3 965.6-021

УДК 62-504.462

система управления автоматич
процесс переходной
система стабилизации дискрет
качество система управл.

С.Л. Мовчан, асп.
(Тернопільський державний технічний університет ім. І. Пулюя)

ВПЛИВ КОРЕНІВ ЧИСЕЛЬНИКА ПЕРЕДАВАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ НА ПОКАЗНИКИ ЯКОСТІ ПЕРЕХІДНОГО ПРОЦЕСУ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ СТАБІЛІЗАЦІЇ

Розглянуто вплив коренів чисельника передавальної функції дискретної системи стабілізації на тривалість і коливальність перехідного процесу. На основі отриманих виразів показано, що коливальність і тривалість відповідних складових перехідного процесу однакові як при наявності, так і при відсутності коренів чисельника передавальної функції дискретної системи стабілізації і залежать від коренів характеристичного рівняння, що дозволяє при дослідженні тривалості і коливальності перехідного процесу системи стабілізації використовувати відомі непрямі кореневі методи оцінки показників якості.

Вигляд перехідного процесу в лінійних дискретних системах автоматичного керування (САК) визначається не тільки лівою, але і правою частиною різницевих рівнянь, що описують досліджувані САК [1; 2]. Іншими словами, якість перехідного процесу необхідно оцінювати коренями не тільки характеристичного рівняння системи, але й чисельника передавальної функції.

Розглянемо вплив коренів чисельника передавальної функції дискретної системи стабілізації на тривалість і коливальність перехідного процесу.

У загальному випадку система стабілізації може бути описана різницевим рівнянням

$$a_0 y[(n+l)T] + a_1 y[(n+l-1)T] + \ldots + a_{l-1} y[(n+1)T] + a_l y[nT] =$$
$$= b_0 x[(n+m)T] + b_1 x[(n+m-1)T] + \ldots + b_{m-1} x[(n+1)T] + b_m x[nT], \qquad (1)$$

де a_0, a_1, ..., a_n і b_0, b_1, ..., a_m – сталі коефіцієнти, які залежать від параметрів ланок системи; $x[nT]=K=\mathrm{const}$.

Уведемо до розгляду оператор зміщення E [3], такий, що

$$y[(n+1)T] = E^1 y[nT], \ \ldots, \ y[(n+l)T] = E^l y[nT].$$

Отож отримуємо

$$(a_0 E^l + a_1 E^{l-1} + \ldots + a_{l-1} E + a_l) y[nT] = (b_0 E^m + b_1 E^{m-1} + \ldots + b_{m-1} E + b_m) x[nT].$$

Передавальна функція системи в операторній формі має вигляд

$$W(E) = \frac{b_0 E^m + b_1 E^{m-1} + \ldots + b_{m-1} E + b_m}{a_0 E^l + a_1 E^{l-1} + \ldots + a_{l-1} E + a_l} = \frac{R(E)}{D(E)}.$$

Для визначення впливу коренів чисельника (нулів) на окремі показники якості перехідного процесу зобразимо систему у вигляді послідовно з'єднаних ланок із передавальними функціями (див. рисунок):

$$W_1(E) = 1/D(E);$$

$$W_2(E) = R(E),$$

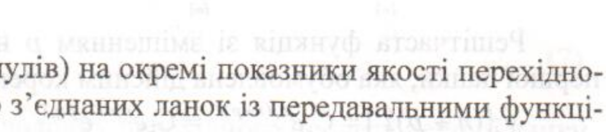

Схема з'єднаних ланок

тоді $W(E) = W_1(E) W_2(E) = 1/D(E) R(E)$.

Перша ланка описується диференціальним рівнянням

$$(a_0 E^l + a_1 E^{l-1} + \ldots + a_{l-1} E + a_l) u[nT] = x[nT] \qquad (2)$$

або $D(E) u[nT] = x[nT]$,

розв'язок якого можна записати у вигляді

$$u[nT] = u_в[nT] + u_{пер}[nT].$$

Перехідна складова $u_{пер}[nT]$ є загальним розв'язком однорідного рівняння $D(E)\, u[nT] = 0$ і має вигляд

$$u_{пер}[nT] = C_1 E_1^{\,nT} + C_2 E_2^{\,nT} + \ldots + C_l E_l^{\,nT},$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_l$ – сталі, які визначаються початковими умовами; $E_i = e^{q_i} = e^{\ln E_i}$ – корені характеристичного рівняння $D(E)=0$.

Якщо характеристичне рівняння має $2k$ комплексних коренів і $(n-2k)$ дійсних коренів, то, при $q_i = \ln E_i = \eta_i \pm j\omega_i$ загальний розв'язок можна зобразити у вигляді

$$u_{пер}[nT] = \sum_{i=1}^{k} C_i e^{\eta_i nT} \sin(\omega_i nT + \varphi_i) + \sum_{i=2k+1} C_i e^{\eta_i nT},$$

де складові $C_i e^{\eta_i nT}$ обумовлені дійсними коренями, а $C_i e^{\eta_i nT} \sin(\omega_i nT + \varphi_i)$ – комплексно-спряженими.

Частковий, або вимушений, розв'язок $u_в[nT]$, який визначається правою частиною рівняння (2), відповідає вимушеному режиму системи після затухання $u_{пер}[nT]$:

$$u_в[nT] = \frac{1}{\sum_{i=0}^{l} a_i} x[nT] = \frac{K}{\sum_{i=0}^{l} a_i}.$$

Тоді розв'язок першої ланки можна записати як

$$u[nT] = \frac{K}{\sum_{i=1}^{l} a_i} + \sum_{i=1}^{k} C_i e^{\eta_i nT} \sin(\omega_i nT + \varphi_i) + \sum_{i=2k+1}^{l} C_i e^{\eta_i nT}$$

Друга ланка описується рівнянням

$$y[nT] = R(E)u[nT] = (b_0 E^m + b_1 E^{m-1} + \ldots + b_{m-1} E + b_m) u[nT], \tag{3}$$

або $y = R(E) u_{пер}[nT] + R(E) u_в[nT]$.

Отже, щоб одержати розв'язок усієї системи, необхідно згідно з формулою (3) задати зміщення m, m-1, ..., 1 незалежній змінній кожної складової загального та часткового розв'язку першої ланки і перемножити на відповідні коефіцієнти.

Оскільки досліджується система стабілізації, тобто $x[nT]$=const, частковий розв'язок системи набуває вигляду

$$y_в[nT] = \frac{\sum_{i=1}^{m} b_i}{\sum_{i=1}^{l} a_i} x[nT] = \frac{K \sum_{i=1}^{m} b_i}{\sum_{i=1}^{l} a_i}.$$

Решітчаста функція зі зміщенням p незалежної змінної складової загального розв'язку першої ланки, яка обумовлена дійсним коренем, має вигляд

$$y_r[(n+p)T] = C_r e^{\eta_r (n+p)T} = C_r e^{\eta_r nT} e^{p\eta_r T}.$$

Звідки складову перехідного процесу системи, яка обумовлена дійсними коренями, запишемо як

$$y_{rпер} = C'_r e^{\eta_r nT},$$

де $C'_r = (b_m + b_{m-1} e^{\eta_r T} + \ldots + b_1 e^{(m-1)\eta_r T} + b_0 e^{m\eta_r T}) C_r$.

Коливна складова загального розв'язку першої ланки, яка обумовлена комплексно-спряженими коренями, і її решітчасті функції мають вигляд:

$$y_k[nT] = C_k e^{\eta_k nT} \sin(\omega_k nT + \varphi_k);$$

$$y_k[(n+1)T] = C_k e^{\eta_k T} e^{\eta_k nT} [\sin(\omega_k nT + \varphi_k)\cos(\omega_k T) + \sin(\omega_k T)\cos(\omega_k nT + \varphi_k)];$$

$$y_k[(n+2)T] = C_k e^{2\eta_k T} e^{\eta_k nT} [\sin(\omega_k nT + \varphi_k)\cos(2\omega_k T) + \sin(2\omega_k T)\cos(\omega_k nT + \varphi_k)]; \tag{4}$$

....

$$y_k[(n+m)T] = C_k e^{m\eta_k T} e^{\eta_k nT} [\sin(\omega_k nT + \varphi_k)\cos(m\omega_k T) + \sin(m\omega_k T)\cos(\omega_k nT + \varphi_k)].$$

З рівняння (3) і співвідношень (4) випливає, що складова перехідного процесу всієї системи, яка обумовлена комплексно-спряженими коренями, має вигляд

$$y_{knep}[nT] = AC_k e^{\eta_k nT}\sin(\omega_k nT+\varphi_k) + BC_k e^{\eta_k nT}\cos(\omega_k t+\varphi_k) =$$
$$= DC_k e^{\eta_k nT}\sin(\omega_k nT+\varphi_k+\theta) = C'_k e^{\eta_k nT}\sin(\omega_k nT+\varphi'_k)\,, \quad (5)$$

де $A=\sum_{i=0}^{m} b_{m-i}e^{i\eta_k T}\cos(i\omega_k T)$;

$B=\sum_{i=0}^{m} b_{m-i}e^{i\eta_k T}\sin(i\omega_k T)$;

$D=\sqrt{A^2+B^2}$;

$\theta=\arcsin A/D$;

$C'_k=DC_k$;

$\varphi'=\varphi_k+\theta$.

Тоді розв'язок всієї системи записується у вигляді

$$y[nT] = y_в[nT] + y_{nep}[nT] = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i}{\sum_{i=0}^{l} a_i}K + \sum_{i=1}^{k} C'_i e^{\eta_i nT}\sin(\omega_i nT+\varphi'_i) + \sum_{i=2k+1}^{l} C'_i e^{\eta_i nT}.$$

Відомо, що тривалість згасання перехідного процесу і його складових до 5% від початкового значення, відповідає часу закінчення перехідного процесу. Тоді одержуємо

$$0{,}05C'_i = C'_i e^{\eta_i T n_{nep}},$$

звідки випливає, що час перехідного процесу i-ї складової системи, яка обумовлена дійсним коренем, становить

$$Tn_{nep} = \frac{\ln 0{,}05}{\eta_i} \approx \frac{3}{\eta_i}. \quad (6)$$

Для коливної складової системи (5) можна визначити верхню межу перехідного процесу, припускаючи

$\sin(\omega_i nT+\varphi_i)=1$.

Отже, враховуючи зазначене, одержуємо

$$Tn_{nep} \le \frac{\ln 0{,}05}{\eta_i} \approx \frac{3}{\eta_i}. \quad (7)$$

З виразів (6), (7) випливає, що час затухання складових перехідного процесу першої ланки і час затухання відповідних складових всієї системи стабілізації однакові. А з формули (5) видно, що частота згасаючих коливань i-ї складової перехідного процесу всієї системи стабілізації дорівнює частоті згасаючих коливань відповідної складової першої ланки системи з передавальною функцією $W_1(E)$.

Крім того, відомо, що аналогічно, як і для неперервних систем [3], згасання за період складової перехідного процесу, яке описується виразом

$u(nT)=C_i e^{\eta_i nT}\sin(\omega_i nT+\varphi_i)$,

дорівнює

$$\xi = 1-e^{-\frac{2\pi}{\mu_i}},$$

де $\mu_i=\dfrac{\omega_i}{|\eta_i|}$ – ступінь коливальності ланки, або $\mu_i = \dfrac{2\pi}{\ln\dfrac{1}{1-\xi}}$.

Визначимо згасання за період і ступінь коливальності складової перехідного процесу всієї системи стабілізації, яка описується рівнянням

$$y_{inep} = DC_i e^{\eta_i nT} \sin(\omega_i nT + \varphi_i + \theta),$$

або (тому що система стійка і $\eta_i < 0$)

$$y_{inep} = DC_i e^{-|\eta_i| nT} \sin(\omega_i nT + \varphi_i + \theta).$$

При деякому значенні $n=n_1$ амплітуда дорівнює

$$C_{1i} = DC_i e^{-|\eta_i| n_1 T},$$

через період $T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_i}$

$$C_{2i} = DC_i e^{-|\eta_i| n_1 (T + \frac{2\pi}{\omega_i})} = DC_i e^{-|\eta_i| n_1 T} e^{-n_1 2\pi \frac{|\eta_i|}{\omega_i}} = C_{1i} e^{-n_1 2\pi \frac{|\eta_i|}{\omega_i}}.$$

Тоді

$$\xi = \frac{C_{1i} - C_{2i}}{C_{1i}} = 1 - \frac{C_{2i}}{C_{1i}} = 1 - e^{\frac{-2\pi}{\mu}},$$

або $\mu = \dfrac{2\pi}{\ln\dfrac{1}{1-\xi}}$.

Наведений аналіз і вирази складових перехідних процесів, вирази ступеня коливальності і загасання за період показують, що коливальність і тривалість перехідного процесу відповідних складових однакові як при наявності, так і при відсутності коренів чисельника передавальної функції дискретної системи стабілізації і залежать від коренів характеристичного рівняння. Оскільки тривалість перехідного процесу всієї системи не більша від тривалості перехідного процесу складової, яка затухає найдовше серед всіх складових загального розв'язку рівняння системи, а коливальність перехідного процесу системи не більша від коливальності складової, яка має найбільше значення, то при дослідженні тривалості і коливальності перехідного процесу дискретної системи стабілізації, що описується рівнянням (1), можливо використовувати відомі непрямі кореневі методи оцінки зазначених показників якості перехідних процесів.

Список літератури

1. *Ту Ю.Т.* Цифровые и импульсные системы автоматического управления. – М.: Машиностроение, 1964. – 703 с.

2. *Попович М.Г., Ковальчук О.В.* Теорія автоматичного керування. – К.: Либідь, 1997. – 544 с.

3. *Шевелев А.Г.* Оценка колебательности и других показателей качества переходных процессов в дискретных системах автоматического управления // Проблемы управления и информатики. –1996. – Вып. 3. – С. 52–60.

Стаття надійшла до редакції 27.09.02.