}^2+d_1d_2d_3)},\qquad(15)$$

де d_0,d_1,d_2,d_3,d_4 – коефіцієнти:

$$d_0=1+w;$$

$$d_1=T+(\xi+\tau+\mu)(1+w);$$

$$d_2=T\xi+T\tau+T\mu+(\tau\xi+\mu\xi+\tau\mu)(1+w);$$

$$d_3=T(\tau\xi+\mu\xi+\mu\tau)+\xi\tau w(1+w);$$

$$d_4=T\tau\xi\mu.$$

Використовуючи можливості програми MatLab 5.3, знайдемо екстремум відносного показника якості (15). Для цього, по-перше, визначимо часткову похідну від $e/\sigma_\psi{}^2$ за w. По-друге, порівняємо поліном її чисельника до нуля та обчислимо корені, тобто оптимальне значення коефіцієнта передачі регулятора. З кількох отриманих коренів вибираємо тільки ті, які є фізично реалізованими [1; 2]. Для аналізу отриманих результатів побудуємо поверхні залежності оптимізованого відносного показника якості від вагового множника λ і співвідношення "шум–сигнал" γ при $\mu = 10^{-1}$, $\mu = 10^{-9}$, $W = w_{opt}$ (рис. 2).

Аналізуючи характер наведених поверхонь, можна зробити висновок, що відносний оптимізований показник якості при $\mu = 10^{-1}$, $\mu = 10^{-9}$ відрізняється в середньому в два порядки.

Наочно порівняльну ефективність оптимізованої системи стабілізації з неоптимальною при значенні коефіцієнта передачі регулятора $w = 1$ неважко визначити з рис. 3 при різних значеннях параметра μ (частотної смуги збурень $\mu = 10^{-1}$ і $\mu = 10^{-9}$).

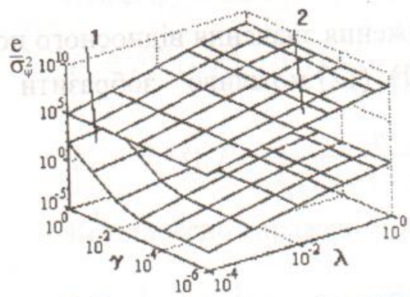
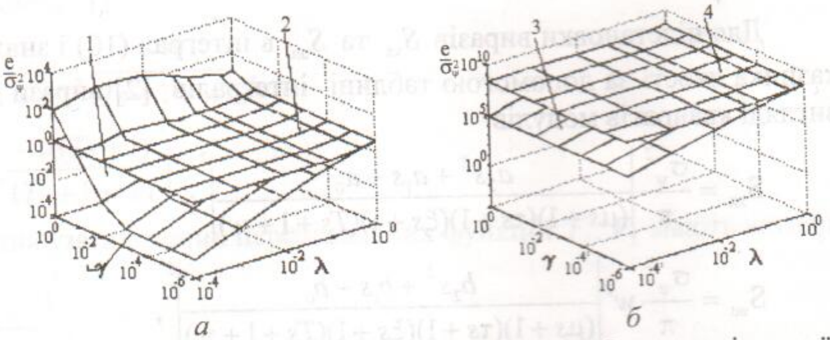


Рис. 2. Залежність оптимізованого відносного показника якості e/σ_ψ^2 від вагового множника λ і співвідношення «шум–сигнал» γ при різних коефіцієнтах:
1 – μ = 10^{-1}; *2* – μ = 10^{-9}



а *б*

Рис. 3. Порівняльна ефективність неоптимальної та оптимізованої систем:
а – μ = 10^{-1}; *б* – μ = 10^{-9};
1, *2* – поверхні якості оптимізованої замкненої системи при μ = 10^{-1}, μ = 10^{-9} відповідно; *3*, *4* – поверхні якості неоптимальної системи стабілізації з жорстким зворотним зв'язком (w = 1)

Ефективність оптимізованої системи стабілізації порівняно з неоптимальною замкненою системою становить не менш за двох порядків.

Висновок. Оптимізація параметрів регулятора замкненої системи стабілізації, як показує розглянутий приклад, може в кращих випадках, наприклад, при низьких співвідношеннях "шум–сигнал" γ підвищувати якість (точність) стабілізації на один – два порядки в порівнянні з неоптимальним регулятором. Конкретні величини окремих визначальних параметрів моделей динаміки заданої частини системи (об'єкта, впливів) можуть також суттєво впливати на якість стабілізації.

Список літератури

1. *Блохин Л.Н.* Оптимальные системы стабилизации. – К.: Техніка, 1982. – 144 с.
2. *Ньютон Дж.К., Гулд Л.А., Кайзер Дж.Ф.* Теория линейных следящих систем. – М.: Физматгиз, 1961. – 407 с.

Стаття надійшла до редакції 09.09.02.