УДК 519.21

В.Д.Тетерятник, доц.
(Національний технічний університет України "КПІ")

НЕЛІНІЙНІ МОДЕЛІ ОБҐРУНТУВАННЯ РОЗРОБКИ ТА ПРОЕКТУВАННЯ СИСТЕМ ОЗБРОЄННЯ І ВІЙСЬКОВОЇ ТЕХНІКИ

Запропоновано математичну модель оптимального розподілу надійності між елементами складних систем озброєння та військової техніки під час їхнього створення за критерієм прогнозованих витрат на експлуатацію системи.

Вступ. Проблеми входження України до європейських структур (Європейського союзу, Північноатлантичного блоку) пов'язані з системними завданнями реконструкції засобів і способів системи оборони, стратегічними інтересами держави, укріпленням її економічного стану і військової могутності, забезпеченням національних інтересів, що є складовими національної ідеї. З огляду на успіхи математизованої науки управління науково-теоретичною базою досліджень методів і оптимальних засобів розв'язку цієї проблеми, безперечно має стати теорія обґрунтування і прийняття рішень, особливо її математичні методи, алгоритми і моделі. Усе це має забезпечити наукову об'єктивність прийняття рішення керівництвом Збройних сил України щодо поставлених проблем. Науково-об'єктивний розв'язок базується на об'єктивній кількісній оцінці можливих варіантів дій. Оцінка має бути проведена методом, який містить доведення та допускає можливість перевірки. Саме такі можливості дає економіко-математична теорія (теореми, алгоритми, моделі) системи обґрунтування прийняття рішень (СОПР), яка останніми роками набула широкого розвитку і застосування.

У прикладній та науковій літературі нерідко вживається термін "система підтримки прийняття рішення (СППР)". Цей термін має відповідати розв'язку завдання з застосуванням математичних основ обґрунтування і прийняття рішення. Але, на нашу думку, слово "підтримка" з цього терміну не відповідає своєму реальному тлумачному значенню. Це відбувається, на наш погляд, тому, що розв'язок завдання не завжди означає його вирішення. Скінченний розв'язок кожної проблеми приймає відповідальна за це особа. Підтримувати рішення чи ні може інша особа, що наділена для цього певними повноваженнями. Але ж у нашому випадку це ніяк не є розв'язком проблеми чи задачі, що є не реальною, а математично формалізованою проблемою. Розв'язок формалізованої задачі за змістом логічно розглядати як обґрунтування розв'язку завдання, тобто обґрунтування наукової та розрахункової доцільності його вирішення. Саме тому замість поширеного терміна "СППР" нами використовується термін "СОПР", який із 1977 р. успішно застосовувався, наприклад, у роботі [1].

Для нашої країни сучасний етап воєнної реформи характеризується намаганнями оптимізувати організаційну та функціональну структури окремих підрозділів армії за критерієм ефективності бойових можливостей у виконанні покладених на них державою завдань, але за наявності обмежень як на чисельність Збройних сил України, так і на їх фінансування. Тому надзвичайно нагально постає науково-технічна проблема оптимізації створюваних нових зразків систем озброєння і військової техніки (СОіВТ) з поглядом на можливі допустимі витрати на її утримання, тобто за критерієм мінімізації прогнозованих витрат на їх майбутню експлуатацію.

Найбільшу частку змінної частини витрат на експлуатацію системи визначає її надійність, оскільки простої техніки через її відмови, відновлення процесу функціонування системи після ремонту вимагають додаткових витрат.

У більшості випадків СОіВТ є настільки складними, що оцінки співвідношення середньорічних витрат на експлуатацію системи до коштів, витрачених на створення самої системи, має надзвичайно широкий спектр коливань. Витрати на експлуатацію можуть у декілька разів перевищувати кошти на створення системи. Нерідко це коливання може відбуватися в межах навіть одного-двох порядків. Розв'язування проблеми експлуатації складних систем має розпочинатися ще на стадії проектування систем і продовжуватися на стадії їх виготовлення [2–5]. Лише на етапі проектування можна перерозподілити надійність між елементами СОіВТ без зміни передбаченої тактико-технічними вимогами надійності системи в цілому так, щоб за певним критерієм найкраще забезпечити функціонування тих її елементів і вузлів, які мають низьку ремонтопридатність або витратну відновлюваність, та з більшою ймовірністю запобігти відмовам, які найістотніше знижують ефективність процесу функціонування.

Дослідження поставленої проблеми розглянуто в роботах [1; 6–9].

Постановка завдання. Надійності p_i ($i = 1, 2, ..., n$) елементів системи має забезпечити заданий рівень P надійності всієї системи. Під оптимальністю розуміємо мінімальне з усіх можливих значення прогнозованих витрат на майбутню експлуатацію системи при певних тактико-технічних вимогах-обмеженнях до неї. Тобто має досліджуватись оптимізація розподілу надійності між елементами складної системи за критерієм прогнозованих витрат на майбутню експлуатацію системи. Саме цим обмежимось у постановці проблеми математичного моделювання, розглядаючи методи розрахунку і математичного прогнозування витрат на експлуатацію системи, яка лише розробляється, і не розглядаючи витрат на створення самої системи. Нашою метою є оптимальна структура системи на стадії її проектування, точніше побудова її оптимальної структури. Формальну постановку задачі використаємо з робіт [9; 10]. Розглядувана модель СоіВТ є нелінійною, а тому моделі прогнозованих витрат на експлуатацію системи матимуть відмінний вигляд від моделей із зазначених робіт.

Проводитимемо дослідження й побудову СОіВТ, що складається з n елементів. Вважатимемо, що елементи системи з'єднані між собою послідовно і зарезервовані. Кожен з них резервується виключно ідентичними елементами. Позначимо кількість резерву i-го елемента через r_i–1. Подібна проблема вже досліджувалася в роботах [9; 10]. Але оскільки в нашому випадку елементи СОіВТ мають резерв, то рівняння надійності не задається формулою, описаною в роботах [9; 10]. Тому оптимальний розподіл вимог до надійності елементів цієї системи не описуватиметься математичною моделлю, дослідженою в зазначених роботах. Для специфікації моделі будемо використовувати функцію прогнозованих витрат на експлуатацію елемента системи у вигляді, наведеному в роботі [10]. Тоді прогнозовані витрати на експлуатацію всієї складної системи послідовно-паралельної структури дорівнюватимуть

$$E(\bar{p}) = \sum_{i=1}^{n} r_i \left\{ A_i - (A_i - B_i) p_i^{\alpha_i} \frac{\exp(\gamma_i p_i^{\beta_i})}{\exp \gamma_i} \right\}. \tag{1}$$

Для зручності формалізації розв'язку задачі будемо припускати для такого класу систем, що всі параметри α_i ($i = \overline{1, n}$) у функції прогнозованих витрат (1) є не меншими від одиниці. Якщо в процесі розв'язування при визначенні параметрів α_i за статистичними спостереженнями виявиться, що якийсь із них є меншим за одиницю, то замінимо його одиницею. Подібні дії забезпечують обґрунтування математичного визначення та єдності розв'язку основної задачі, хоча в скінченному етапі розв'язку жорсткість цієї вимоги може бути порушена. Вибір параметрів α_i, більших від одиниці, для зазначеного типу СОіВТ є достатньою умовою існування розв'язку задачі оптимізації, але не необхідною. Для системи з наявності ідентичного резерву кожного елемента рівняння надійності записуємо у вигляді [2]:

$$P^* = \prod_{i=1}^{n} \left[1 - (1 - p_i)^{r_i} \right]. \tag{2}$$

Очевидно, що знаходження оптимального набору p_i ($i = \overline{1, n}$) при мінімальних прогнозованих витратах на експлуатацію системи зводиться до знаходження точки умовного екстремуму функції (1) при обмеженнях (2) та граничних умовах на змінні

$$0 < p_i < 1, \quad i = \overline{1, n}. \tag{3}$$

Отже, маємо типову задачу нелінійного програмування. Її можна розв'язати, використовуючи розроблений модифікований метод невизначених множників (ММНМ) [2]. Функція Лагранжа в модифікованому методі матиме вигляд:

$$L(\vec{p},\lambda)=\lambda\left\{\prod_{i=1}^{n}[1-(1-p_i)^{r_i}]-P^*\right\}+\sum_{i=1}^{n}r_i\left\{A_i-(A_i-B_i)p_i^{\alpha_i}\frac{\exp(\gamma_i p_i^{\beta_i})}{\exp\gamma_i}\right\}.$$

У побудованій функції Лагранжа відсутність обмежень на змінні у вигляді нерівностей (3) додатково може бути обгрунтована з ММНМ [2]. Функції $L(\vec{p}, \lambda)$ диференціюємо за кожною із змінних p_i і одержимо n виразів для частинних похідних. Для виконання необхідної умови існування екстремуму прирівнюємо їх до нуля, перетворюючи побудовані таким способом співвідношення на систему рівнянь:

$$\frac{\partial L}{\partial p_i}=\frac{\lambda r_i(1-p_i)^{r_i-1}}{1-(1-p_i)^{r_i}}\prod_{j=1}^{n}[1-(1-p_j)^{r_j}]-r_i(A_i-B_i)(\alpha_i p_i^{\alpha_i-1}+\beta_i\gamma_i p_i^{\alpha_i+\beta_i-1})\frac{\exp(\gamma_i p_i^{\beta_i})}{\exp\gamma_i}=0,$$

$i=1, 2, ..., n.$

Для спрощення одержаної системи рівнянь у кожному її рівнянні слід виокремити спільні для всіх n рівнянь окремі частини аналітичних виразів, а саме $\lambda\prod_{j=1}^{n}[1-(1-p_j)^{r_j}]$. Розв'язуючи кожне рівняння відносно такого виразу, одержуємо:

$$\lambda\prod_{j=1}^{n}[1-(1-p_j)^{r_j}]=(A_i-B_i)(\alpha_i p_i^{\alpha_i-1}+\beta_i\gamma_i p_i^{\alpha_i+\beta_i-1})\frac{\exp(\gamma_i p_i^{\beta_i})}{\exp\gamma_i}\frac{1-(1-p_i)^{r_i}}{(1-p_i)^{r_i-1}},\ i=\overline{1,n}. \tag{4}$$

Система (4) містить n невідомих p_i та $(n+1)$ невідому λ, а тому є неповною, оскільки має лише n рівнянь. Для доповнення її долучимо рівняння надійності (2). Отримана таким шляхом повна система трансцендентних рівнянь визначатиме шуканий розв'язок задачі оптимізації розподілу надійності окремих елементів, що мають резерв. Щодо типу рівнянь, то система (4) складається лише з трансцендентних рівнянь. Її розв'язок подати аналітичними методами у вигляді скінченної кількості операцій не видається можливим. Тому перетворимо її до вигляду, який був би сприйнятним для відшукання розв'язку іншим способом. Для побудови методу наближеного здобуття розв'язку розглянемо кількість резерву кожного елемента й найменше значення його позначимо через r_ω:

$$r_\omega=\min_{1\le i\le n}\{r_i\}. \tag{5}$$

Однаковий, найменший резерв можуть мати і кілька елементів, тобто властивістю (5) можуть володіти декілька елементів системи. Тому виділимо множину всіх таких елементів і позначимо її через Ω.

З множини Ω визначимо k-й елемент, користуючись правилом: це будь-який з елементів, на експлуатацію яких вартісні параметри функцій прогнозованих витрат задовольняють умови:

$$(\alpha_k+\beta_k\gamma_k)(A_k-B_k)=\min_{\omega\in\Omega}\{(\alpha_\omega+\beta_\omega\gamma_\omega)(A_\omega-B_\omega)\}. \tag{6}$$

Переконатися в доцільності цього правила зможемо, як тільки одержимо результат оптимального розподілу $\{p_i\}_1^n$.

Для цілеспрямованого спрощення системи рівнянь (4) спочатку виключимо з неї невідому λ. Ліві частини всіх рівнянь системи (4) є однаковими, тому зрівнюємо праві частини i-го (i = 1, 2, ..., $k-1$, $k+1$, ..., n) і k-го рівнянь. При цьому k має бути вибране відповідно до умови (6). Таким способом звільняємося від уведеної невідомої λ разом з її коефіцієнтом $\prod_{j=1}^{n}[1-(1-p_j)^{r_j}]$:

$$(A_i-B_i)\frac{1-(1-p_i)^{r_i}}{(1-p_i)^{r_i-1}}(\alpha_i p_i^{\alpha_i-1}+\beta_i\gamma_i p_i^{\alpha_i+\beta_i-1})\frac{\exp(\gamma_i p_i^{\beta_i})}{\exp\gamma_i}=$$
$$=(A_k-B_k)\frac{1-(1-p_k)^{r_k}}{(1-p_k)^{r_k-1}}(\alpha_k p_k^{\alpha_k-1}+\beta_k\gamma_k p_k^{\alpha_k+\beta_k-1})\frac{\exp(\gamma_k p_k^{\beta_k})}{\exp\gamma_k},\ i=1, 2, ..., k-1, k+1, ..., n. \tag{7}$$

Подальші нескладні тотожні перетворення над цією системою рівнянь дають можливість виокремити в різних частинах рівнянь різнотипні функції і звести її до еквівалентного вигляду:

$$\frac{A_i - B_i}{A_k - B_k}\frac{\alpha_i p_i^{\alpha_i - 1} + \beta_i \gamma_i p_i^{\alpha_i + \beta_i - 1}}{\alpha_k p_k^{\alpha_k - 1} + \beta_k \gamma_k p_k^{\alpha_k + \beta_k - 1}}\frac{\dfrac{1-(1-p_i)^{r_i}}{(1-p_i)^{r_i - 1}}}{\dfrac{1-(1-p_k)^{r_k}}{(1-p_k)^{r_k - 1}}} = \frac{\dfrac{\exp(\gamma_k p_k^{\beta_k})}{\exp \gamma_k}}{\dfrac{\exp(\gamma_i p_i^{\beta_i})}{\exp \gamma_i}},\ i = 1, 2, ..., k-1, k+1, ..., n. \qquad (8)$$

Рівняння (8) разом із долученим до них рівнянням надійності (2) складають систему n трансцендентних рівнянь з n невідомими. Згідно з роботою [2] розв'язок цієї системи існує.

Одержані аналітичні результати формалізуємо у вигляді алгоритму.

Крок 1. З міркувань доцільності надаємо перших наближень усім значенням надійності $p_{ic}^{(c)}$ елементів складної системи. Їх можна вибрати довільно з проміжку (P^*, 1). Якщо для простоти виходити з припущення початкової рівнонадійності елементів системи, то можна покласти $p_{ic}^{(c)} = \sqrt[n]{P^*}, i = 1,2,...,n.$

Крок 2. Серед заданих статистичних значень надійності $\widehat{p}_{it_1}, \widehat{p}_{it_2}, ..., \widehat{p}_{it_{s_i}}$ для кожного елемента системи вибираємо ті три значення $\widehat{p}_{i1}$, $\widehat{p}_{i2}$, $\widehat{p}_{i3}$, що найближче знаходяться до відповідного наближення надійності $p_{ic}^{(c)}$:

$$\widehat{p}_{i1} = \min_{1 \le u \le r_i}\left|p_{ic}^{(c)} - \widehat{p}_{it_u}\right|; \quad \widehat{p}_{i2} = \min_{1 \le u \le r_i, t_u \ne 1}\left|p_{ic}^{(c)} - \widehat{p}_{it_u}\right|; \quad \widehat{p}_{i3} = \min_{1 \le u \le r_i, t_u \ne 1, t_u \ne 2}\left|p_{ic}^{(c)} - \widehat{p}_{it_u}\right|.$$

Якщо трійка значень вибирається не вперше, то перевіряємо, чи не збігається вона з якоюсь раніше вибраною трійкою. Якщо це так, то наступне наближення надійності $p_{ic}^{(c)}$ дорівнює середньому арифметичному наближенню, що відповідають однаковим трійкам.

Крок 3. За вибраними статистичними значеннями $\widehat{p}_{i1}$, $\widehat{p}_{i2}$, $\widehat{p}_{i3}$ і відповідними їм значеннями функції прогнозованих витрат на експлуатацію E_i ($\widehat{p}_{i1}$), E_i($\widehat{p}_{i2}$), E_i ($\widehat{p}_{i3}$) для кожного i-го (i = 1, 2, ..., n) елемента системи обчислюємо константи функції витрат на експлуатацію за формулами, наведеними в роботі [2].

Крок 4. Множину елементів Ω, що мають найменшу кількість резерву, вибираємо за формулою (5): $r_\omega = \min\limits_{1 \le i \le n} r_i$.

Крок 5. Параметри функцій прогнозованих витрат на експлуатацію елементів з множини Ω порівнюємо за правилом (6) і вибираємо варійовний параметр $p_k^{(c)}$. Якщо таких параметрів кілька, то вибираємо будь-який з них.

Крок 6. Для всіх рівнянь визначаємо однакові складові та обчислюємо із системи (8) знаменник $(A_k - B_k)\left(\alpha_k \left(p_k^{(c)}\right)^{\alpha_k - 1} + \beta_k \gamma_k \left(p_k^{(c)}\right)^{\alpha_k + \beta_k - 1}\right)\dfrac{1-\left(1-p_k^{(c)}\right)^{r_k}}{\left(1-p_k^{(c)}\right)^{r_k - 1}}$ і вираз $\gamma_k\left(\left(p_k^{(c)}\right)^{\beta_k} - 1\right)$ за вибраним значенням $p_k^{(c)}$.

Крок 7. Наближення p_{ic} всіх елементів системи, крім k-го, підставляємо в рівняння (8).

А. Якщо права і ліва частини рівняння рівні між собою з точністю ε^*, то наближення x_{ic} вважаємо дійсним і позначаємо $p_{ic} = p_i^{(c)}$.

Б. Якщо ліва частина i-го ($i = \overline{1,n}$, $i \ne k$) більша за праву, то вибираємо наближення $p_{ic+1} < p_{ic}$ і підставляємо в рівняння (7).

В. Якщо ліва частина менша за праву понад величину ε^*, то $p_{ic+1} > p_{ic}$. Наближення p_{ic+1} підставляємо в рівняння (7).

Крок 8. Усі наближення $p_i^{(c)}$ ($i = \overline{1,n}$) підставляємо в рівняння (2).

А. Якщо права частина рівняння збігається з лівою P^* з точністю ε^*, то наближення $p_i^{(c)}$ є оптимальними p_i^* $(i = \overline{1,n})$ і задача розв'язана.

Б. Якщо $P^{(c)}$ не дорівнює P^* із заданою точністю, то поліпшуємо значення варійовного параметра $p_k^{(c)}$ за правилом: $p_k^{(c+1)} > p_k^{(c)}$, якщо $P^* > P^{(c)}$; $p_k^{(c+1)} < p_k^{(c)}$, якщо $P^* < P^{(c)}$. Далі переходимо до кроку 2 алгоритму.

Одержана формалізація виконувалася для СОіВТ, які лише проектуються. На етапі розробки складних систем необхідно розглядати програму їх надійності і ефективності процесу функціонування. Саме такі дослідження на сьогодні є актуальними для СОіВТ при розбудові оборонних об'єктів нашої країни. Вони мають складати воєнно-економічну теоретико-розрахункову базу СОПР для обгрунтування важливого рішення оборонного значення.

Одним з основних результатів дослідження й конструювання СОПР можна вважати допустимість їх економетричного трактування з одержаної моделі. У сукупності визначень витрат [11], цільової та керуючої змінної [12] параметри моделі несуть змістовне економетричне навантаження. Величина p_i, $\overline{1,n}$ є керуючою екзогенною змінною, значення якої може повністю контролюватися командиром, що приймає рішення. На цьому етапі визначається сировина, елементна база та якість (надійність) елементів, які мають бути використані при побудові СОіВТ. Ці керуючі змінні з погляду СОПР можуть розглядатися вихідними параметрами моделі. Одна із системних змінних $P(\bar{p})$, $E(\bar{p})$ характеризується як цільова функція – залежна ендогенна змінна економ-метричної моделі, а інша, що виступає обмеженням для цільової змінної, – частково контрольована, частково залежна змінна. Фахівець (командир), що приймає рішення, користуючись СОПР, має чітко орієнтуватися в структурі взаємозалежностей змінних, інакше не зможе визначити в реальній ситуації ті параметри, якими можна нехтувати в моделі, і ті її параметри, нехтування якими може призвести до суттєвих похибок в оптимальному значенні цільової функції, а це, в свою чергу, може призвести до неефективності використання СОПР у реальних умовах.

Список літератури

1. *Саркисян С.А., Каспин В.И., Лисичкин В.А.* Теория прогнозирования и принятия решений. – М.: Высш. шк., 1977. – 352 с.
2. *Корнійчук М.Т., Совтус І.К.* Стохастичні моделі інформаційних технологій оптимізації надійності складних систем. – К.: КВІУЗ, 2000.– 316 с.
3. *Капур К., Ламберсон Л.* Надежность и проектирование систем / Пер. с нем. – М.: Мир, 1977. – 606 с.
4. *Тараканов К.В., Овчаров Л.А., Тырышкин А.Н.* Аналитические методы исследования систем. – М.: Сов. радио, 1974. – 240 с.
5. *Хенлі Д.Е., Кумамото Х.* Надійнісне проектування технічних систем і оцінка риску/ Пер. з англ. – К.: Вища шк., 1987. – 544 с.
6. *Корнійчук М.Т., Тетерятник В.Д.* Алгоритм для менеджменту розподілу інвестицій на оптимізацію резервування складних систем // Моделювання та інформаційні системи в економіці. – К.: 2002. – № 67. – С.104–111.
7. *Северцев Н.А.* Надежность сложных систем в эксплуатации и отработке. – М.:Высш. шк., 1989. – 432 с.
8. *Тетерятник В.Д.* Нелінійні економіко-математичні моделі СОПР розбудови і реконструкції систем ППО // Проблеми економічної кібернетики: Зб.наук.пр. за матеріалами 7-ї Всеукр. НМК 11-13 верес. 2002 р. – Запоріжжя: ЗДУ, 2002. – С. 216–217.
9. *Корнійчук М.Т., Тетерятник В.Д., Рогов П.Д.* Нелінійна модель СОПР в аспекті розбудови складних систем // Зб. наук. пр. ВІТІ НТУУ "КПІ". – К.: ВІТІ НТУУ "КПІ", 2002. – № 3. – С. 118–125.
10. *Наконечний С.І., Совтус І.К., Капишон В.Г.* Критерії прогнозованих витрат у нелінійній економіко-математичній моделі оптимізації структури складних проектованих систем // Моделювання та інформаційні системи в економіці. – 2002. – № 67. – С. 53–70.
11. *Мескон Н.Х., Альберт М., Хедоурн Ф.* Основы менеджмента / Пер. с англ. – М.: Дело, 1992. – 702 с.
12. *Солнышков Д.С.* Оптимизация выбора вооружения. – М.: Воениздат, 1968. – 104 с.

Стаття надійшла до редакції 23.10.02.